05 Kvadratická rovnice, vztahy mezi kořeny a koeficienty – met.

Stručný přehled teorie

Kvadratickou rovnicí rozumíme rovnici tvaru $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, kde $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$.

x je *neznámá*
ax² je *kvadratický člen* (**a** je koeficient kvadratického členu)
bx je *lineární člen* (**b** je koeficient lineárního členu)
c je *absolutní člen*

Řešení kvadratické rovnice:

- **Neúplná či jinak „jednoduchá“ kvadratická rovnice:**

a) bez absolutního členu … $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

Řeš.: $x.(ax + b) = 0$

$$x = 0 \ \vee \ x = -\frac{b}{a}$$

$$\mathrm{K} = \left\{0; -\frac{b}{a}\right\}$$

b) bez lineárního členu … $\boxed{ax^2 + c = 0}$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \left(-\frac{c}{a} \geq 0\right)$$

$$\mathrm{K} = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}; \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$$

c) kvadratický trojčlen na levé straně lze zpaměti rozložit na součin kořenových činitelů

$\boxed{x^2 + bx + c = 0}$

Řeš.: $(x - r).\,(x - s) = 0$

$\mathrm{K} = \{r;\ s\}$

- **Úplná (obecná) kvadratická rovnice:** $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

Kořeny určíme podle vzorce $\boxed{x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Výraz $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ se nazývá ***diskriminant*** (značíme ho D).

• Je-li D > 0, má kvadratická rovnice v **R** dva různé kořeny;
• Je-li D = 0, má kvadratická rovnice v **R** jeden, tzv. *dvojnásobný,* kořen;
• Je-li D < 0, nemá kvadratická rovnice v **R** žádný kořen, v množině **C** (komplexních čísel) má dva komplexně sdružené kořeny.

Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice – *Vietovy vzorce* :

- Pro kvadratickou rovnici tvaru $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ a její kořeny ***r, s*** platí:

$$r + s = -\frac{b}{a}; \qquad r.s = \frac{c}{a}$$

- Pro kvadratickou rovnici v normovaném tvaru, tedy $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$ a její kořeny ***r, s*** platí:

$$r + s = -p; \qquad r.s = q$$

Met.: Kvadratické rovnice se ve středoškolské matematice vyskytují velice často a je nezbytné, aby s nimi studenti dokázali vždy pracovat bez váhání, chyb, optimálními metodami. Neúplné kvadratické rovnice, případně tak jednoduché, u nichž kořenové činitele lze určit zpaměti, by měli studenti řešit rychle, obratně, bez použití vzorce s diskriminantem. Procvičování těchto jednoduchých rovnic by se rozhodně měla zpočátku věnovat aspoň jedna vyučovací hodina. Teprve pak by se měly řešit rovnice vyžadující vzorec s diskriminantem.

Základní poznatky:

Př. 1 Zjednodušte výraz:

$\frac{2x^2+x-10}{3x^2-7x+2}$ $\left[\frac{2x+5}{3x-1}; x \neq 2, x \neq \frac{1}{3}\right]$

Met.: Nejčastější chyby, kterých se studenti dopouštějí při řešení podobných úloh:

- studenti najdou kořeny kvadratických trojčlenů v čitateli i ve jmenovateli, aby je mohli zapsat jako součiny kořenových činitelů. Při tomto zápisu ale mnozí zapomenou do součinu zahrnout koeficienty při kvadratických členech;
- někteří studenti buď zcela zapomenou uvést podmínky, za kterých má upravovaný výraz smysl, nebo uvedou podmínky neúplné – získané z upraveného, nikoliv zadaného, výrazu

Př. 2 Řešte v $\mathbb{R}$:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ $\left[K = \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}\right]$

b) $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x}$ $\left[K = \left\{-\frac{5}{4}; 1\right\}\right]$

c) $1 + \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ $\left[K = \{1\}\right]$

Met.: Studenty je třeba vést k optimálním metodám řešení základních úloh. V případě rovnic s neznámou ve jmenovateli by proto měli:

1) stanovit podmínky;
2) zbavit se zlomků vynásobením výrazy ve jmenovatelích;
3) vyřešit jednoduchou kvadratickou rovnici;
4) při stanovení výsledné množiny kořenů je nutné zohlednit podmínky.

Typové příklady standardní náročnosti

Př. 3 Řešte v $\mathbb{R}$:

a) $(x^2+x+1)\cdot(x^2+x+2)-12=0$ $\left[K = \{1; -2\}\right]$

b) $(x^2+3x)^2+16(-x^2-3x)-36=0$ $\left[K = \{-6; -2; -1; 3\}\right]$

c) $\frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{(x-1)!}{2!(x-3)!} = 16$ $\left[K = \{5\}\right]$

Met.: - První reakcí většiny studentů na úlohy je roznásobení závorek (př, 3a), případně umocnění dvojčlenu (př. 3b). Studenti si samozřejmě brzy uvědomí, že získané rovnice čtvrtého stupně jsou nad jejich síly. Než ztrácet čas tímto nevhodným řešením, je lepší prodiskutovat možnosti postupu s celou třídou a navést je (většinou to některé z nich napadne) na použití substituce (např, v 3a označit $x^2 + x + 1 = a$, $x^2 + x + 2 = a + 1$;
v 3b označit $x^2 + 3x = a$, $-x^2 - 3x = -a$).

- Úloha 3c) je určena až pro maturitní seminář. Díky znalosti práce s faktoriály si studenti jistě uvědomí, že žádný jmenovatel v 3c) nemůže nabýt nulové hodnoty. Podmínky proto plynou pouze z toho, že faktoriál je definován pro nulu a pro všechna přirozená čísla.

Př. 4 Aniž byste řešili zadanou rovnici, sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny:

a) o 3 větší než jsou kořeny rovnice:
$x^2 - 6x + 8 = 0$ $\quad [x^2 - 12x + 35 = 0]$

b) rovnající se druhým mocninám kořenů rovnice
$x^2 + 2x - 15 = 0$ $\quad [x^2 - 34x + 225 = 0]$

Met.: Úlohy se řeší užitím Vietových vztahů. Doporučuji pracovat s normovanými tvary rovnic, tedy $x^2 + px + q = 0$. Pro kořeny r, s této rovnice pak platí: $r + s = -p$, $r.s = q$.
Úloha 4a) je velmi snadná, ale úloha 4b) je pro studenty náročnější. Bude nejspíš vhodné prodiskutovat s nimi postup, protože bez drobné pomoci ji zřejmě většina z nich nezvládne.

4b)

Daná rovnice $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Její kořeny … *r, s.*

Pro ně platí: $r + s = -2$

$r.s = -15$

Hledaná rovnice $x^2 + px + q = 0$.

Její kořeny … r_1, s_1.

Pro ně platí: 1) $r_1 + s_1 = -p \ \wedge \ r_1.s_1 = q$

2) $r_1 = r^2$, $s_1 = s^2$

$$r_1 + s_1 = r^2 + s^2 = r^2 \mathbf{+ 2rs} + s^2 \mathbf{- 2rs} = (r+s)^2 - 2rs =$$
$$= (-2)^2 - 2.(-15) = 34 = -p \ \dots \ p = -34$$
$$r_1.s_1 = r^2.s^2 = (r.s)^2 = (-15)^2 = 225$$

Závěr: Hledaná rovnice je $x^2 - 34x + 225 = 0$

Př. 5 Ze dvou stanic vzdálených 600 km byly vyslány dva vlaky, které se mají potkat uprostřed trati. Pomalejší z nich vyjel o hodinu dříve rychlostí o 10 $\frac{km}{h}$ menší než druhý vlak. Určete rychlosti obou vlaků.

[50 km/h, 60 km/h]

Met.: Řešení úloh o pohybu je nutné postavit na precizním náčrtu a popisu situace.

Př. 6 Cena časopisu byla snížena o tolik procent, kolik korun stál před snížením ceny. Urči jeho původní cenu, jestliže po zlevnění stál 16 Kč. [2.5.13 – Realisticky.cz: 20 Kč nebo 80 Kč]

Met.: Je třeba důkladně a soustředěně pročíst text úlohy, snažit se dokonale pochopit podstatu řešeného problému, ujasnit si, která veličina jsou „neznámá", jako takovou ji řádně označit a pojmenovat a pomáhat si při sestavování rovnic přehlednými zápisy.

Př. 7 Určete všechny hodnoty parametru ***a***, pro které má daná rovnice jeden kořen rovný nule. Určete druhý kořen.

$a \in R$: $\quad 2(a-1)x^2 - (2a-4)x + 2a(a-3) = 0$

$$\left[a = 0 \dots K = \{0; 2\}; a = 3 \dots K = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}\right]$$

Rozšiřující cvičení

Př.: 8 Odvoďte vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.