Modifikace pojistných smluv - spoluúčast

Nechť X je náhodná veličina, popisující škodu a $d > 0$.

Definice : Proměnná nadměrné ztráty (excess loss variable) je definovaná jako

$$Y^P = X - d$$

pokud $X > d$, jinak není definovaná (P ... per payment).

Její očekávání

$$e_X(d) = E(X - d|X > d)$$

je střední nadměrná ztráta (mean excess loss function).

Pro k-tý obecný moment Y^P máme

$$e_X^k(d) = \frac{\int_d^\infty (x-d)^k f(x)dx}{1-F(d)}$$

pro spojitou n.v. X, analogicky pro diskrétní.

Nechť X je náhodná veličina, popisující škodu a $d > 0$.

Zleva cenzorovaná posunutá náhodná veličina je

$$Y^L = X - d, \qquad X > d$$

$$Y^L = 0, \qquad X \leq d$$

(L ... per loss). Tedy

$$Y^L = (X - d)_+$$

Máme

$$E((X-d)_+^k) = \int_d^{\infty} (x-d)^k f(x) dx$$

pro spojité n.v.

Definice : Náhodná veličina omezené ztráty je definovaná jako

$$Y = X \wedge u = \begin{cases} X & \text{pro } X < u \\ u & \text{pro } X \geq u \end{cases}$$

Je cenzorovaná zprava.

Příklad: Omezené pojistné ručení do velikosti u.

Platí

$$(X - d)_+ + (X \wedge d) = X$$

tedy spoluúčast d + omezené ručení do d = plné ručení

Modifikace smluv

Spoluúčast d (deductible)

– Je-li ztráta $X \leq d$ ... pojišťovna neplatí nic.

– Je-li ztráta $X > d$ ... pojišťovna platí $X - d$.

Tedy spoluúčast modifikuje původní X na Y^P nebo Y^L, kde

$$Y^P = \begin{cases} \text{nedef.} & \text{pro } X \leq d \\ X - d & \text{pro } X > d \end{cases}$$

(per payment) a

$$Y^L = \begin{cases} 0 & \text{pro } X \leq d \\ X - d & \text{pro } X > d \end{cases}$$

(per loss).

Platí $Y^P = Y^L$, pokud $Y^L > 0$.

Máme

$$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}, \quad y > 0$$

a podobně pro funkci přežití

$$S_{Y^P}(y) = \frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}, \quad y > 0$$

distribuční funkci

$$F_{Y^P}(y) = \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{S_X(d)}, \quad y > 0$$

a funkci rizika

$$h_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y+d)}{S_X(y+d)}, \quad y > 0$$

Pro veličinu per loss není třeba normalizovat, jen posuneme argument. Tedy

$$f_{Y^L}(y) = f_X(y+d)$$
$$S_{Y^L}(y) = S_X(y+d)$$
$$F_{Y^L}(y) = F_X(y+d)$$

Změna spoluúčasti mění frekvenci plateb, ale frekvence ztrát zůstává stejná.

Příklad: Určete f, F, S pro Y^L a Y^P, má-li X Paretovo rozdělení s $\alpha = 3, \theta = 2000$ a $d = 500$. (d.ú).

Věta: Pro spoluúčast d, očekávané náklady na ztrátu (cost per loss) jsou

$$E(Y^L) = E(X) - E(X \wedge d)$$

a očekávané náklady na platbu jsou

$$E(Y^P) = \frac{E(X) - E(X \wedge d)}{1 - F(d)}.$$

Důkaz: Pro náklady na ztrátu (per-loss) máme

$$E(Y^L) = \int_d^\infty (x - d)f(x)dx =$$

$$= \int_d^\infty xf(x)dx - \int_d^\infty df(x)dx = E(X) - \int_0^d xf(x)dx - \int_d^\infty df(x)dx$$

$$= E(X) - E(X \wedge d).$$

Definice: (LER loss elimination ration - poměr eliminace ztráty) je podíl poklesu v očekávané platbě se spoluúčastí k očekávané platbě bez spoluúčasti.

Vyjadřuje kolik spoluúčast pojišťovně ušetří

Bez spoluúčasti - očekávaná platba je $E(X)$

Se spoluúčastí: $E(X) - E(X \wedge d)$.

Tedy

$$\text{LER} = \frac{E(X \wedge d)}{E(X)} = \frac{E(X) - (E(X) - E(X \wedge d))}{E(X)}.$$

Další typy spoluúčasti

Frančízová spoluúčast (franchise deductible)

Je-li ztráta $X \leq d$, pojišťovna neplatí nic.

Je-li ztráta $X > d$, pojišťovna platí celou ztrátu X

– nespojitá výplatní funkce

Tedy F. D. přidá k plnění při obyčejné spoluúčasti hodnotu d, pokud dojde k platbě.

Tedy

$$Y^P = \begin{cases} nedef. & \text{pro } X \le d \\ X & \text{pro } X > d \end{cases}$$

per payment a

$$Y^L = \begin{cases} 0 & \text{pro } X \le d \\ X & \text{pro } X > d \end{cases}$$

per loss.

Pro hustotu dostaneme

$$f_{Y^P} = \frac{f_X(y)}{S_X(d)}$$

per payment a

$$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d) & y = 0 \\ f_X(y) & y > d \end{cases}$$

per loss. Máme tedy smíšenou náhodnou veličinu.

Věta: Pro Frančízovou spoluúčast d, očekávané náklady na ztrátu (cost per loss) jsou

$$E(Y^L) = E(X) - E(X \wedge d) + d(1 - F(d))$$

a očekávané náklady na platbu jsou

$$E(Y^P) = \frac{E(X) - E(X \wedge d)}{1 - F(d)} + d$$

Plyne z trvzení pro obyčejnou spoluúčast, neboť v případě platby se přidává d oproti obyčejné spoluúčasti.

Spolupojištění - Coinsurance

Pojišťovna platí

$$Y = \alpha X$$

kde $\alpha \in (0, 1)$.

Efekt inflace

– zvyšuje nominální náklady, ale při spoluúčasti se efekt zvětšuje

1. je více plateb

2. spoluúčast se odečítá až po inflaci.

Příklad: Pojistná událost dříve vedla ke škodě 600.

Pro $d = 500$ je platba 100.

Při 10% inflaci je teď škoda 660, platba je tedy 160

To je nárůst nákladů pro pojišťovnu 60%.

Věta: Pro spoluúčast d, při inflaci $1+r$, jsou očekávané náklady na ztrátu (per loss)

$$(1+r)[E(X) - E(X \wedge \frac{d}{1+r})].$$

Důkaz: Po inflaci jsou ztráty $Y = (1+r)X$, kde X jsou ztráty před inflací.

Tedy transformací distribuční funkce a hustoty dostaneme

$$f_Y(y) = \frac{1}{1+r} f_X\left(\frac{y}{1+r}\right)$$

a

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{1+r}\right).$$

$E(Y \wedge d)$ vypočteme dosazením těchto vztahů.

Smíšený Poissonův proces

Nechť $\{N_t | \Theta = \theta; t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou θ.

Tedy pro pevné θ má N_t stacionární a nezávislé přírůstky

Přechodové pravděpodobnosti splňují

$$p_{k,k+n}(s,t) = \frac{[\theta(t-s)]^n e^{-\theta(t-s)}}{n!}.$$

Speciálně pro $s = 0$ a $k = 0$

$$P(N_t = n) = \frac{(\theta t)^n e^{-\theta t}}{n!}$$

Tedy $N_t \sim Po(\theta t)$

Nechť $U(\theta)$ je distribuční funkce Θ s hustotou $u(\theta)$.
Pak pro mariginální pravděpodobnosti máme

$$p_n(t) = \int_0^\infty P(N_t = n|\Theta = \theta)u(\theta)d\theta.$$

Odtud

$$p_n(t) = \int_0^\infty \frac{(\theta t)^n e^{-\theta t}}{n!} u(\theta)d\theta.$$

Podle Bayesovy věty, podmíněné rozdělení Θ za podmínky $N_s = k$ bude

$$u_{s,k}(\theta) = \frac{P(N_s = k|\Theta)u(\theta)}{p_k(s)} = \frac{(\theta s)^k e^{-\theta s}}{k!p_k(s)} u(\theta)$$

Pro přechodové pravděpodobnosti dostaneme

$$p_{k,k+n}(s,t) = \frac{P(N_t - N_s = n, N_s = k)}{P(N_s = k)}$$

Podmíníme hodnotou θ a využijeme nezávislost při dané hodnotě θ. Dostaneme

$$p_{k,k+n}(s,t) = \frac{1}{p_k(s)} \int_0^\infty P(N_t - N_s = n | \Theta = \theta) P(N_s = k | \Theta = \theta) u(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{p_k(s)} \int_0^\infty \frac{[\theta(t-s)]^n e^{-\theta(t-s)}}{n!} \frac{(\theta s)^k e^{-\theta s}}{k!} u(\theta) d\theta$$

neboli

$$p_{k,k+n}(s,t) = \int_0^\infty \frac{[\theta(t-s)]^n e^{-\theta(t-s)}}{n!} u_{s,k}(\theta) d\theta$$

Tedy $p_{k,k+n}(s,t)$ má smíšené Poissonovo rozdělení s mísící distribucí $u_{s,k}(\theta)$.

$p_{k,k+n}(s,t)$ tedy závisí na k a přírůstky procesu nejsou nezávislé.

Znalost hodnoty $N_s = k$ obsahuje informaci o θ. Tato informace dále ovlivňuje rozdělení budoucího přírůstku.

Na druhé straně, podmíněním $\Theta = \theta$ dostaneme

$$P(N_t - N_s = n) = \int_0^\infty P(N_t - N_s = n | \Theta = \theta) u(\theta) d\theta$$
$$= \int_0^\infty \frac{[\theta(t-s)]^n e^{-\theta(t-s)}}{n!} u(\theta) d\theta.$$

Tedy rozložení přírůstků závisí pouza na $t - s$ a ne na t a s zvlášť.

Smíšený Poissonův proces má tedy stacionární, ale nikoliv nezávislé přírůstky.