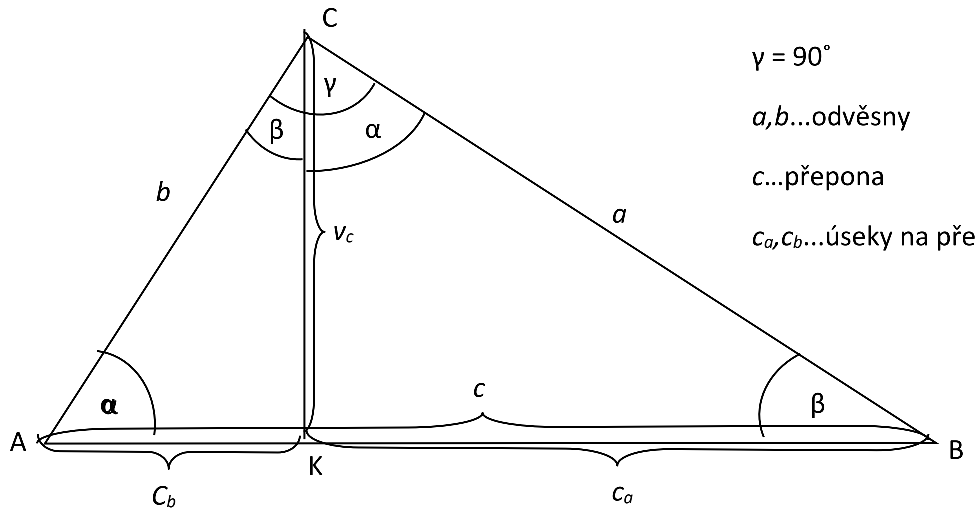
11 Pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova a Euklidovy věty – met.

Stručný přehled teorie



γ = 90˚

a,b...odvěsny

c...přepona

c_a, c_b...úseky na přeponě

Eukleidovy věty: a) **o výšce**: $\Delta AKC \overset{uu}{\sim} \Delta CKB$ $\quad \frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c} \Rightarrow \boxed{v_c^2 = c_a . c_b}$

Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony.

b) **o odvěsně**: $\Delta ABC \overset{uu}{\sim} \Delta ACK$ $\quad$ 1) $\frac{b}{c} = \frac{c_b}{b} \Rightarrow \boxed{b^2 = c . c_b}$ 2) Analogicky $\frac{a}{c} = \frac{c_a}{a} \Rightarrow \boxed{a^2 = c . c_a}$

Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a přilehlého úseku.

Pythagorova věta:

$a^2 = c.c_a$

$b^2 = c.c_b$

$$\boxed{a^2+b^2 = c.c_a + c.c_b = c.(c_a+c_b) = c^2}$$

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami.

Goniometrické funkce ostrého úhlu:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{protilehlá\ odvěsna}{přepona}; \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{přilehlá\ odvěsna}{přepona};$$

$$tg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{protilehlá\ odvěsna}{přilehlá\ odvěsna}; \qquad \cot g\alpha = \frac{a}{b} = \frac{přilehlá\ odvěsna}{protilehlá\ odvěsna}.$$

Met.: Znalosti související s pravoúhlým trojúhelníkem a jeho vlastnostmi patří k nejzákladnějším v geometrii. V průběhu celé středoškolské matematiky se jich velmi často využívá při probírání nejrůznějších (i negeometrických) témat.

Studenti by měli být vedeni k tomu, aby

- v libovolném pravoúhlém trojúhelníku s libovolně označenými vrcholy a stranami dokázali s jistotou pracovat s větou Pythagorovou i oběma větami Euklidovými a využívat jich při řešení různých úloh;
- při řešení úloh využívali dostatečně velkých a přehledných náčrtů (bohužel spousta učitelů na základních školách k tomu žáky nevede, takže studenti často kreslí malé nepřehledné náčrty tužkou (nebo dokonce propisovačkou), nejsou zvyklí pomoci si barevným vyznačením zadaných prvků, pojmenovávají hledané prvky jinak v náčrtu a jinak ve výpočtech ...;
- s pomocí Pythagorovy věty vypočítali (a uložili do paměti!!!) velikost výšky rovnostranného trojúhelníku o straně délky a $\left(v = a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, velikost úhlopříčky ve čtverci o straně délky a $\left(u = a\sqrt{2}\right)$, velikost tělesové úhlopříčky krychle o hraně délky a $\left(u = a\sqrt{3}\right)$, apod.
- dokázali použít pravoúhlý trojúhelník k určení ostatních základních goniometrických funkcí ostrého úhlu, je-li zadána jedna z těchto funkcí;
- dokázali využít pravoúhlé trojúhelníky vzniklé jako polovina rovnostranného trojúhelníku, příp. polovina čtverce, k výpočtu (a uložení do paměti!!!) všech základních goniometrických funkcí pro úhly 30°, 45°, 60°. Tato znalost se jim bude hodit později při práci s libovolnými celočíselnými násobky těchto úhlů ...

Základní poznatky:

Př. 1 Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a dále:

a) $c_a = 4$ cm, $c_b = 9$ cm   b) $b = 5$ cm, $c = 13$ cm

Určete početně (a výsledek ověřte graficky) prvky: a, b, c, c_a, c_b, v_c, α, β.

[a) $\sqrt{52}$ cm, $\sqrt{117}$ cm,13 cm, 4 cm, 9 cm, 6 cm, 33°41´, 56°19´ b) 12 cm, 5 cm, 13 cm, $\frac{144}{13}$ cm, $\frac{25}{13}$ cm, $\frac{60}{13}$ cm, 67°23´, 22°37´]

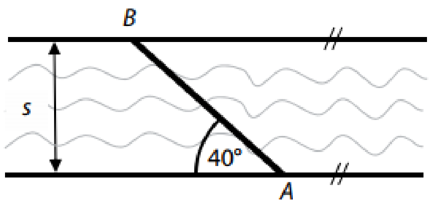
Př. 2 Je dána úsečka $|AB| = a$ (např. 6 cm).

a) Rozdělte úsečku AB v poměru 2:3.

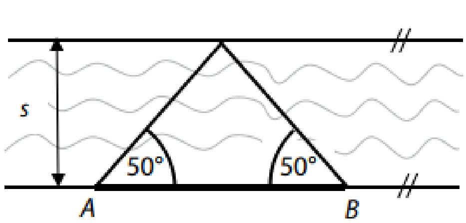
b) Sestrojte úsečku $|AX| = \frac{2}{3}|AB|$, $|AY| = \frac{4}{3}|AB|$.

Př. 3 MA–podzim 2016 V každé zobrazené situaci je šířka řeky označena písmenem s a vzdálenost AB je 50 m. K situacím na obrázcích a), b) přiřaďte odpovídající šířku řeky s, zaokrouhlenou na celé metry.

a)



b)



A) méně než 28 m   B) 30 m   C) 32 m   D) 34 m   E) více než 36 m

[a) C, b) B]

Př. 4 Sestrojte úsečku délky $\sqrt{13}$ cm užitím:

a) Pythagorovy věty b) Eukleidovy věty o výšce c) Euleidovy věty o odvěsně

Správnost výsledku ověřte výpočtem na kalkulačce a přeměřením.

Typové příklady standardní náročnosti

Př. 5 Je dána kružnice k (S, r) a bod M, který má od středu S kružnice k vzdálenost |SM| = d > r. Z bodu M vedené tečny t_1, t_2 se dotýkají kružnice k v bodech T_1, T_2. Určete délku tětivy $|T_1T_2|$ a její vzdálenost od středu kružnice k.

[$\frac{2r}{d}\sqrt{d^2-r^2}, \frac{r^2}{d}$]

Př. 6 Určete obsah obdélníku, jehož délka a = 84 cm, má-li jeho úhlopříčka délku o 72 cm větší než je jeho šířka.

[1092 cm^2]

Př. 7 Dvě tětivy AB a CD kružnice k (S, 7 cm), které mají délky |AB| = 6 cm, |CD| = 10 cm se protínají, kolmo v bodě T. Vypočítejte vzdálenost bodu T od středu kružnice k. [8 cm]

Př. 8 Jakou část zemského povrchu lze vidět z kosmické lodi letící ve výšce 250 km nad povrchem Země?

[9 670 650 km^2]

Př. 9 Sestrojte úsečku délky: a) $\sqrt{6}$ cm; b) $x = \frac{a \, . \, b}{c}$ (a, b, c … zadáno);

c) $x = \frac{a}{b}$ (a, b, jednotková úsečka …zadáno); d) $x = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-c}{d}$.

Volte délky úseček např. a = 8 cm, b = 2 cm, c = 4 cm, d = 3 cm, jednotková úsečka má délku 1 cm. Správnost konstrukce ověřte výpočtem a přeměřením.

Př. 10 Sestrojte čtverec stejného obsahu, jako je obsah zadaného:
a) obdélníku se stranami *a, b*; b) trojúhelníku se stranami *a, b, c.*

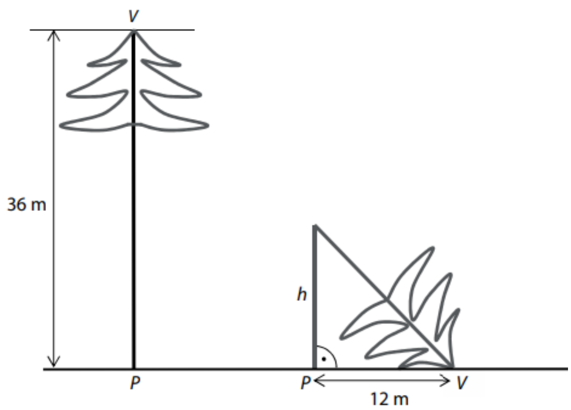
Volte délky úseček např. a = 6 cm, b = 4 cm, c = 7 cm. Správnost konstrukce ověřte výpočtem a přeměřením. (Zadáním stran trojúhelníku je po jeho sestrojení známá také délka kterékoliv jeho výšky.)

[a) x = $\sqrt{a \cdot b}$ cm b) x = $\sqrt{\frac{c \cdot v_c}{2}}$ cm]

Př. 11 Sestrojte kružnici, která je soustředná s daným kruhem o poloměru 4 cm a dělí ho na dvě části o stejném obsahu. [r = 2 $\sqrt{2}$ cm]

Př. 12 MA – 2017 Ve větru se zlomil 36 m vysoký strom. Vrchol zlomeného stromu se dotýká země, a to ve vzdálenosti 12 m od paty kmene stromu. (Tloušťku kmene stromu zanedbáváme.) Vypočtěte, v jaké výšce h nad zemí se strom zlomil.

[h = 16 m]



Rozšiřující cvičení

Př.13 Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny mají délky a = 22 cm, c = 12 cm, je-li jeho výška o 1 cm menší než délka ramene. [$204\ cm^2$]

Př. 14 Je dána kružnice k (S; 5 cm) a bod M, který má od středu S kružnice k vzdálenost d = 10 cm. Jakou vzdálenost od středu S má přímka p, která prochází bodem M a vytíná na kružnici k tětivu délky n = 6 cm? [4 cm]

Př. 15 Kružnice o poloměru r je opsána rovnoramenným trojúhelníkem ABC, jehož výška v = 5r. Vypočítejte délku základny AB tohoto trojúhelníku. $\left[\frac{2r\sqrt{15}}{3}\right]$