04 Lineární rovnice a nerovnice, jejich soustavy – met.

Stručný přehled teorie

Met.: Je velmi důležité studentům vysvětlit základní pojmy a metody související s řešením různých typů rovnic, nerovnic a jejich soustav (podle uvážení něco hned na začátku, něco v průběhu probírání).

- Rovnice, kořen rovnice, definiční obor rovnice, obor řešení rovnice, nerovnice, kořen nerovnice, definiční obor nerovnice, obor řešení nerovnice.
- Ekvivalentní a důsledkové (implikační) úpravy při řešení rovnic.
- Ekvivalentní úpravy při řešení nerovnic.
- Řešení různých typů lineárních rovnic (jednoduché lineární rovnice, lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli zlomku) a lineárních nerovnic.
- Řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých početně různými metodami (dosazovací, sčítací, porovnávací, substituční) a graficky.
- Řešení soustavy n rovnic o n neznámých (užití matic při řešení, Gaussova eliminační metoda).
- Grafické řešení soustavy nerovnic o dvou neznámých a zápis množiny řešení.
- Užití rovnic a nerovnic při řešení slovních úloh.

Lineární rovnice: lineární rovnicí s *n* neznámými ($x_1, x_2, ..., x_n$) nazýváme rovnici tvaru:
$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, kde a_i , $b \in \mathbf{R}$ (i = 1, 2, ... , n)
(analogicky: lin. nerovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$,
$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n < b$,
$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b$,
$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n > b$)

Lineární rovnice o jedné neznámé: $ax = b$

- je-li $a \neq 0$, má rovnice právě jedno řešení;
  je-li $a = 0$, pak pro $b = 0$ je řešením rovnice každé reálné číslo (nekonečně mnoho řešení)
  a pro $b \neq 0$ rovnice nemá řešení.

Lineární rovnice o dvou neznámých: $ax + by = c$

- jestliže $[a, b] \neq [0, 0]$, pak má v $\mathbf{R}^2$ nekonečně mnoho řešení [x, y], která při znázornění v kartézské soustavě souřadnic vyplní přímku (odtud název lineární rovnice).

Kořen rovnice (o jedné neznámé): číslo, které po dosazení do rovnice za proměnnou přemění rovnici v rovnost.
Obor řešení rovnice: množina, ve které hledáme kořeny dané rovnice.

Úpravy rovnic:

1. ***ekvivalentní***: úpravy, které změní rovnici „složitou“ na rovnici „jednodušší“, která má tutéž množinu kořenů jako rovnice původní – např.
   - záměna levé a pravé strany rovnice
   - přičtení (odečtení) téhož čísla příp. výrazu (definovaného v celém oboru proměnné) k oběma stranám rovnice
   - vynásobení (vydělení) obou stran rovnice stejným nenulovým číslem příp. výrazem, který je definován v celém oboru proměnné
2. ***důsledkové***: úpravy, které změní původní rovnici na novou, která však může mít více kořenů, než rovnice původní; proto je nutné provést na závěr zkoušku – např.
   - umocnění obou stran rovnice (není-li zajištěna nezápornost obou stran umocňované rovnice)

Úpravy nerovnic (analogicky);

Pozn.: Při násobení (dělení) obou stran ***nerovnice*** záporným výrazem se obrací znak nerovnosti.

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých: způsoby řešení:

1) sčítací
2) dosazovací
3) porovnávací
4) zavedením nové neznámé – užitím substituce
5) grafická

Soustava dvou nebo více nerovnic o dvou neznámých: Pro řešení se obvykle používá kombinace grafické a početní metody. Důležitý správný zápis množiny řešení.

Soustava n rovnic o n neznámých:

- řešení užitím matic - Gaussova eliminační metoda.

Základní poznatky:

Př. 1 Kde je chyba v důkazu, že 1 = 2?

$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$

$x \cdot (x-x) = (x + x) \cdot (x - x) \quad /: (x - x)$

$x = 2x \quad / :x$

$\underline{1 = 2}$!!!

Met.: Využít tuto úlohu jako důkaz nepřípustnosti úpravy rovnice dělením obou stran rovnice výrazem, který obsahuje neznámou (bez úvahy, že tento výraz se může rovnat nule).

Př. 2 Řešte v Z, určete obor řešení rovnice a definiční obor rovnice:

$$\frac{2(x-2)}{x-5} - \frac{6}{x-5} = 1 \qquad [\emptyset, Z, R - \{5\}]$$

Met.: Tato jednoduchá rovnice s neznámou ve jmenovateli skýtá ideální možnost, jak u studentů upevnit pochopení definičního oboru rovnice (na základě stanovení podmínek řešení) i oboru řešení rovnice.

Př. 3 Řešte v R: a) $\frac{3x-5}{4+6x} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{6x-9}{2x-3} = \frac{3x}{x}$ $[\emptyset, R - \{0; \frac{3}{2}\}]$

Met.: Studenty je třeba vést k optimálním metodám řešení základních úloh. V případě rovnic s neznámou ve jmenovateli by proto měli:

1) stanovit podmínky;
2) zbavit se zlomků vynásobením výrazy ve jmenovatelích;
3) vyřešit jednoduchou lineární rovnici. Pozn.: Každá z rovnic 2., 3a), 3b) vede k jinému typu závěru:

2. x = 5, to koliduje s podmínkou, proto K = Ø;

3a) 0.x = 14, proto K = Ø;

3b) 0.x = 0, proto x může být libovolné reálné číslo s výjimkou hodnot zakázaných podmínkami, proto K = R – {0; $\frac{3}{2}$}

Pozor!!! Studenti velmi často chybují v tom, že při stanovení výsledku rovnice nezohlední podmínky. Proto uvedou řešení příkladu 2 jako K = {5} a řešení příkladu 3b) jako K = R.

Typové příklady standardní náročnosti:

Př.4 Řešte v R, určete obor řešení rovnice a definiční obor rovnice:

a) $\frac{3(x+1)}{2} - (\frac{x+1}{4} + 1) = \frac{5x+1}{7} - (\frac{3x-1}{2} - 3)$ $\left[\frac{5}{3}, R, R\right]$

b) $\frac{11+3x}{x+3} - \frac{5x}{x-4} + \frac{x}{x^2-x-12} + 2 = 0$ $[-4, R, R - \{-3; 4\}]$

Met.: Definičním oborem rovnice 4a) je celá množina reálných čísel (jde o jednoduchou lineární rovnici).
Při řešení rovnice 4b) je však třeba nejprve stanovit podmínky (jde o rovnici s neznámou ve jmenovateli).
Hned prvním krokem vlastního řešení rovnice by pak rozhodně mělo být vynásobení obou stran rovnic jmenovateli a zbavení se zlomků. Studenti mívají z tohoto kroku velmi často nepochopitelnou obavu a mají tendenci převádět zlomky na společné jmenovatele, sčítat je, „kochat se“ „bobtnajícími“ čitateli a „vláčet“ zlomky postupem řešení co nejdál. Je třeba je této obavy zbavit.
Při určování výsledné množiny kořenů rovnice je třeba zohlednit podmínky!!!!

Př. 5 Řešte soustavu nerovnic: a) v R b) v Z c) v N

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x-4}{3} \geq 2x-1$$

$$2x - \frac{x-5}{3} > x-3$$

$[a) K = (-7,1\rangle, b) K = \{-6,-5,...,0,1\}, c) K = \{1\}]$

Met.: Obě nerovnice soustavy obsahují zlomky, v jejich jmenovatelích se ale nevyskytují výrazy s neznámou. V prvním kroku je proto možné se zlomků bez problémů zbavit a získat tím k řešení jednoduché lineární nerovnice. (Při řešení podobných úloh je třeba dát pozor jen na situaci, kdy bychom násobili obě strany některé nerovnice záporným reálným číslem, což by vedlo k „obrácení“ znaménka nerovnosti!!!!!)
Studenti zpravidla zvládnou bez problémů řešení soustavy nerovnic v R, ale mnohým z nich dělá značné problémy stanovit výslednou množinu řešení v případě, že je obor řešení omezen (např. v 5b) obor řešení je Z, nebo v 5c) obor řešení je N, apod.).

Př. 6 Řešte v R^2 graficky a výsledek zapište jako množinu kořenů:

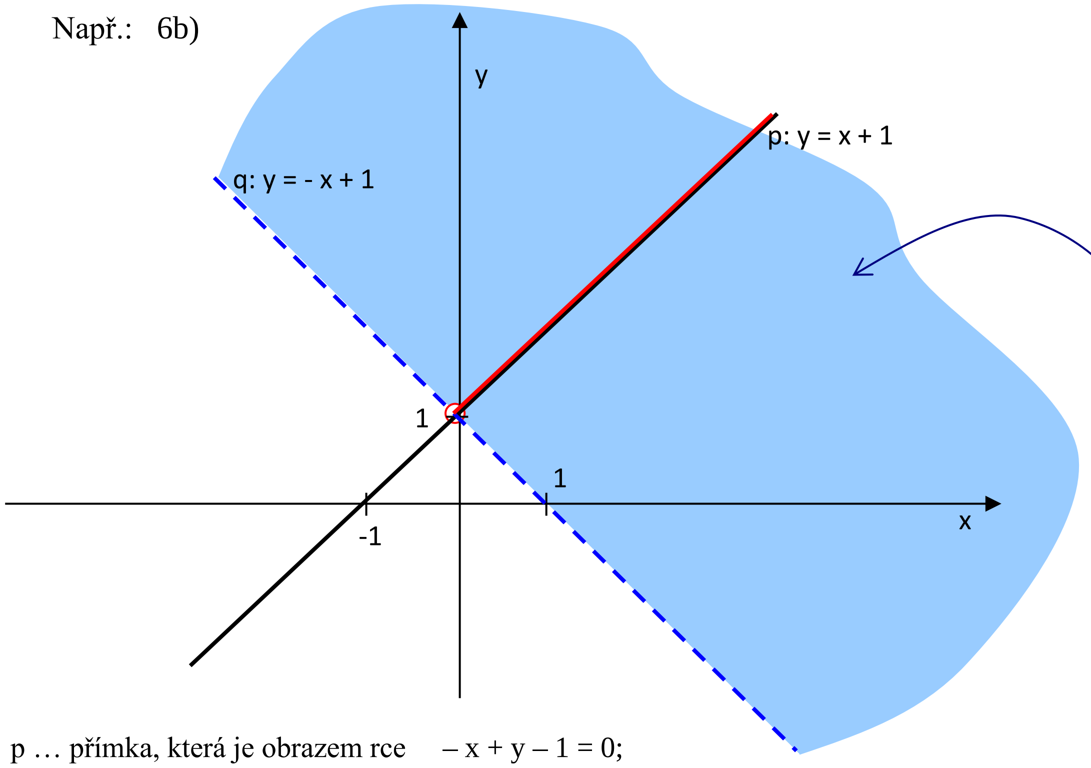
a) $x + y - 1 = 0$
$\underline{-x + y - 1 = 0}$ [K = {[0; 1] }]

b) $x + y - 1 > 0$
$\underline{-x + y - 1 = 0}$ [K = {[x, x+1] ϵ R x R; x ϵ (0,∞) }]

c) $x + y - 1 > 0$
$\underline{-x + y - 1 \leq 0}$ [K = {[x, y] ϵ R x R; x ϵ (0,∞) ∧ y ϵ (1-x, 1+x⟩ }]

Met.: Řešit soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých čistě graficky znamená použít zřejmě nejhorší z možných metod řešení. Jednak je ve srovnání s ostatními (početními) metodami časově náročnější, jednak vyžaduje co nejpřesnější narýsování přímek, které jsou obrazem jednotlivých rovnic, a nakonec je výsledné řešení stejně jen odhadem zatíženým menší či větší chybou.
Použití grafické metody řešení doplněné drobnými výpočty ale dokáže úžasně zjednodušit řešení soustavy několika lineárních nerovnic (příp. rovnic a nerovnic) o dvou neznámých.

Např.: 6b)



p … přímka, která je obrazem rce $-x + y - 1 = 0$;

q … hraniční přímka vnitřku poloroviny $x + y - 1 > 0$. Musíme rozhodnout, která z polorovin je obrazem nerce $x + y - 1 > 0$.

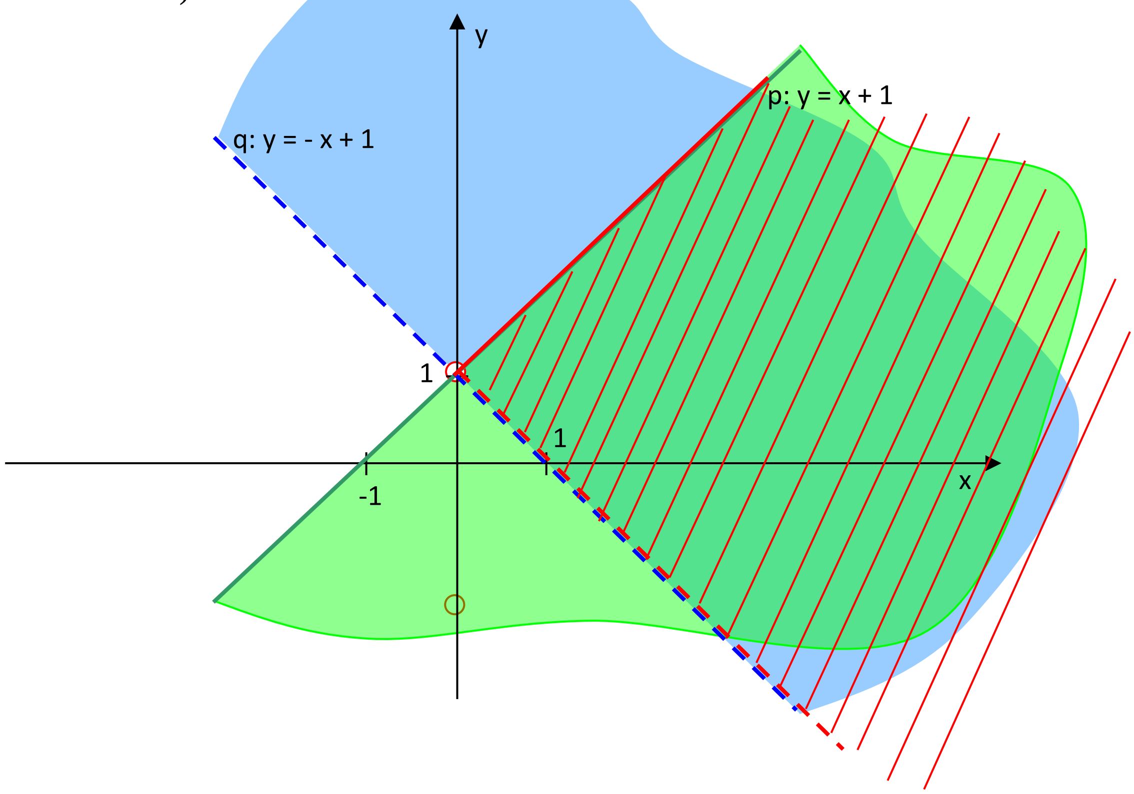
Zkusíme dosadit některý bod neležící na hraniční přímce …. [0; 0]

$0 + 0 - 1 > 0$ …. evidentně neplatí $\rightarrow$ [0; 0] neleží ve “správné” polorovině. Obrazem nerce $x + y - 1 > 0$ je tedy vnitřek poloroviny s hraniční přímkou q, která neobsahuje bod [0; 0].

Průnikem přímky p a vnitřku “správné” poloroviny s hraniční přímkou q je vnitřek polopřímky (vyznačen červeně) s krajním bodem [0; 1] (souřadnice tohoto bodu získáme *výpočtem* jako průsečík přímek p a q).

Odsud získáme snadno zápis množiny řešení: $K = \{[x; y] \in RxR: x > 0 \wedge y = x + 1\}$.

Podobně: 6c)



p … hraniční přímka poloroviny, která je obrazem nerce $-x + y - 1 \le 0$;

q … hraniční přímka vnitřku poloroviny, která je obrazem nerce $x + y - 1 > 0$.

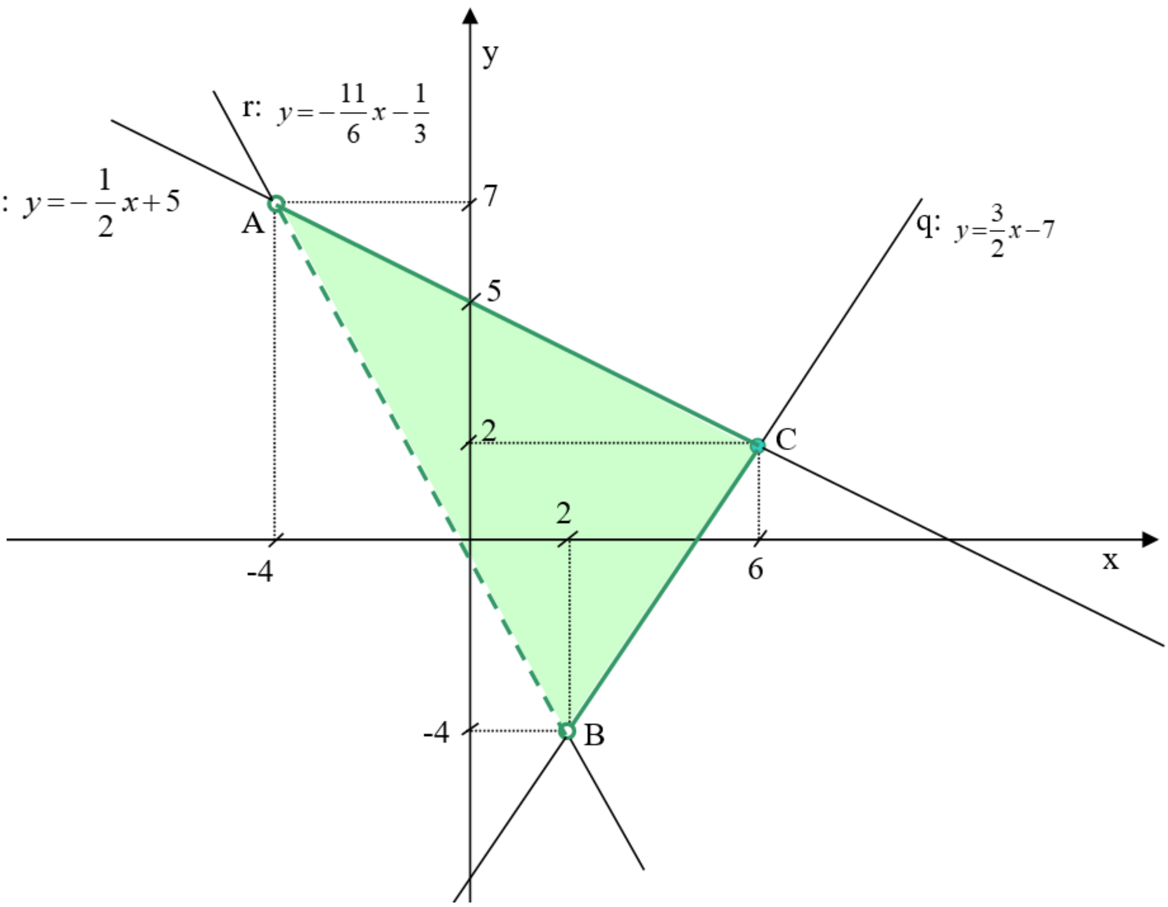
Výběr „správných“ polorovin provedeme opět pomocí některého vnitřního bodu (tedy bodu neležícího na hraniční přímce). I tady bude vhodný bod [0; 0].

Průnik polorovin je obrazem výsledného řešení a je vyznačen červeně. Odsud opět snadno zapíšeme:

$$K = \{[x; y] \in R x R : x > 0 \wedge y \in (-x+1; x+1\rangle\}$$

Ještě jedna úloha důležitá pro to, aby se studenti ze získaného obrazu množiny řešení soustavy nerovnic (získat tento obraz se studenti naučí zpravidla velmi snadno) naučili číst a zapisovat tuto množinu (tento úkol dělá studentům velmi často značné problémy):

Př. „navíc“:



Nechť ΔABC na obrázku je obrazem řešení soustavy nerovnic: $x + 2y - 10 \le 0$

$3x - 2y - 14 \le 0$

$11x + 6y + 2 > 0$.

Zapište tuto množinu řešení soustavy nerovnic.

Řeš.: Jedna z možností zápisu odpovídá rozdělení plochy ΔABC na dvě části přímkou vedenou bodem B kolmo na osu x. Hledaná množina pak obsahuje všechny uspořádané dvojice [x; y], pro něž platí:

1) Je-li $-4 < x \le 2$, pak y musí odpovídat poloze „mezi přímkami r a p“, tozn., že $-\frac{11}{6}x - \frac{1}{3} < y \le -\frac{1}{2}x + 5$

2) Je-li $2 < x \le 6$, pak y musí odpovídat poloze „mezi přímkami q a p“, tozn., že $\frac{3}{2}x - 7 \le y \le -\frac{1}{2}x + 5$.

Proto K=$\left\{[x; y] \in RxR: \left(x \in (-4; 2\rangle \wedge y \in \left(-\frac{11}{6}x - \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}x + 5\right\rangle\right) \vee \left(x \in (2; 6\rangle \wedge y \in \left\langle\frac{3}{2}x - 7; -\frac{1}{2}x + 5\right\rangle\right)\right\}$

Př. 7 Řešte v R^3: a) $2x - 6z = -20$, $-5x + 6y = -7$, $2y - 5z = 8$ b) $x + 2y + 3z = 4$, $2x + 3y + 4z = 5$, $3x + 4y + 5z = 6$

$$\begin{aligned} 2x - 6z &= -20 \\ -5x + 6y &= -7 \\ 2y - 5z &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 3x + 4y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

[a) ∅, b) {[z – 2, 3 – 2z, z], z ϵ R}]

1) Met.: Zpravidla nejvhodnější metoda řešení je v případě soustavy většího počtu rovnic o odpovídajícím počtu neznámých Gaussova eliminační metoda.

Př. 8 Řešte v R^2:

$$\frac{10}{x+5} + \frac{1}{y+2} = 1$$

$$\frac{25}{x+5} - \frac{2}{y+2} = 1$$

[K = {[10; 1]}]

Met.: Studenti si většinou všimnou stejných jmenovatelů a napadne je použít při řešení substituční metodu. Ale mnoho z nich označí např. x + 5 = a, y + 2 = b. To ovšem řešení příliš nezjednoduší. Je třeba diskusí o možnostech substituce navést je na to, aby nahradili „maximální možné“ výrazy – v této úloze konkrétně $a = \frac{1}{x+5}$, $b = \frac{1}{y+2}$, případně $a = \frac{5}{x+5}$, $b = \frac{1}{y+2}$. Sice se pak musí řešit dvě soustavy rovnic, první s neznámými a, b, druhá pak se zadanými neznámými x, y. Tyto soustavy jsou však už velmi jednoduché.
Pozn.: Nezapomínat na podmínky!!!!

Př. 9 Řešte v R^4:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 9 \\ y + 2z + u &= -3 \\ 3x - z + 2u &= 1 \\ x - y - u &= 0 \end{aligned}$$

[K = {[1;3; -2;-2]}]

Met.: Gaussova eliminační metoda

Př.10 Smísí-li se 5 kg kávy dražší a 10 kg lacinější, stojí 1 kg směsi 220 Kč. Kolik stojí 1 kg dražší kávy a 1 kg lacinější kávy, jestliže se jejich ceny liší od 30 Kč? [240,210]

Př. 11 Sud s vodou měl hmotnost 64 kg. Když se z něho 1. den spotřebovalo 28 % vody a 2. den třetina zbytku, vážil pouze 38 kg. Kolik kg váží prázdný sud a kolik kg vody v něm bylo původně? [14,50]

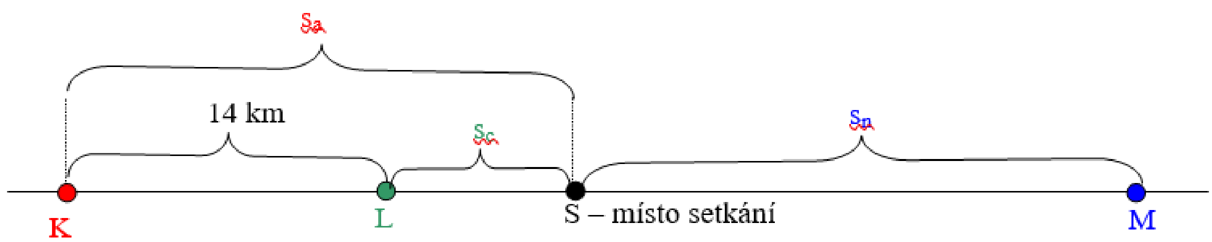
Met.: Slovních úloh se studenti většinou velmi obávají. Je třeba naučit je důkladně a soustředěně pročítat text každé úlohy, snažit se dokonale pochopit podstatu každého řešeného problému, ujasnit si, které veličiny jsou „neznámé“, jako takové je řádně označit a pojmenovat a pomáhat si při sestavování rovnic přehlednými zápisy, náčrty, obrázky, tabulkami, …

Př. 12 Města K, L, M leží za sebou na téže silnici. |KL| = 14 km. V 13.00 vyjel z L směrem k M cyklista rychlostí 12 km/h, v 14.10 z K směrem k M osobní auto rychlostí 68 km/h., v 14.20 z M směrem k L nákladní auto rychlostí 45 km/h. Všichni se setkali ve stejném okamžiku na silnici.
a) V kolik hodin? b) Jak daleko od L to bylo? c) |LM|=?

[14.40, 20 km, 35 km]

Met.: Řešení úloh o pohybu je nutné postavit na precizním náčrtu situace.
Pozn,: Pokud se tělesa v úloze pohybují různou dobu, je vhodné nejkratší dobu označit t, ostatní doby pak vyjádřit pomocí t.

a) t – ? b) $|LS| = s_c$ –? c) $|LM|$ –?



osobní auto
14:10 h
$v_a = 68\,\frac{km}{h}$
$t_a = \left(t + \frac{7}{6}\right) h$
$s_a = v_a . t_a$

cyklista
13:00 h
$v_c = 12\,\frac{km}{h}$
$t_c = \left(t + \frac{4}{3}\right) h$
$s_c = v_c . t_c$

nákladní auto
14:20 h
$v_n = 45\,\frac{km}{h}$
$t_n = t$
$s_n = v_n . t_n$

Rovnice:

a) $|KS| = |KL| + |LS|$

$s_a = 14 + s_c$

$68\left(t + \frac{7}{6}\right) = 14 + 12\left(t + \frac{4}{3}\right)$

…………………

$t = \frac{1}{3}\,h = 20$ min … 14:40 h

b) $|LS| = 12\left(t + \frac{4}{3}\right)$

$|LS| = 12\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) km = 20\ km$

c) $|LM| = |LS| + |SM|$

$|LM| = s_c + s_n$

$|LM| = 12\left(t + \frac{4}{3}\right) + 45.t$

$|LM| = \left(12\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) + 15\right) km = 35\ km$