Dvojný integrál

Definice a výpočet v kartézských souřadnicích

Petr Liška

Masarykova univerzita

15.4.2021

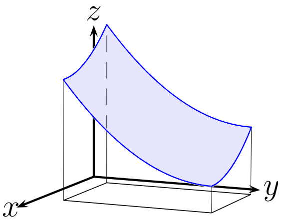
Dvojný integrál na obdélníku

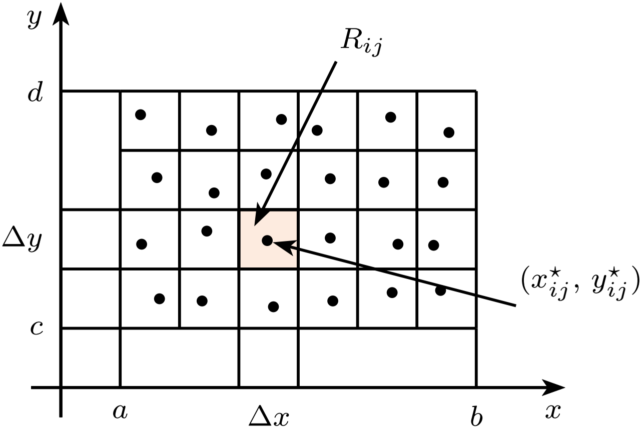
Nechť $f(x, y)$ je spojitá funkce definovaná na obdélníku

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\right\}$$

a uvažujme, že $f(x, y) \geq 0$. Graf funkce f je pak plocha o rovnici $z = f(x, y)$ a máme tak těleso S, které leží nad obdélníkem R a pod grafem funkce f, tj.

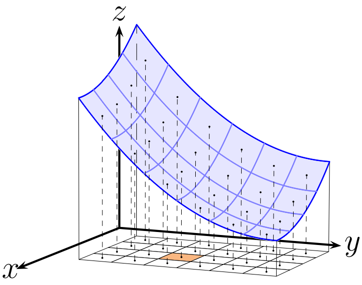
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y),\ (x, y) \in R\right\} .$$



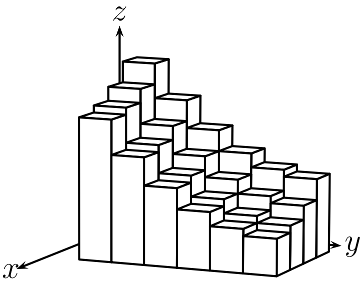

y
R_{ij}
d
Δy
$(x_{ij}^{\star}, y_{ij}^{\star})$
c
a
Δx
b
x

Každý kvádřík má objem

$$f(x_{ij}^\star, y_{ij}^\star)\Delta x \Delta y.$$



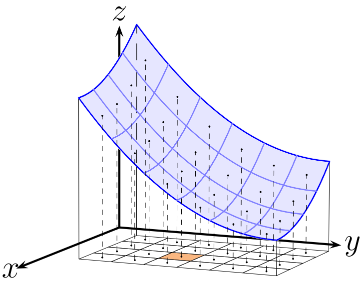
(a)



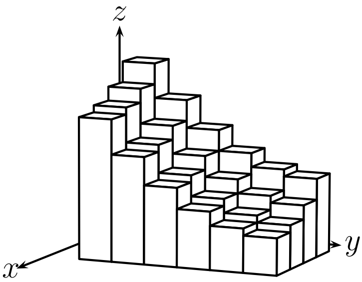
(b)

Každý kvádřík má objem

$$f(x_{ij}^\star, y_{ij}^\star)\Delta x \Delta y.$$



(c)



(d)

Sečteme-li objemy kvádříků přes všechny obdelníky R_{ij} dostaneme přibližný objem tělesa S:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^\star, y_{ij}^\star)\Delta x \, \Delta y$$

Dvojný integrál na obdélníku – definice

Zřejmě bude předchozí aproximace tím lepší, čím víc bude dílků m, n dělení, tedy čím menší budou obdélníčky R_{ij}, můžeme tak říct, že objem tělesa S bude

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{\star}, y_{ij}^{\star}) \Delta x \, \Delta y.$$

Dvojný integrál na obdélníku – definice

Zřejmě bude předchozí aproximace tím lepší, čím víc bude dílků m, n dělení, tedy čím menší budou obdélníčky R_{ij}, můžeme tak říct, že objem tělesa S bude

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{\star}, y_{ij}^{\star}) \Delta x \, \Delta y.$$

Definice

Nechť $f(x, y)$ je ohraničená funkce na obdélníku R. *Dvojný (Riemannův) integrál* funkce $f(x, y)$ na R je

$$\iint_R f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{\star}, y_{ij}^{\star}) \Delta x \, \Delta y,$$

jestliže tato limita existuje.

Kdy dvojný integrál existuje?

Jestliže limita z předchozí definice existuje, říkáme, že funkce f je *integrovatelná*. Postačující podmínku pro integrovatelnost funkce uvádí následující věta.

Kdy dvojný integrál existuje?

Jestliže limita z předchozí definice existuje, říkáme, že funkce f je *integrovatelná*. Postačující podmínku pro integrovatelnost funkce uvádí následující věta.

Věta

Nechť f je funkce dvou proměnných spojitá na obdélníku R. Pak je funkce f na tomto obdélníku integrovatelná.

Kdy dvojný integrál existuje?

Jestliže limita z předchozí definice existuje, říkáme, že funkce f je *integrovatelná*. Postačující podmínku pro integrovatelnost funkce uvádí následující věta.

Věta

Nechť f je funkce dvou proměnných spojitá na obdélníku R. Pak je funkce f na tomto obdélníku integrovatelná.

Poznámka

Aby dvojný integrál funkce f existoval, funkce f nemusí být nutně spojitá. Stačí, aby byla na R ohraničená a nespojitá pouze na konečném počtu „hladkých křivek“.

„Zřejmé“ vlastnosti

$$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

„Zřejmé“ vlastnosti

$$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_R cf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

„Zřejmé“ vlastnosti

$$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_R cf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Je-li $f(x,y) \geq g(x,y)$ pro všechna $[x,y] \in R$, pak

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Jak dvojný integrál spočítat?

Věta (Fubini)

Nechť $f(x,y)$ *je funkce spojitá na obdélníku* $R = [a, b] \times [c, d]$ *potom*

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Jak dvojný integrál spočítat?

Věta (Fubini)

Nechť $f(x,y)$ *je funkce spojitá na obdélníku* $R = [a,\, b] \times [c,\, d]$ *potom*

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \\ = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y\,.$$

Poznámka

V případě, že se funkce f dá psát ve tvaru $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$, je možné výpočet zjednodušit

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Dvojný integrál na obecné uzavřené oblasti

Definice

Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na ohraničené uzavřené souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$ a nechť R je obdelník takový, že $M \subseteq R$. Definujme na R funkci g předpisem

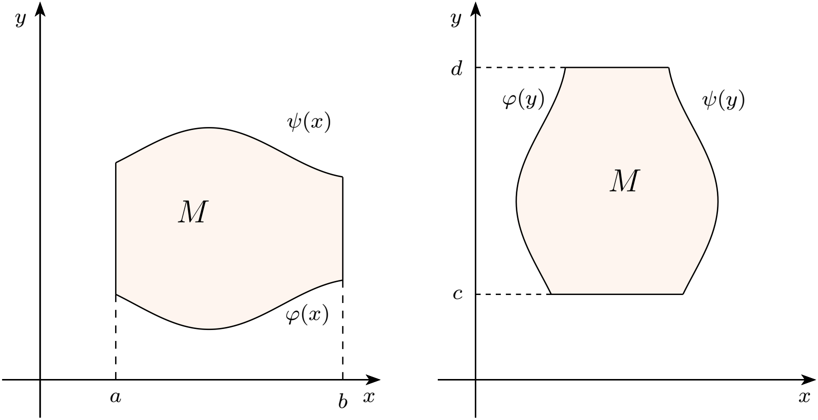
$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{je-li}(x,y) \in M \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a předpokládejme, že funkce g je na R integrovatelná. Pak *dvojný integrál funkce f na množině M* definujeme vztahem

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Podobně jako u dvojného integrálu přes obdélník, platí, že funkce, která je definovaná a spojitá na ohraničené uzavřené souvislé oblasti, je integrovatelná.

Jak vypadají množiny, na kterých umíme integrovat?



(e) (f)

Obrázek: Uzavřené elementární oblasti

Jak dvojný integrál vypočteme?

Věta (Fubini)

Nechť $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou funkce spojité na intervalu $[a, b]$ a nechť $f(x, y)$ je funkce spojitá na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Pak

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Nechť $\varphi(y)$, $\psi(y)$ jsou funkce spojité na intervalu $[c, d]$ a nechť $f(x, y)$ je funkce spojitá na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \quad \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Pak

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru

Věta

Nechť $f(x, y)$ *je funkce integrovatelná na konečném počtu uzavřených elementárních oblastí* $M_1, M_2, \ldots, M_n$*, které mají společné nejvýše hraniční body a nechť* $M = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$*. Pak platí*

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{M_1} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + \int_{M_2} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{M_n} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x\,.$$