03 Algebraické výrazy – met.

Stručný přehled teorie

Algebraický výraz: zápis skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací, popř. obsahují závorky

Definiční obor výrazu: množina hodnot proměnných, pro něž má algebraický výraz smysl (neformálně „Podmínky“)

Úprava algebraického výrazu: spočívá v nahrazení daného algebraického výrazu jednodušším algebraickým výrazem (ve tvaru např. součinu, bez odmocnin ve jmenovateli, ...), který se původnímu výrazu rovná na jejich společném definičním oboru

Druhy algebraických výrazů:

1) iracionální (obsahují odmocniny, $např.: \; 1+\sqrt{x}; \quad a+\sqrt{b-1}$)
2) racionální (nevyskytují se v nich odmocniny)
   - celistvé: mnohočleny ($např.: \; 2x+1; \; 3x^2+5x-y; \; 4; \; a^2+b^2$)
   - lomené: podíly mnohočlenů (jmenovatel ≠ 0, $např.: \; \frac{x^2-2x-1}{x-1}; \; \frac{4}{3x}$)

Vzorce:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$$

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0}a^n \pm \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} \begin{cases} +\binom{n}{n}b^n \cdots n \; je \; sudé \\ -\binom{n}{n}b^n \cdots n \; je \; liché \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n + b^n = (a+b).(a^{n-1} - a^{n-2}.b + a^{n-3}.b^2 - \ldots - a.b^{n-2} + b^{n-1})$$ pro *n* liché

$$a^n - b^n = (a-b).(a^{n-1} + a^{n-2}.b + a^{n-3}.b^2 + \ldots + a.b^{n-2} + b^{n-1})$$ pro *n* liché i sudé

$$a^n - b^n = (a+b).(a^{n-1} - a^{n-2}.b + a^{n-3}.b^2 - \ldots + a.b^{n-2} - b^{n-1})$$ pro *n* sudé

Pascalův trojúhelník:

- geometrické uspořádání binomických koeficientů do tvaru trojúhelníku

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
           ...
```

Nejčastější úpravy algebraických výrazů:

1) rozklad mnohočlenu na součin
   - vytýkání
     - jednoduché, $\text{např.}: a^3 + 2a^2 = a^2(a+2)$
     - vícenásobné, $\text{např.}: a^5 + 2a^4 + a + 2 = a(a^4+1) + 2(a^4+1) = (a+2).(a^4+1)$
   - rozklad kvadratického trojčlenu
   - pomocí vzorců
2) úpravy zlomků
   - rozšiřování $\text{např.}: \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc}$, kde b ≠ 0, c ≠ 0
   - krácení $\text{např.}: \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, kde b ≠ 0, c ≠ 0
   - usměrňování $\text{např.}: \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot 1 = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ b > 0

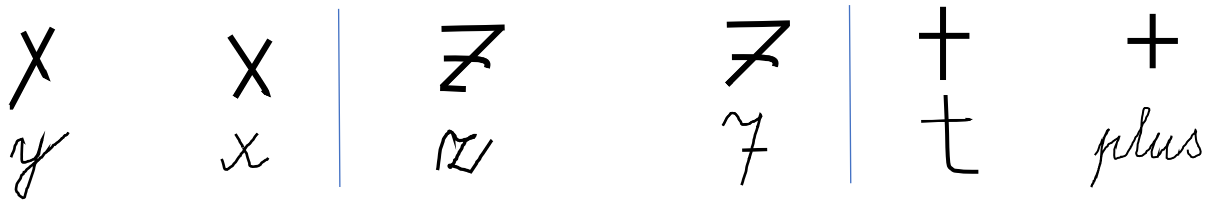
Podmínky: jmenovatel nesmí být roven 0, pod odmocninou nesmí být záporné číslo,….

Met.: Této kapitole je třeba co nejdříve věnovat naprosto mimořádnou pozornost. Obratnost, rychlost a jistota v provádění úprav algebraických výrazů je nutnou podmínkou pro to, aby studenti mohli v budoucnu zvládat nejen řešení nejrůznějších typů rovnic a nerovnic, nýbrž prakticky jakýchkoliv matematických úloh. Pokud má student problémy s úpravami algebraických výrazů, lze to přirovnat k situaci, kdy v hodině českého jazyka píše slohovou práci a nezná tvary některých písmen.

Některé rady pro učitele:

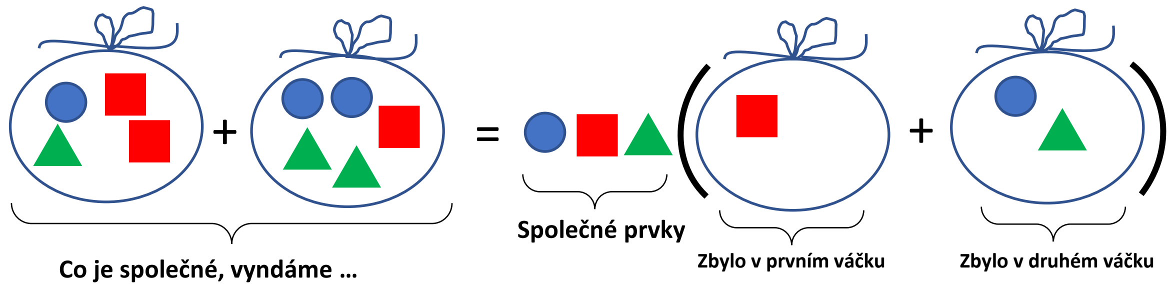
- nespoléhat na znalosti ze ZŠ (úroveň i obsah znalostí jsou u studentů naprosto různé);
- jasně a srozumitelně vyložit hned na začátku studentům, jaké znalosti základních typů úprav výrazů budou vyžadovány - např. a) při rozkladu mnohočlenů na součin s jistotou a bez chyb vytýkat, pracovat s kvadratickými trojčleny, používat vzorce (jasně se dohodnout, které budou vyžadovány zpaměti, nepřehánět požadavky), nebo b) při úpravách zlomků nekompromisně vyžadovat obratnost při provádění veškerých operací s jednoduchými i složenými zlomky (včetně usměrňování) a s jistotou určovat i podmínky, za kterých mají výrazy smysl;
- důkladnému procvičování úloh na úpravy výrazů věnovat dostatek času (případně i na úkor části některého z následujících témat);
- vést studenty k rozvážnému hledání cest k úpravám výrazů (např. úlohy
  1) Rozložte na součin: 5a.(6x – y) – 6x + y =
  nebo 2) Rozložte na součin: $16(3a + b)^2 – (5a – 3b)^2 =$
  mohou studenti řešit zbrklým roznásobením (to ale ke splnění úkolu zpravidla nepovede), přičemž je třeba vést je k tomu, aby si všimli možnosti vytýkání, případně použití vhodných vzorců apod. …);
- studenti by se při probírání tohoto tématu měli co nejvíce dostávat k tabuli (ideálně v rámci hodin matematického cvičení, kdy je třída rozdělena na poloviny). Jednak u studentů u tabule učitel nejlépe vidí, co jim dělá potíže, jednak se studenti při plném soustředění u tabule nejvíc naučí;
- prověrky psát až po důkladném procvičení – postupně od zvládnutí úprav jednodušších výrazů (rozklady polynomů na součin, požití jednoduchých vzorců, rozklady kvadratických trojčlenů,…) až po úpravy složitých výrazů (např. se složenými zlomky, s nutností určovat podmínky,…);
- některé další konkrétní rady:
  1) **jednoznačnost v zápisech**:
     - učitel sám by měl u sebe velmi dbát na to, aby při zápisech používal takové tvary písmen a číslic, aby nemohlo docházet k záměnám a chybnému čtení (totéž samozřejmě musí doporučovat studentů a vyžadovat to od nich ve svém, ale i v jejich vlastním, zájmu).

Rozhodně není dobře, když studentům řekne např.: „vím, moje „zetka“ vypadají jako sedm, ale vy mi rozumíte …“, nebo „dejte si pozor, abyste moje téčko někde v rovnici nezaměnili se znaménkem plus …“ apod.



2) **vytýkání**:

- mnohdy si žáci nepřinesou ze základní školy dostatečnou zběhlost a vytýkání jim dělá potíže. Pokud učitel v rámci vizualizace použije pro vysvětlení podstaty vytýkání následující „dětský“ obrázek, určitě to nebude žádná ostuda a spoustě studentů to pomůže princip vytýkání dobře pochopit:



Př.1: $6x^3.y^2.z + 15x^2.y.z^2 = 2.3.x^2.x.y.y.z + 5.3.x^2.y.z.z = 3x^2.y.z.(2xy + 5z)$;

Př.2: $2abc - 4abcd = 2abc.(1 - 2d)$. Když vytknu „všechno“, musí zbýt „stopa“ v podobě čísla 1… ověření roznásobením.

3) určení podmínek, za kterých má daný výraz smysl:

- stanovení podmínek, za kterých má daný lomený výraz smysl, je nesmírně důležité. Učitel by měl zdůraznit a nechat studenty zapsat do sešitu, že **„Jmenovatel zlomku se nikdy nesmí rovnat nule, protože NULOU DĚLIT NELZE!!!“.**

  A mohl by ukázat třeba na příkladu $\frac{k}{(a-b).c.(a+d)}$ hledání podmínek s tím, že by upozornil ve jmenovateli na **tři** činitele, z nichž žádný nesmí být nulový, aby byl **celý součin ve jmenovateli různý od nuly**: tedy

  1) $a - b \neq 0 \ \Rightarrow a \neq b$;
  2) $c \neq 0$;
  3) $a + d \neq 0 \ \Rightarrow \ a \neq -d$.

  Studenti totiž často chybují v tom, že u zlomku typu $\frac{k}{(a-b).c.(a+d)}$ bez rozmyslu požadují, aby každá proměnná, která se vyskytuje ve jmenovateli v jakémkoliv výrazu, byla různá od nuly. Tedy zde např. $a \neq 0$, …. Taková chyba se objevuje prakticky v každé třídě u velkého počtu studentů. Učitel by se měl u tohoto problému zastavit a vysvětlit, proč je to špatný požadavek. Je třeba zdůraznit studentům, že **podmínky musí být uvedeny všechny, ale žádná nesmí být uvedena navíc.**

  Takže se podívejme, jestli nastane problém, když bude $a = 0$. Zadaný zlomek pak bude vypadat takto: $\frac{k}{-b.c.d}$ a bude mít samozřejmě při $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ smysl a nulová hodnota proměnné *a* mu nevadí;

- dále by měl studentům doporučit, aby nedělali podmínky jako první a neurčovali je ze zadání (samozřejmě pokud není zcela jednoduché, kdy jsou z něj podmínky přímo vidět). Napřed by mělo být provedeno postupně celé řešení a pro určení podmínek vybrána ta fáze výpočtu, v níž jsou všechny jmenovatele rozložené a zapsané v podobě součinu činitelů, ale ještě se nekrátilo. Vyhnou se tak zbytečnému opakování stejných úprav jednak v řešení a jednak při určování podmínek:
  Např.: $\frac{x^3-x^2y}{y+y^2}:\frac{y^3-y^2x}{xy+x}=\frac{x^2.(x-y)}{y.(1+y)}\cdot\frac{x.(y+1)}{y^2.(y-x)}=-\frac{x^3}{y^3}$ … podmínky určíme až z druhého, nikoliv ze zadaného, výrazu (samozřejmě s vědomím, že čitatel jeho druhého zlomku byl původně ve jmenovateli);

- podobný problém s určením podmínek se může objevit i u úlohy $\frac{xz+yz-xn-yn}{xz-yz-xn+yn}=\frac{z.(x+y)-n.(x+y)}{z.(x-y)-n.(x-y)}=\frac{(x+y).(z-n)}{(x-y).(z-n)}=\frac{x+y}{x-y}$.
  Tady studenti často navrhují podmínky:
  $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0, n\neq 0.$ Učitel musí návrh s náležitým zdůvodněním odmítnout jako nesprávný, ale měl by navíc zavést diskusi o tom, z kterého zlomku budeme podmínky určovat:
  - ze zadaného **NE**, ve jmenovateli jsou součty a rozdíly;
  - z druhého v pořadí **NE**, sice jsme částečně upravili jmenovatele, ale pořád tam zůstává rozdíl;
  - ze čtvrtého (výsledného) **NE**, krácením jsme z něj odstranili výrazy, které v zadaném zlomku figurují a s nimiž musíme pro hledání podmínek počítat;
  - ze třetího v pořadí **ANO** – jmenovatel už má tvar součinu, ale výraz je zatím úplný, žádnou jeho část jsme neodstranili krácením.

4) **optimální způsoby řešení používat přednostně**:
   - např. v jedné třídě učitel napsal zadání: Upravte: $\frac{36y^2-1}{8y}\cdot\frac{y^3}{6y-1}=\cdots$
     a vyzval studenty, aby navrhli cestu k řešení. Pak akceptoval první vyslovený návrh, a to na dělení $(36y^2-1):(6y-1)=\cdots$ s představou, že si takto aspoň studenti zopakují dělení mnohočlenu mnohočlenem. Tím ovšem rozsypal koncepci řešení úlohy a tabule se postupně zaplnila nepřehlednou změtí výpočtů. Správně měl učitel sice studenta pochválit, že jeho cesta k cíli zřejmě vede, ale komplikovaným způsobem. A měl vyzvat další studenty k formulaci dalších nápadů. Z nich měl vybrat ten optimální, který nepochybně vypadal takto:
     $\frac{\mathbf{36y^2-1}}{\mathbf{8y}}\cdot\frac{\mathbf{y^3}}{\mathbf{6y-1}}=\frac{\cancel{(6y-1)}.(6y+1)}{8\cancel{y}}\cdot\frac{y^{\cancel{3}2}}{\cancel{6y-1}}=\frac{\mathbf{y^2.(6y+1)}}{\mathbf{8}}$. Tématem hodiny byly úpravy výrazů, ale kvůli takto nešikovně voleným postupům studenti krásná a jednoduchá řešení vůbec neviděli.

Základní poznatky

1. (Státní maturita 05/2016)
   Zjednodušte výraz
   $$3x\cdot\frac{2x-4}{6}-\left(\frac{x}{3}\right)^2=$$
   $\left[\frac{8x^2}{9}-2x\right]$
2. (Státní maturita 05/2016)
   Zjednodušte výraz
   $$\frac{\frac{1}{a}-\frac{5}{a^2}}{3a-15}=$$
   $\left[\frac{1}{3a^2}\wedge a\neq 0\wedge a\neq 5\right]$

3. (Státní maturita 09/2016)
Zjednodušte výraz

$$\left(a-1-\frac{1}{a-1}\right)\cdot\frac{a-1}{a\cdot a-4}=$$

$$\left[\frac{a}{a+2}\wedge a\neq 1\wedge a\neq\pm 2\right]$$

Typové příklady standardní náročnosti

4. $\left(\frac{2t-1}{t+1}-\frac{2t+1}{t-1}\right):\frac{t}{t-1}=$ $\left[\frac{-6}{t+1}\wedge t\neq 0\wedge t\neq\pm 1\right]$

5. $\left(\frac{k}{k-1}+1\right):\left(1-\frac{3k^2}{1-k^2}\right)=$ $\left[\frac{k+1}{2k+1}\wedge k\neq\pm\frac{1}{2}\wedge k\neq\pm 1\right]$

6. $\left(1-\frac{2}{1-3a}\right)\cdot\left(1-\frac{9a-9a^2}{3a+1}\right):\left(2-18a^2\right)=$ $\left[\frac{-1}{2(1+3a)}\wedge a\neq\pm\frac{1}{3}\right]$

7. $6x+\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right):\frac{4x}{x^4-2x^3+8x-16}=$ $\left[(x+2)^2\wedge x\neq 0\wedge x\neq\pm 2\right]$

8. $2u-\left(\frac{2u-3}{u+1}-\frac{u+1}{2-2u}-\frac{u^2+3}{2u^2-2}\right)\cdot\frac{u^3+1}{u^2-1}=$ $\left[\frac{2(2u-1)}{u+1}\wedge u\neq\pm 1\right]$

9. $\dfrac{\frac{a^4-b^4}{a^2b^2}}{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\cdot\left(1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)}=$ $\left[\frac{a+b}{a-b}\wedge a\neq b\wedge a\neq 0\wedge b\neq 0\right]$

10. $\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{x^2}{y}+x+y\right):\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)=$ $\left[\frac{x^2}{x-y}\wedge x\neq\pm y\wedge x\neq 0\wedge y\neq 0\right]$

11. $\dfrac{a\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}=$ $\left[\sqrt{ab}\wedge a>0\wedge b>0\right]$

Rozšiřující cvičení

12. $\left(a\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}\right):\frac{b+\sqrt{ab}}{b\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}=$ $\left[1\wedge ab>0\wedge a\neq b\right]$

13. Nalezněte graf funkce

$$f:y=\frac{\left(x^2-3x+2\right)\cdot|x+2|}{x^3-x^2-4x+4}$$

$$\left[f:y=\begin{cases}-1\ pro & x\in(-\infty;-2)\\ 1\ pro & x\in(-2;\infty)-\{1;2\}\end{cases}\right]$$