09 Další typy rovnic a nerovnic – met.

Stručný přehled teorie

1. Rovnice v součinovém tvaru

$$f_1(x).f_2(x).....f_n(x) = 0 \iff f_1(x) = 0 \vee f_2(x) = 0 \vee ... \vee f_n(x) = 0 \iff$$

$$\iff x \in K_1 \vee x \in K_2 \vee ... \vee x \in K_n$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n$$

2. Nerovnice v součinovém tvaru

$$f_1(x).f_2(x).....f_n(x) \leq 0 \ , \quad f_1(x).f_2(x).....f_n(x) \geq 0 \ ,$$
$$f_1(x).f_2(x).....f_n(x) < 0 \ , \quad f_1(x).f_2(x).....f_n(x) > 0$$

Optimální (i nejpřehlednější) řešení – číselnou osou (případně tabulkou), na níž vyznačíme (v souladu se znaménkem nerovnosti) všechny nulové body.

3. ***Rovnice v podílovém tvaru***

$$\frac{f_1(x).f_2(x).....f_n(x)}{g_1(x).g_2(x).....g_m(x)} = 0 \iff [f_1(x).f_2(x).....f_n(x) = 0 \wedge g_1(x).g_2(x).....g_m(x) \neq 0]$$

4. Nerovnice v podílovém tvaru

$$\frac{f_1(x).f_2(x).....f_n(x)}{g_1(x).g_2(x).....g_m(x)} \leq 0, \qquad \frac{f_1(x).f_2(x).....f_n(x)}{g_1(x).g_2(x).....g_m(x)} \geq 0,$$

$$\frac{f_1(x).f_2(x).....f_n(x)}{g_1(x).g_2(x).....g_m(x)} < 0, \qquad \frac{f_1(x).f_2(x).....f_n(x)}{g_1(x).g_2(x).....g_m(x)} > 0$$

Optimální (i nejpřehlednější) řešení – číselnou osou (případně tabulkou), na níž vyznačíme všechny nulové body z čitatele i jmenovatele (v souladu se znaménkem nerovnosti a se samozřejmým požadavkem nenulovosti jmenovatele).

5. Rovnice s neznámou ve jmenovateli

1) Určíme všechny podmínky – plynou z požadavku, aby se žádný ze jmenovatelů zlomků vyskytujících se v rovnici nerovnal nule;
2) Upravíme rovnici do tvaru beze zlomků (vynásobením společným jmenovatelem) a rovnici vyřešíme;
3) Zkonfrontujeme výsledek s podmínkami a vyřadíme z něj všechna čísla, která s podmínkami kolidují

4. Nerovnice s neznámou ve jmenovateli

Řešení provedeme převodem nerovnice do podílového tvaru

Pozn. Při řešení některých rovnic či nerovnic někdy používáme substituci, tj. nahrazení vhodného vybraného složitějšího výrazu s proměnnou (např. *x*) novou (jednoduchou) proměnnou

Základní poznatky

Př. 1 Řešte v R:

a) $(x-2)(2x+3)=0$ $\left[\left\{-\frac{3}{2};2\right\}\right]$

b) $(x-2)(2x+3)\geq 0$ $\left[\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right\rangle\cup\langle 2;\infty)\right]$

c) $\frac{2x+5}{3x-6}=0$ $\left[\left\{-\frac{5}{2}\right\}\right]$

d) $\frac{2x+5}{3x-6}\geq 0$ $\left[\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right\rangle\cup(2;\infty)\right]$

Met.: 1a) Z kořenových činitelů na levé straně této kvadratické rovnice určíme kořeny (součin je roven nule tehdy, je-li libovolný z činitelů roven nule);

1b) Obyčejná kvadratická nerovnice s kvadratickým koeficientem a = 2 (vrchol paraboly odpovídá minimu pomocné kvadratické funkce, parabola „otevřena nahoru“) a s levou stranou v podobě součinu kořenových činitelů, z nichž určíme x-ové souřadnice průsečíků paraboly s osou x …

1c) Jednoduchá rovnice v podílovém tvaru – využijeme skutečnosti, že zlomek je roven nule tehdy, je-li čitatel roven nule a jmenovatel je od nuly různý;

1d) Při rozhodování o výsledném znaménku podílu na levé straně této nerovnice můžeme využít parabolu odpovídající řešení náhradní nerovnice (2x + 5). (3x – 6) ≥ 0. Operace dělení a násobení mají stejnou prioritu a pokud správně vyřadíme z výsledné množiny řešení nulový bod ze jmenovatele (nulou nelze dělit!!), ušetříme čas.

Typové příklady standardní náročnosti

Př. 2 Řešte v R: $(x^3-x).(2x^2-1).(2x^2+1)=0$ $\left[\left\{-1;-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2};1\right\}\right]$

Met.: Činitele na levé straně rovnice rozložíme na součiny lineárních, případně v R dále nerozložitelných kvadratických, výrazů $\left[x.(x-1).(x+1).(\sqrt{2}.x-1).(\sqrt{2}.x+1).(2x^2+1)=0\right]$ a využijeme skutečnosti, že součin je roven nule tehdy, je-li libovolný z činitelů roven nule). Je dobré zamyslet se se studenty nad posledním výrazem na levé straně rovnice. Zejména při řešení následujících nerovnic se jim bude velmi hodit, když si uvědomí, že výraz $2x^2+1$ nejen nemůže nabýt nulové hodnoty, ale je vždy kladný, neboť představuje součet nezáporného výrazu $2x^2$ a kladného čísla 1.

Př. 3 Řešte v R: $(x^3-x).(2x^2-1).(2x^2+1)<0$ $\left[(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)\right]$

Met.: Z výše uvedeného důvodu výraz v poslední závorce na levé straně nerovnice je vždy kladný. S tím budeme počítat při rozhodování o řešení nerovnice.

1. způsob řešení – s použitím tabulky:

1) Činitele na levé straně rovnice rozložíme na součiny lineárních, případně v R dále nerozložitelných kvadratických, výrazů $[x.(x-1).(x+1).(\sqrt{2}.x-1).(\sqrt{2}.x+1).(2x^2+1)<0]$; častou chybou, které se tady studenti dopouštějí, je, že nerozloží všechny činitele důkladně a důsledně a pak nenajdou všechny nulové body;

2) Určíme všechny nulové body: -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

3) Rozdělíme číselnou osu těmito pěti body na šest intervalů, ve kterých budeme určovat znaménka jednotlivých výrazů a pak celé levé strany nerovnice. Vzhledem k tomu, že je v nerovnici ostré znaménko nerovnosti, nulové body do intervalů nezařadíme;

4) Vytvoříme tabulku (za pomoci libovolně zvolených vnitřních bodů jednotlivých intervalů určíme znaménka všech výrazů tvořících činitele v nerovnici):

	$(-\infty;-1)$	$\left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$	$\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$	$(1;\ \infty)$
x	–	–	–	+	+	+
x - 1	–	–	–	–	–	+
x + 1	–	+	+	+	+	+
$\sqrt{2}$x - 1	–	–	–	–	+	+
$\sqrt{2}$x + 1	–	–	+	+	+	+
$2x^2+1$	+	+	+	+	+	+

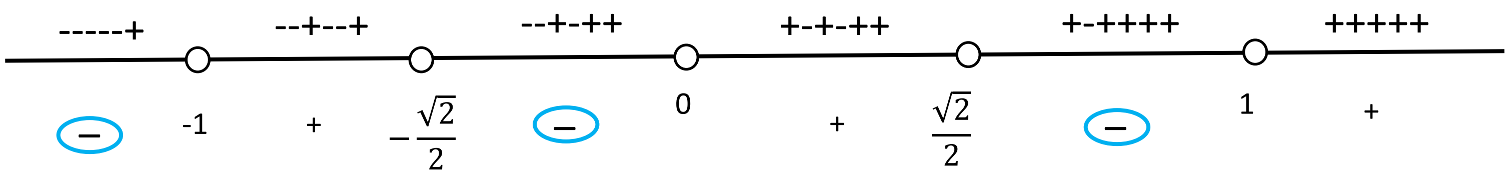
–	+	–	+	–	+

5) Určíme výslednou množinu řešení jako sjednocení těch intervalů, v nichž výsledné znaménko odpovídá požadovaným vlastnostem nerovnice.

2. způsob řešení – rychlé řešení na číselné ose:

1), 2), 3) První tři kroky jsou u této metody stejné jako u prvního způsobu řešení (úprava nerovnice, nalezení všech nulových bodů a zakreslení číselné osy s nulovými body, u kterých se podle znaménka nerovnosti rozhodujeme, zda budou do řešení zahrnuty či nikoliv);

4) Provedeme náčrt číselné osy, pomocí vnitřních bodů jednotlivých intervalů rozhodujeme o znaméncích výrazů (nad osou) a nakonec o znaménku celé levé strany nerovnice (pod osou);

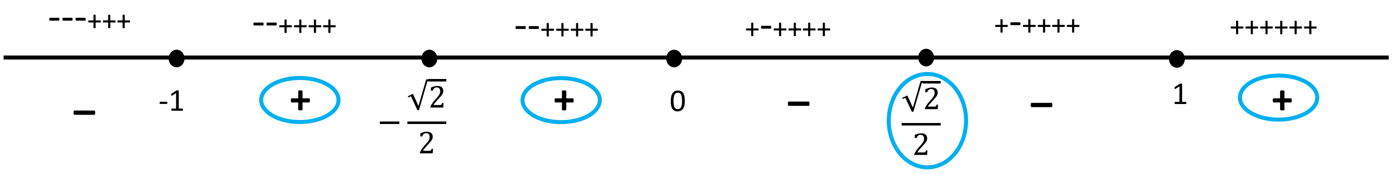


5) Určíme výslednou množinu řešení jako sjednocení těch intervalů, v nichž výsledné znaménko odpovídá požadovaným vlastnostem nerovnice: $K = (-\infty;\ -1) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$

Př. 4 Řešte v R: $\left(x^3-x\right)^{13}\left(2x^2-1\right)^{18}\left(2x^2+1\right)^{25} \geq 0$ $\quad\left[\langle -1;0\rangle \cup \langle 1;\infty) \cup \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]$

Met.: Na této úloze lze dobře studentům ukázat, jak je důležité nepustit se zbrkle do řešení, ale prohlédnout si napřed zadání a důkladně se nad ním zamyslet:

- poslední z činitelů $(2x^2+1)^{25}$ má sice lichý exponent 25, ale vzhledem k tomu, že základ mocniny je vždy kladný, bude i celý tento činitel vždy kladný. Neovlivní tedy výsledné znaménko levé strany nerovnice a nemůže nabýt nulové hodnoty. Při řešení bychom jej tedy mohli klidně ignorovat;
- činitel $(2x^2-1)^{18}$ má sudý exponent, takže nemůže nabýt záporné hodnoty, ale vzhledem k neostrému znaménku nerovnosti musíme pamatovat na z něj plynoucí nulové body, které jsou součástí řešení;
- činitel $(x^3-x)^{13} = [x.(x-1).(x+1)]^{13}$ má lichý exponent, takže znaménko celé mocniny bude kopírovat znaménko základu;
- nerovnici lze upravit: $x^{13}.(x-1)^{13}.(x+1)^{13}.\left(\sqrt{2}\,x-1\right)^{18}.\left(\sqrt{2}\,x+1\right)^{18}.(2x^2+1)^{25} \geq 0$, odsud určíme všechny nulové body a načrtneme číselnou osu, na které všechny nulové body vyznačíme. Vhodné je určitě barevné vyznačení nulových bodů, abychom snížili pravděpodobnost, že na některý z nich v závěru zapomeneme.



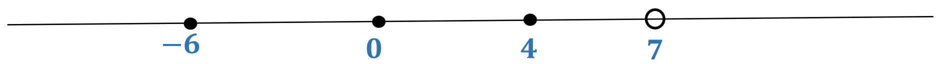
Závěr: $K = \langle -1; 0\rangle \cup \langle 1; \infty) \cup \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Př. 5 Řešte v R: $\frac{(4-x)(6+x)x}{7-x} \leq 0$

Met.: 1. způsob řešení – s použitím tabulky:

Podmínky jsou zbytečné. Nulové body ze jmenovatele (a rovněž z čitatele v případě ostré nerovnosti) vyřadíme „ze hry“ v tabulce.

Nulové body:

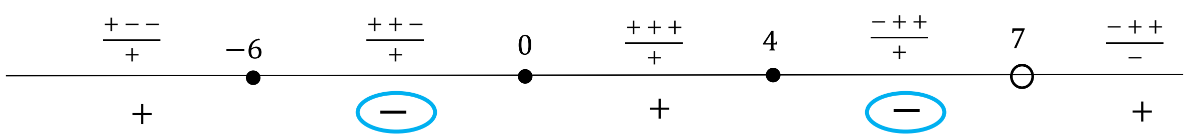


	-6	0	4	7
	$(-\infty; -6)$	$\langle -6; 0\rangle$	$\langle 0; 4\rangle$	$\langle 4; 7)$	$(7; \infty)$
$4-x$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$6+x$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$7-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$L(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$K = \langle -6; 0\rangle \cup \langle 4; 7)$

Pozn.: Učitel by mohl upozornit studenty, že *tabulka* slouží jako ***pomůcka*** pro řešení dané nerovnice. Znaménka výrazů patří samozřejmě všem vnitřním bodům příslušných intervalů. Krajní body intervalů jsou nulovými body nerovnice. Pro zpřehlednění řešení je však rozumné ty nulové body, které patří do definičního oboru nerovnice, k intervalům v hlavičce tabulky rovnou přiřadit.

2. způsob řešení – rychlé řešení na číselné ose:



$K = \langle -6; 0\rangle \cup \langle 4; 7)$

Př. 6 Řešte v R: $\frac{3-x}{4+x} \cdot \frac{2+x}{x-3} = \frac{2+x}{x-3}$ $\left[\left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}\right]$

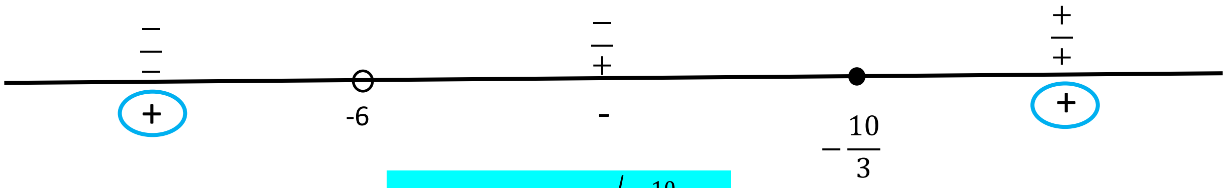
Met.: Jde o jednoduchou rovnici s neznámou ve jmenovateli. Postup:

1) stanovit podmínky;
2) zbavit se zlomků vynásobením výrazy ve jmenovatelích;
3) vyřešit jednoduchou lineární nebo kvadratickou rovnici;
4) v závěru zohlednit podmínky.

Př. 7 Řešte v R: $\dfrac{x-2}{x+6} \geq -2$ $\left[(-\infty,-6)\cup\left\langle -\dfrac{10}{3},\infty\right)\right]$

Met.: Nejčastější chybou, které se studenti dopouštějí při řešení úloh 7) a 8), je aplikování postupu používaného při řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli (viz úloha 6).
Při řešení nerovnic tohoto typu však je třeba postupovat zcela jinak:

- stanovení podmínek je zbytečné (nulové body prostě vyřadíme na číselné ose)
- nerovnici nelze zbavovat zlomků tím, že obě strany vynásobíme jmenovateli závislými na proměnné x (násobíme-li záporným výrazem, mění se znaménko nerovnosti na opačné, násobíme-li výrazem kladným, zůstává znaménko nerovnosti nezměněné !!)
  (Pokud bychom nutně chtěli použít při řešení nerovnice násobení jmenovatelem, museli bychom komplikovat postup rozdělením do samostatných větví (s ohledem na znaménko jmenovatele));
- nerovnici je třeba anulovat a upravit: $\frac{x-2}{x+6} + 2 \geq 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{3x+10}{x+6} \geq 0}$
- dořešit lze úlohu
  - buď metodou popsanou v zadání 1d)
  - nebo s užitím číselné osy a nulových bodů



- závěr: $K = (-\infty;\ -6) \cup \left\langle -\frac{10}{3};\infty\right)$

Př. 8 Řešte v R: $\dfrac{x+3}{x-1} \leq \dfrac{x+3}{x}$ $[(-\infty;-3\rangle \cup (0;1)]$

Met.: Postup je podobný jako v předcházející úloze 7). Je dobré upřednostňovat při procvičování i při prověrkách nerovnice s neostrým znaménkem nerovnosti. Studenti pak musí rozhodovat o zařazení či nezařazení nulových bodů do řešení podle toho, zda plyne nulový bod z čitatele (pak je zařazen) nebo ze jmenovatele (pak zařazen není).

Př. 9 Řešte v R: $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ $\left[\left\{-\sqrt{2},-1,1,\sqrt{2}\right\}\right]$

Př. 10 Řešte v R: $\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2 - \dfrac{x}{x+2} - 6 = 0$ $\left[\left\{-3,-\dfrac{4}{3}\right\}\right]$

Rozšiřující cvičení

Př. 11 Řešte v R: $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x-1}{x+1} + 6 > 0$ $[(-\infty,-3)\cup(-2,-1)\cup(-1,\infty)]$

Met.: Úlohy 9), 10) a 11) vyžadují použití substituce: v př. 9) nahradíme $x^2 = y,\ x^4 = y^2$;
v př. 10) nahradíme $\frac{x}{x+2} = y, \ldots$
v př. 11) nahradíme $\frac{x-1}{x+1} = y, \ldots$