07 **Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou – met.**

Stručný přehled teorie

Pro každé reálné číslo $a \in \mathbf{R}$ je absolutní hodnota $|a| := \begin{cases} a, \text{je-li } a \geq 0 \\ -a, \text{je-li } a \leq 0 \end{cases}$

Řešení rovnic a nerovnic s absolutními hodnotami:

- **Jednoduché rovnice a nerovnice**
  - ***a)*** využití geometrického významu absolutní hodnoty (u rovnic i nerovnic)
  - ***b)*** využití umocnění obou stran
    1) *rovnice* (často neekvivalentní úprava přinášející nezbytnost zkoušky!)
    2) *nerovnice* (lze provést pouze v případě, že je zaručena nezápornost obou umocňovaných stran)

- **Složitější rovnice a nerovnice** (s větším počtem absolutních hodnot výrazů)
  – optimální (i přehledné) řešení – tabulkou vytvořenou s pomocí tzv. nulových bodů.

Geometrický význam absolutní hodnoty $|a|$ a absolutní hodnoty $|a-b|$:

Absolutní hodnota $|a|$ se pro libovolné $a \in$ R rovná vzdálenosti obrazu tohoto čísla od počátku číselné osy (od obrazu čísla 0).

Absolutní hodnota $|a-b|$, resp. $|b-a|$, se pro libovolná $a, b \in$ R rovná vzájemné vzdálenosti obrazů dotyčných čísel *a, b* na číselné ose.

Některé vlastnosti absolutní hodnoty:

Pro každé reálné číslo $a \in \mathbf{R}$ a pro každé reálné číslo $b \in \mathbf{R}$ platí:

1) $|a| \geq 0$

2) $|a| = |-a|$

3) $a \leq |a|, -a \leq |a|$

4) $|a| - |b| \leq \big||a| - |b|\big|$

5) $0 \leq |a+b| \leq |a| + |b|$

6) $|a.b| = |a|.|b|$

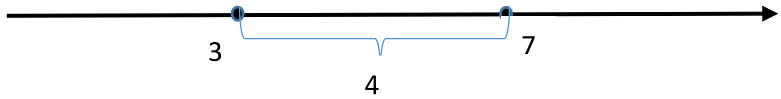
7) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, je-li $b \neq 0$

Pozn.: Pro každé $a \in \mathbf{R}$ *platí:* $\sqrt{a^2} = |a|$

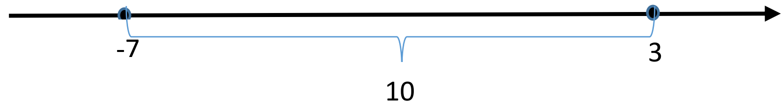
Met.: Jednoduché rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou lze často řešit pouze s využitím geometrického významu absolutní hodnoty rozdílu reálných čísel.

Absolutní hodnota <u>rozdílu</u> dvou reálných čísel představuje geometricky vzdálenost jejich obrazů na číselné ose.

př. a) $|3-7|=4$



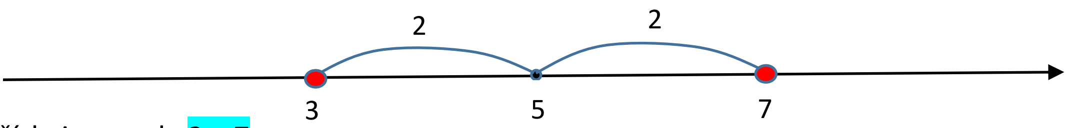
př. b) $|3+7| = |3-(-7)| = 10$



Pro rychlé řešení nejjednodušších rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou je velmi užitečné naučit studenty „číst“ takto:

př.1) $|x \quad - \quad 5| \quad = \quad 2$

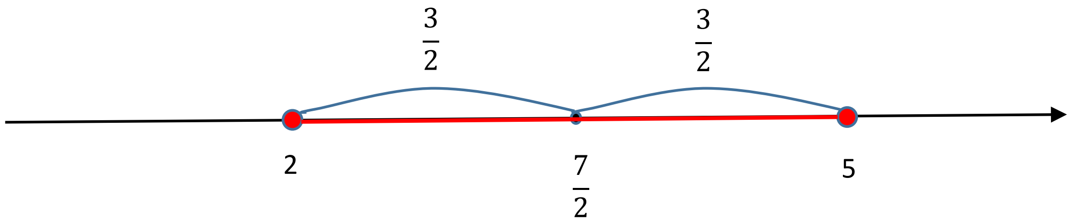
Hledám všechna x, která mají od bodu 5 vzdálenost rovnu 2.



Hledaná čísla jsou tedy 3 a 7.

př.2) $|7-2x| \leq 3 \Longrightarrow |2x-7| \leq 3/:2 \Longrightarrow \left|x - \frac{7}{2}\right| \leq \frac{3}{2}$

Hledám všechna x, která mají od bodu $\frac{7}{2}$ vzdálenost menší nebo rovnu $\frac{3}{2}$.



Hledaná x leží v intervalu $\langle 2,5\rangle$.

Základní poznatky:

Př. 1 Užitím geometrického významu absolutní hodnoty řešte v R:

a) $|x-1| = 3$ [K ={-2; 4 }]

b) $|2x+3| = 9$ [K ={-6; 3 }]

c) $|x-1| \leq 3$ [$K = \langle -2;4 \rangle$]

d) $|2x+3| \geq 9$ [$K = (-\infty;-6\rangle \cup \langle 3;\infty)$]

e) $|2-x| < -3$ [K =∅]

Met.: První čtyři úlohy jsou výše uvedenou metodou snadno a rychle řešitelné.
Jinou metodou, kterou lze tyto úlohy rovněž řešit srovnatelně rychle a snadno, je umocnění obou stran rovnice (nerovnice) na druhou a převod na kvadratickou rovnici (nerovnici). Umocnění tady představuje vzhledem k nezápornosti obou stran ekvivalentní úpravu, takže výsledné řešení přijmeme bez zkoušky. Jakmile však s touto druhou možností řešení vyučující studenty seznámí, musí být připraven na to, že se v každé třídě najde řada studentů, kteří se zcela vážně pustí do řešení poslední úlohy, aniž by si hned při pohledu na zadání uvědomili, že levá strana poslední nerovnice je nezáporná, tudíž nikdy nemůže být menší než záporné číslo na pravé straně nerovnice a je tedy bez

výpočtů jasné, že poslední úloha má množinu řešení prázdnou.

Pozn.: Příklady dalších typů jednoduchých rovnic s absolutní hodnotou, u kterých lze využít rychlých metod řešení:

1. $|x-7| = x-7$ Řeš.: $x - 7 \geq 0$ $x \geq 7$
2. $|x-2| = 2-x$ $\Longrightarrow$ Řeš.: $x - 2 \leq 0$ $\Longrightarrow$ $x \leq 2$
3. $|2x-5| = 1-3x$ $\Longrightarrow$ Řeš.: umocníme na druhou (neekvivalntní úprava!!!), vyřešíme kvadratickou rovnici, ale musíme udělat zkoušku!!!

Typové příklady standardní náročnosti

Př. 2 Řešte v R: $3|x-1|+2|x-2|=|x+10|$ $[K=\{-\frac{1}{2};\frac{17}{4}\}]$

Př.3 Řešte v R: $\frac{|x|+3}{|x|-3}=3$ $[K=\{-6;6\}]$

Př. 4 Řešte v R: $\frac{1}{|2x-3|}+8=\frac{5}{|3-2x|}$ $[K=\{\frac{7}{4};\frac{5}{4}\}]$

Př. 5 Řešte v Z: $|x|-|x-5| \geq 4\,(x-3)$ $[K=\{\dots,-1,0,1,2,3\}]$

Př. 6 Řešte v R: $|2x-3| > \sqrt{x^2-2x+1}+5$ $[K=(-\infty;-3)\cup(7;\infty)]$

Př. 7 Řešte v R: $|x^2+3x+2| < 2x+4$ $[K=(-2;1)]$

Met.: Všechny úlohy 2 – 7 vyžadují řešení v jednotlivých intervalech, na které reálnou osu rozdělí „nulové“ body všech absolutních hodnot vyskytujících se v zadání. Na začátku je dobré vytvořit si přehlednou tabulku s výrazy, jakých nabývají absolutní hodnoty v jednotlivých intervalech a posléze už v těchto intervalech řešit rovnice bez absolutních hodnot.

Např. 2 ze zadání plyne, že nulové body jsou -10, 1, 2

	$(-\infty,-10\rangle$	$\langle-10,1)$	$\langle 1,2)$	$\langle 2,\infty)$
$\|x-1\|$	1 - x	1 - x	x - 1	x – 1
$\|x-2\|$	2 - x	2 – x	2 – x	x – 2
$\|x+10\|$	-x - 10	x + 10	x + 10	x + 10

$(-\infty,-10\rangle$ Rovnice: 3.(1 – x) + 2.(2 – x) = -x – 10

……

x = $\frac{17}{4}$; toto číslo však do intervalu $(-\infty,-10\rangle$ nepatří, proto v tomto intervalu řešení neexistuje. Proto $\boxed{K_1 = \emptyset.}$

$\langle-10,1)$ Rovnice: 3.(1 – x) + 2.(2 – x) = x + 10

……..

$x = -\frac{1}{2} \in \langle-10;1)$ Proto $\boxed{K_2 = \left\{-\frac{1}{2}\right\}.}$

$\langle 1,2)$ Rovnice: 3.(x – 1) + 2.(2 – x) = x + 10

……..

$\boxed{K_3 = \emptyset\,.}$

$\langle 2,\infty)$ Rovnice: 3.(x – 1) + 2.(x – 2) = x + 10

……..

$x = \frac{17}{4} \in \langle 2;\infty)$ Proto $\boxed{K_4 = \left\{\frac{17}{4}\right\}.}$

Závěr: $\boxed{K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = \left\{-\frac{1}{2};\frac{17}{4}\right\}}$

Pozn.: V př. 4 lze využít $|2x-3| = |3-2x|$

V př. 5 pozor na obor řešení nerovnice!!

V př. 6 lze využít $\sqrt{x^2-2x+1} = |x-1|$