

04 Lineární rovnice a nerovnice, jejich soustavy – met.

Stručný přehled teorie

Met.: Je velmi důležité studentům vysvětlit základní pojmy a metody související s řešením různých typů rovnic, nerovnic a jejich soustav (podle uvážení něco hned na začátku, něco v průběhu probírání).

- Rovnice, kořen rovnice, definiční obor rovnice, obor řešení rovnice, nerovnice, kořen nerovnice, definiční obor nerovnice, obor řešení nerovnice.
- Ekvivalentní a důsledkové (implikační) úpravy při řešení rovnic.
- Ekvivalentní úpravy při řešení nerovnic.
- Řešení různých typů lineárních rovnic (jednoduché lineární rovnice, lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli zlomku) a lineárních nerovnic.
- Řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých početně různými metodami (dosazovací, sčítací, porovnávací, substituční) a graficky.
- Řešení soustavy n rovnic o n neznámých (užití matic při řešení, Gaussova eliminační metoda).
- Grafické řešení soustavy nerovnic o dvou neznámých a zápis množiny řešení.
- Užití rovnic a nerovnic při řešení slovních úloh.

Lineární rovnice: lineární rovnicí s n neznámými (x_1, x_2, \dots, x_n) nazýváme rovnici tvaru:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \text{ kde } a_i, b \in \mathbf{R} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(analogicky: lin. nerovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n < b,$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b,$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n > b)$$

Lineární rovnice o jedné neznámé: $ax = b$

- je-li $a \neq 0$, má rovnice právě jedno řešení;
je-li $a = 0$, pak pro $b = 0$ je řešením rovnice každé reálné číslo (nekonečně mnoho řešení)
a pro $b \neq 0$ rovnice nemá řešení.

Lineární rovnice o dvou neznámých: $ax + by = c$

- jestliže $[a, b] \neq [0, 0]$, pak má v \mathbf{R}^2 nekonečně mnoho řešení $[x, y]$, která při znázornění v kartézské soustavě souřadnic vyplní přímku (odtud název lineární rovnice).

Kořen rovnice (o jedné neznámé): číslo, které po dosazení do rovnice za proměnnou přemění rovnici v rovnost.

Obor řešení rovnice: množina, ve které hledáme kořeny dané rovnice.

Úpravy rovnic:

1. **ekvivalentní:** úpravy, které změň rovnici „složitou“ na rovnici „jednodušší“, která má tutěž množinu kořenů jako rovnice původní – např.
 - záměna levé a pravé strany rovnice
 - přičtení (odečtení) téhož čísla příp. výrazu (definovaného v celém oboru proměnné) k oběma stranám rovnice
 - vynásobení (vydělení) obou stran rovnice stejným nenulovým číslem příp. výrazem, který je definován v celém oboru proměnné
2. **důsledkové:** úpravy, které změň původní rovnici na novou, která však může mít více kořenů, než rovnice původní; proto je nutné provést na závěr zkoušku – např.
 - umocnění obou stran rovnice (není-li zajištěna nezápornost obou stran umocňované rovnice)

Úpravy nerovnic (analogicky);

Pozn.: Při násobení (dělení) obou stran **nerovnice** záporným výrazem se obrací znak nerovnosti.

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých: způsoby řešení:

- 1) sčítací
- 2) dosazovací
- 3) porovnávací
- 4) zavedením nové neznámé – užitím substituce
- 5) grafická

Soustava dvou nebo více nerovnic o dvou neznámých: Pro řešení se obvykle používá kombinace grafické a početní metody. Důležitý správný zápis množiny řešení.

Soustava n rovnic o n neznámých:

- řešení užitím matic - Gaussova eliminační metoda.
-

Základní poznatky:

Př. 1 Kde je chyba v důkazu, že $1 = 2$?

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$

$$x \cdot (x-x) = (x+x) \cdot (x-x) \quad /: (x-x)$$

$$x = 2x \quad /:x$$

$$1 = 2 \quad !!!$$

Met.: Využít tuto úlohu jako důkaz nepřipustnosti úpravy rovnice dělením obou stran rovnice výrazem, který obsahuje neznámou (bez úvahy, že tento výraz se může rovnat nule).

Př. 2 Řešte v \mathbb{Z} , určete obor řešení rovnice a definiční obor rovnice:

$$\frac{2(x-2)}{x-5} - \frac{6}{x-5} = 1$$

$$[\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{R} - \{5\}]$$

Met.: Tato jednoduchá rovnice s neznámou ve jmenovateli skýtá ideální možnost, jak u studentů upevnit pochopení definičního oboru rovnice (na základě stanovení podmínek řešení) i oboru řešení rovnice.

Př. 3 Řešte v \mathbb{R} : a) $\frac{3x-5}{4+6x} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{6x-9}{2x-3} = \frac{3x}{x}$ $[\emptyset, \mathbb{R} - \{0; \frac{3}{2}\}]$

Met.: Studenty je třeba vést k optimálním metodám řešení základních úloh. V případě rovnic s neznámou ve jmenovateli by proto měli:

- 1) stanovit podmínky;
- 2) zbavit se zlomků vynásobením výrazy ve jmenovateli;
- 3) vyřešit jednoduchou lineární rovnici. Pozn.: Každá z rovnic 2., 3a), 3b) vede k jinému typu závěru:

2. $x = 5$, to koliduje s podmínkou, proto $K = \emptyset$;

3a) $0 \cdot x = 14$, proto $K = \emptyset$;

3b) $0 \cdot x = 0$, proto x může být libovolné reálné číslo s výjimkou hodnot zakázaných

podmínkami, proto $K = \mathbb{R} - \{0; \frac{3}{2}\}$

Pozor!!! Studenti velmi často chybují v tom, že při stanovení výsledku rovnice nezohlední podmínky. Proto uvedou řešení příkladu 2 jako $K = \{5\}$ a řešení příkladu 3b) jako $K = \mathbb{R}$.

Typové příklady standardní náročnosti:

Př. 4 Řešte v \mathbb{R} , určete obor řešení rovnice a definiční obor rovnice:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{3(x+1)}{2} - \left(\frac{x+1}{4} + 1\right) = \frac{5x+1}{7} - \left(\frac{3x-1}{2} - 3\right) & \left[\frac{5}{3}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\right] \\ \text{b)} & \frac{11+3x}{x+3} - \frac{5x}{x-4} + \frac{x}{x^2-x-12} + 2 = 0 & [-4, \mathbb{R}, \mathbb{R} - \{-3; 4\}] \end{array}$$

Met.: Definičním oborem rovnice 4a) je celá množina reálných čísel (jde o jednoduchou lineární rovnici).

Při řešení rovnice 4b) je však třeba nejprve stanovit podmínky (jde o rovnici s neznámou ve jmenovateli).

Hned **prvním krokem** vlastního řešení rovnice by pak rozhodně mělo být vynásobení obou stran rovnic jmenovateli a **zbavení se zlomků**. Studenti mívají z tohoto kroku velmi často nepochopitelnou obavu a mají tendenci převádět zlomky na společné jmenovatele, sčítat je, „kochat se“ „bobtnajícími“ čitateli a „vláčet“ zlomky postupem řešení co nejdál. Je třeba je této obavy zbavit.

Při určování výsledné **množiny kořenů** rovnice je třeba **zohlednit podmínky!!!!**

Př. 5 Řešte soustavu nerovnic: a) v \mathbb{R} b) v \mathbb{Z} c) v \mathbb{N}

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x-4}{3} \geq 2x-1$$

$$2x - \frac{x-5}{3} > x-3 \quad [a) K = (-7, 1), b) K = \{-6, -5, \dots, 0, 1\}, c) K = \{1\}]$$

Met.: Obě nerovnice soustavy obsahují zlomky, v jejich jmenovatelích se ale nevyskytují výrazy s neznámou. V prvním kroku je proto možné se zlomků bez problémů zbavit a získat tím k řešení jednoduché lineární nerovnice. (Při řešení podobných úloh je třeba dát pozor jen na situaci, kdy bychom násobili obě strany některé nerovnice záporným reálným číslem, což by vedlo k „obrácení“ znaménka nerovnosti!!!!)

Studenti zpravidla zvládnou bez problémů řešení soustavy nerovnic v \mathbb{R} , ale mnohým z nich dělá značné problémy stanovit výslednou množinu řešení v případě, že je obor řešení omezen (např. v 5b) obor řešení je \mathbb{Z} , nebo v 5c) obor řešení je \mathbb{N} , apod.).

Př. 6 Řešte v \mathbb{R}^2 graficky a výsledek zapište jako množinu kořenů:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ \underline{-x + y - 1 = 0} \end{array} & [K = \{[0; 1]\}] \end{array}$$

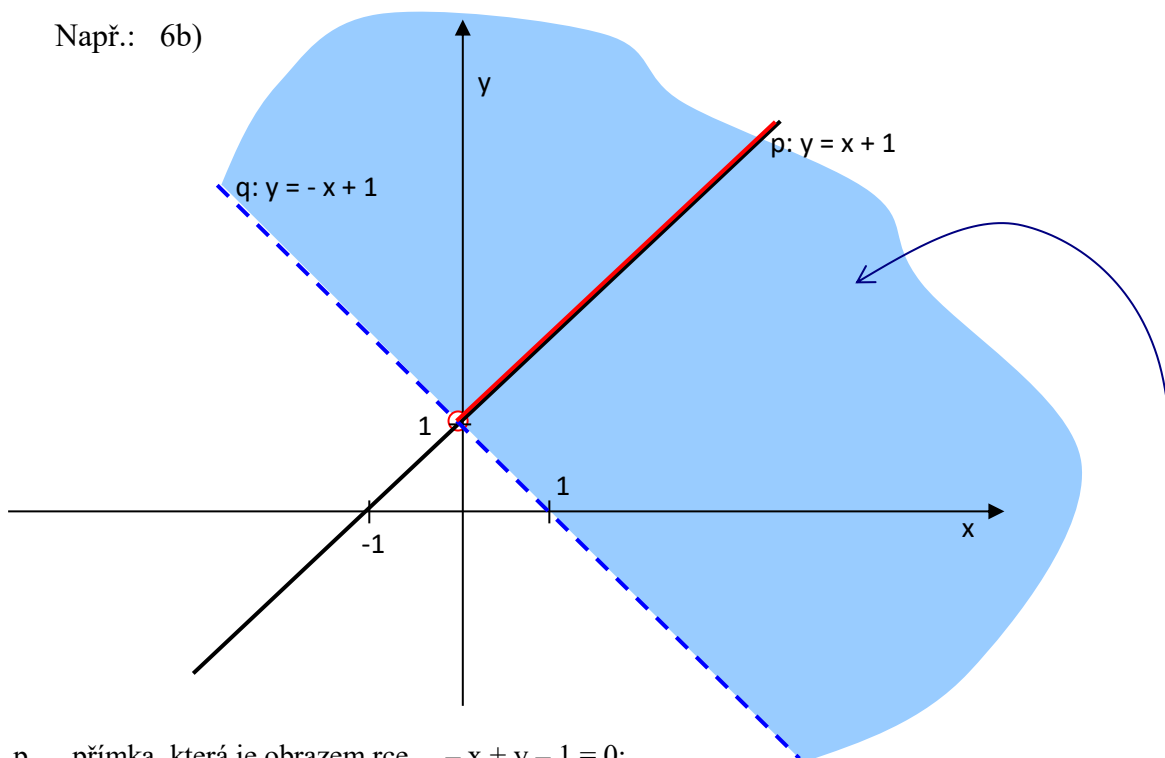
$$\begin{array}{ll} \text{b)} & \begin{array}{l} x + y - 1 > 0 \\ \underline{-x + y - 1 = 0} \end{array} & [K = \{[x, x+1] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \in (0, \infty)\}] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & \begin{array}{l} x + y - 1 > 0 \\ \underline{-x + y - 1 \leq 0} \end{array} & [K = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \in (0, \infty) \wedge y \in (1-x, 1+x)\}] \end{array}$$

Met.: Řešit soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých čistě graficky znamená použít zřejmě nejhorší z možných metod řešení. Jednak je ve srovnání s ostatními (početními) metodami časově náročnější, jednak vyžaduje co nejpřesnější narýsování přímk, které jsou obrazem jednotlivých rovnic, a nakonec je výsledné řešení stejně jen odhadem zatíženým menší či větší chybou.

Použití grafické metody řešení doplněné drobnými výpočty ale dokáže úžasně zjednodušit řešení soustavy několika lineárních rovnic (příp. rovnic a nerovnic) o dvou neznámých.

Např.: 6b)



p ... přímka, která je obrazem rce $-x + y - 1 = 0$;

q ... hraniční přímka vnitřku poloroviny $x + y - 1 > 0$. Musíme rozhodnout, která z polorovin je obrazem nerce $x + y - 1 > 0$.

Zkusíme dosadit některý bod neležící na hraniční přímce $[0; 0]$

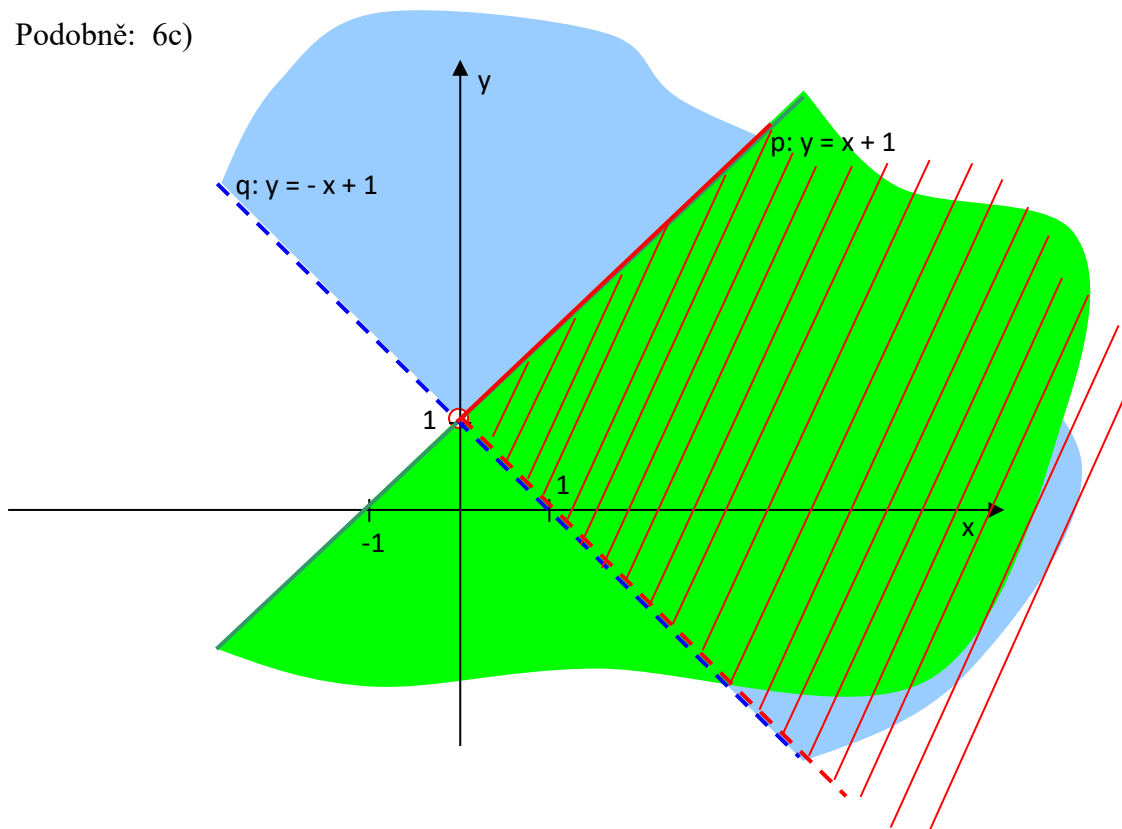
$0 + 0 - 1 > 0$ evidentně neplatí $\rightarrow [0; 0]$ neleží ve "správné" polorovině. Obrazem nerce $x + y - 1 > 0$ je tedy vnitřek poloroviny s hraniční přímkou q, která neobsahuje bod $[0; 0]$.

Průnikem přímky p a vnitřku "správné" poloroviny s hraniční přímkou q je vnitřek polopřímky (vyznačen červeně) s krajním bodem $[0; 1]$ (souřadnice tohoto bodu získáme výpočtem jako průsečík přímek p a q).

Odsud získáme snadno zápis množiny řešení:

$$K = \{[x; y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x > 0 \wedge y = x + 1\}.$$

Podobně: 6c)



p ... hraniční přímka poloroviny, která je obrazem nerce $-x + y - 1 \leq 0$;

q ... hraniční přímka vnitřku poloroviny, která je obrazem nerce $x + y - 1 > 0$.

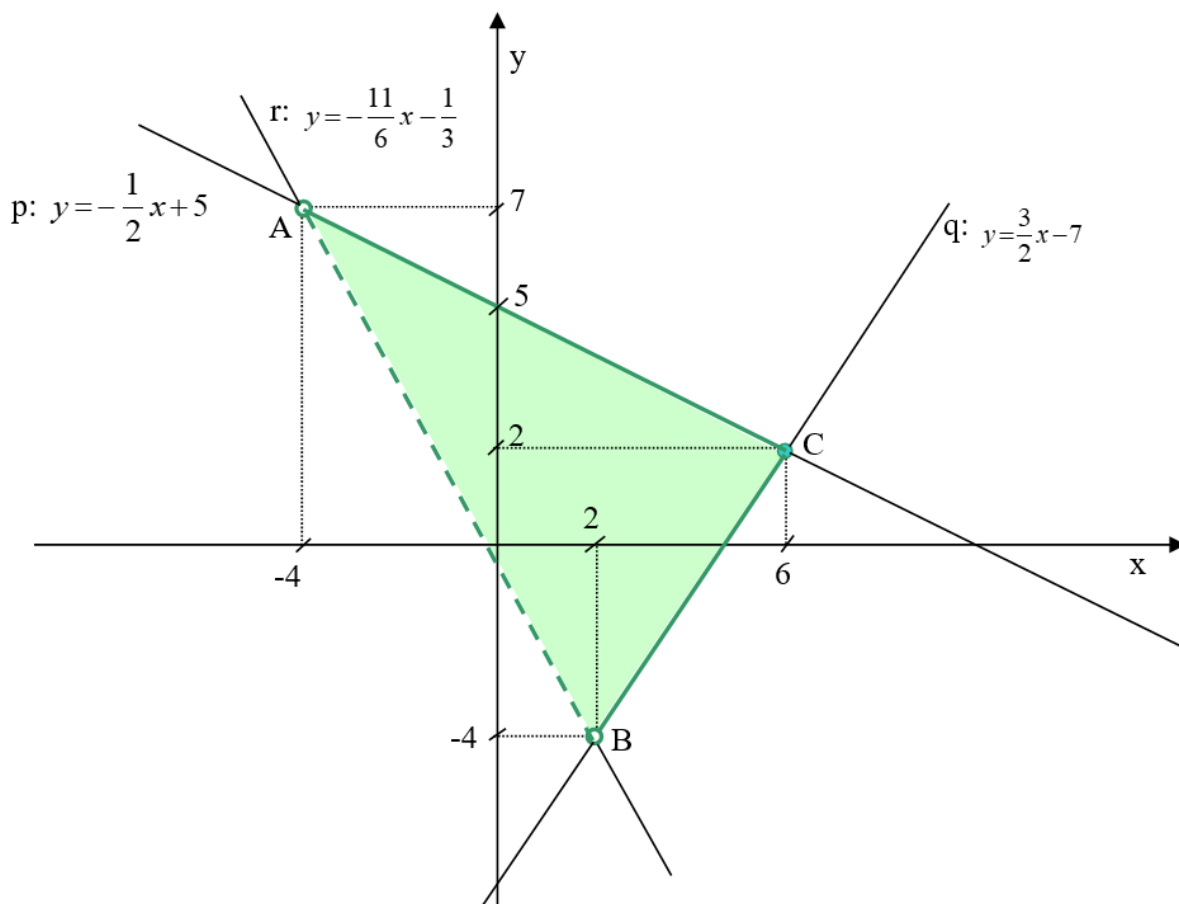
Výběr „správných“ polorovin provedeme opět pomocí některého vnitřního bodu (tedy bodu neležícího na hraniční přímce). I tady bude vhodný bod $[0; 0]$.

Průnik polorovin je obrazem výsledného řešení a je vyznačen červeně. Odsud opět snadno zapíšeme:

$$K = \{[x; y] \in R \times R : x > 0 \wedge y \in (-x+1; x+1)\}$$

Ještě jedna úloha důležitá pro to, aby se studenti ze získaného obrazu množiny řešení soustavy nerovnic (získat tento obraz se studenti naučí zpravidla velmi snadno) naučili číst a zapisovat tuto množinu (tento úkol dělá studentům velmi často značné problémy):

Př. „navíc“:



Nechť ΔABC na obrázku je obrazem řešení soustavy nerovnic: $x + 2y - 10 \leq 0$
 $3x - 2y - 14 \leq 0$
 $11x + 6y + 2 > 0$.

Zapište tuto množinu řešení soustavy nerovnic.

Řeš.: Jedna z možností zápisu odpovídá rozdělení plochy ΔABC na dvě části přímkou vedenou bodem B kolmo na osu x. Hledaná množina pak obsahuje všechny uspořádané dvojice $[x; y]$, pro něž platí:

1) Je-li $-4 < x \leq 2$, pak y musí odpovídat poloze „mezi přímkami r a p“, tozn., že $-\frac{11}{6}x - \frac{1}{3} < y \leq -\frac{1}{2}x + 5$

2) Je-li $2 < x \leq 6$, pak y musí odpovídat poloze „mezi přímkami q a p“, tozn., že $\frac{3}{2}x - 7 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 5$.

Proto $K = \{[x; y] \in R \times R : (x \in (-4; 2) \wedge y \in (-\frac{11}{6}x - \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}x + 5)) \vee (x \in (2; 6) \wedge y \in (\frac{3}{2}x - 7; -\frac{1}{2}x + 5))\}$

Př. 7 Řešte v \mathbb{R}^3 :

<p>a) $2x - 6z = -20$ $-5x + 6y = -7$ $\underline{2y - 5z = 8}$</p>	<p>b) $x + 2y + 3z = 4$ $2x + 3y + 4z = 5$ $\underline{3x + 4y + 5z = 6}$ [a) \emptyset, b) $\{[z - 2, 3 - 2z, z], z \in \mathbb{R}\}$]</p>
--	---

1) **Met.:** Zpravidla nejvhodnější metoda řešení je v případě soustavy většího počtu rovnic o odpovídajícím počtu neznámých Gaussova eliminační metoda.

Př. 8 Řešte v \mathbb{R}^2 :

$$\frac{10}{x+5} + \frac{1}{y+2} = 1$$

$$\frac{25}{x+5} - \frac{2}{y+2} = 1$$

[K = {[10; 1]}]

Met.: Studenti si většinou všimnou stejných jmenovatelů a napadne je použít při řešení substituční metodu. Ale mnoho z nich označí např. $x + 5 = a$, $y + 2 = b$. To ovšem řešení příliš nezjednoduší. Je třeba diskutovat o možnostech substituce navést je na to, aby nahradili „maximální možné“ výrazy – v této úloze konkrétně $a = \frac{1}{x+5}$, $b = \frac{1}{y+2}$, případně $a = \frac{5}{x+5}$, $b = \frac{1}{y+2}$. Sice se pak musí řešit dvě soustavy rovnic, první s neznámými a, b , druhá pak se zadanými neznámými x, y . Tyto soustavy jsou však už velmi jednoduché.

Pozn.: Nezapomínat na podmínky!!!!

Př. 9 Řešte v \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 9 \\ y + 2z + u &= -3 \\ 3x - z + 2u &= 1 \\ \underline{x - y - u} &= 0 \end{aligned}$$

[K = {[1;3; -2;-2]}]

Met.: Gaussova eliminační metoda

Př. 10 Smísí-li se 5 kg kávy dražší a 10 kg lacinější, stojí 1 kg směsi 220 Kč. Kolik stojí 1 kg dražší kávy a 1 kg lacinější kávy, jestliže se jejich ceny liší od 30 Kč? [240,210]

Př. 11 Sud s vodou měl hmotnost 64 kg. Když se z něho 1. den spotřebovalo 28 % vody a 2. den třetina zbytku, vážil pouze 38 kg. Kolik kg váží prázdný sud a kolik kg vody v něm bylo původně? [14,50]

Met.: Slovníků úloh se studenti většinou velmi obávají. Je třeba naučit je důkladně a soustředěně pročítat text každé úlohy, snažit se dokonale pochopit podstatu každého řešeného problému, ujasnit si, které veličiny jsou „neznámé“, jako takové je řádně označit a pojmenovat a pomáhat si při sestavování rovnic přehlednými zápisy, náčrtky, obrázky, tabulkami, ...

Rozšiřující cvičení

Př. 12 Města K, L, M leží za sebou na téže silnici. $|KL| = 14$ km. V 13.00 vyjel z L směrem k M cyklista rychlostí 12 km/h, v 14.10 z K směrem k M osobní auto rychlostí 68 km/h., v 14.20 z M směrem k L nákladní auto rychlostí 45 km/h. Všichni se setkali ve stejném okamžiku na silnici.

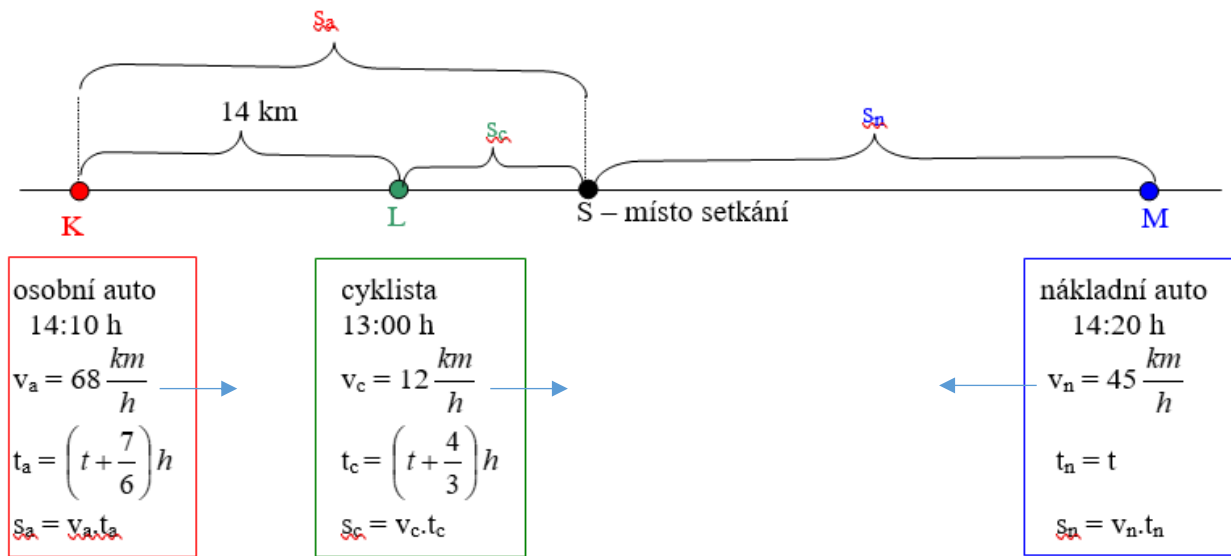
- a) V kolik hodin? b) Jak daleko od L to bylo? c) $|LM|=?$

[14.40, 20 km, 35 km]

Met.: Řešení úloh o pohybu je nutné postavit na precizním náčrtu situace.

Pozn.: Pokud se tělesa v úloze pohybují různou dobu, je vhodné nejkratší dobu označit t , ostatní doby pak vyjádřit pomocí t .

- a) $t = ?$ b) $|LS| = s_c = ?$ c) $|LM| = ?$



Rovnice:

<p>a) $KS = KL + LS$</p> $s_a = 14 + s_c$ $68 \cdot \left(t + \frac{7}{6} \right) = 14 + 12 \cdot \left(t + \frac{4}{3} \right)$ <p style="text-align: center;">.....</p> $t = \frac{1}{3} h = 20 \text{ min} \quad \dots \quad 14:40 \text{ h}$	<p>b) $LS = 12 \cdot \left(t + \frac{4}{3} \right)$</p> $ LS = 12 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \right) km = 20 km$	<p>c) $LM = LS + SM$</p> $ LM = s_c + s_n$ $ LM = 12 \cdot \left(t + \frac{4}{3} \right) + 45 \cdot t$ $ LM = \left(12 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \right) + 15 \right) km = 35 km$
---	--	---