Autonomní systémy v rovině

Geometrické vlastnosti trajektorií, nelineární systémy

Petr Liška

Masarykova univerzita

11.3.2021

Lineární autonomní systém

Uvažujme lineární autonomní systém, tj.

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad \text{kde} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Věta

Nechť A je regulární matice systému (1) a nechť λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice A. Stacionární bod $[0,0]$ je

- *nestabilní uzel, jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$;*
- *stabilní uzel, jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$;*
- *sedlo, jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;*
- *nestabilní ohnisko, jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\mathtt{i}$ a $\alpha > 0$;*
- *stabilní ohnisko, jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\mathtt{i}$ a $\alpha < 0$;*
- *střed, jsou-li $\lambda_{1,2} = \pm\beta\mathtt{i}$.*

Malá odbočka - asymptotická stabilita

Definice

Řešení rovnice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{2}$$

se nazývá *asymptoticky stabilní*, když je stabilní a když ke každému $t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(t_1) > 0$ tak, že pro každé řešení $\mathbf{x}$ rovnice (2) splňující nerovnost $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ platí

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0.$$

Malá odbočka - asymptotická stabilita

Definice

Řešení rovnice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{2}$$

se nazývá *asymptoticky stabilní*, když je stabilní a když ke každému $t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(t_1) > 0$ tak, že pro každé řešení $\mathbf{x}$ rovnice (2) splňující nerovnost $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ platí

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0.$$

Věta

Nulové řešení rovnice (1) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice matice A má zápornou reálnou část.

Nelineární systém

Věta

Předpokládejme, že funkce $f(x,y)$, $g(x,y)$ jsou spojité a mají spojité parciální derivace druhého řádu v okolí bodu $[x_0,y_0]$ a že $f(x_0,y_0)=g(x_0,y_0)=0$. Nechť

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Pak je bod $[x_0,y_0]$ izolovaným singulárním bodem systému

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Přitom je bod $[x_0,y_0]$ stabilní/nestabilní uzel/ohnisko nebo sedlo pro systém (3)*, je-li počátek singulárním bodem stejného typu pro systém*

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}y \\ y' &= \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}x + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}y\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Je-li však počátek střed pro systém (4)*, je bod $[x_0,y_0]$ buď bod rotace nebo ohnisko pro systém* (3)

Příklad

Nalezněte stacionární body autonomního systému

$$x' = x(x - 3y + 1)$$
$$y' = x^2 - 3y - 1$$

a určete jejich typ.

Jak se k tomu došlo aneb metoda linearizace

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(y-a)+\\
&+\frac{1}{2}[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(x-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2] + \cdots
\end{aligned}
$$

Jak se k tomu došlo aneb metoda linearizace

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(y-a)+$$
$$+\frac{1}{2}[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(x-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2] + \cdots$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \Delta f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \cdots$$

Jak se k tomu došlo aneb metoda linearizace

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(y-a) +$$
$$+\frac{1}{2}[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(x-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2] + \cdots$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \Delta f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \cdots$$

$$\left|\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right| \leq C\left(||\mathbf{x}-\mathbf{a}||^2\right)$$

Jak se k tomu došlo aneb metoda linearizace

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(y-a) +$$
$$+\frac{1}{2}[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(x-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2] + \cdots$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \Delta f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \cdots$$

$$\left|\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right| \leq C\left(||\mathbf{x}-\mathbf{a}||^2\right)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^\star) + \cdots ,$$
$$[D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)]_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^\star}$$

Jak se k tomu došlo aneb metoda linearizace

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star)$$

Jak se k tomu došlo aneb metoda linearizace

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star)$$

Uvažujme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

kde $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je hladká a nechť $\mathbf{x}^\star$ je stac. bod, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}$, pak

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star) + \cdots$$

a

$$\mathbf{x}' \approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star)$$

Jak se k tomu došlo aneb metoda linearizace

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star)$$

Uvažujme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

kde $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je hladká a nechť $\mathbf{x}^\star$ je stac. bod, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}$, pak

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star) + \cdots$$

a

$$\mathbf{x}' \approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star) \approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star)$$

Jak se k tomu došlo aneb metoda linearizace

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star)$$

Uvažujme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

kde $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je hladká a nechť $\mathbf{x}^\star$ je stac. bod, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}$, pak

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star) + \cdots$$

a

$$\mathbf{x}' \approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star) \approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star)$$

$$\mathbf{y}' = J\mathbf{y} \tag{6}$$

Grobman-Hartman Theorem

Hrubě řečeno

Nemá-li matice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{\star})$ čistě imaginární vlastní čísla, pak existuje bijektivní zobrazení mezi trajektoriemi rovnice (5) a trajektoriemi rovnice (6) z okolí bodu $\mathbf{x}^{\star}$ do okolí bodu $\mathbf{0}$.