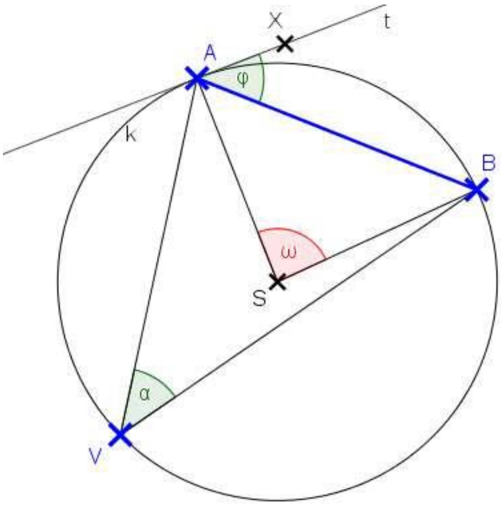
15 Úhly v kružnicích – met.

Stručný přehled teorie



Body $A,\ B$ dělí kružnici na dva **oblouky**:

- menší oblouk $\widehat{AB}$
- větší oblouk $\widehat{AB}$

Pozn.
1) Je-li AB průměr kružnice k, pak jsou oba oblouky stejné, tj. polokružnice. Kružnice k je Thaletovou kružnicí nad AB.
2) Je-li V vnitřní bod oblouku, pak lze tento oblouk označit $\widehat{AVB}$.

$\sphericalangle ASB = \omega$ … **středový úhel** příslušný k menšímu $\widehat{AB}$

$\sphericalangle AVB = \alpha$ … **obvodový úhel** příslušný k menšímu $\widehat{AB}$
(V – libovolný vnitřní bod většího $\widehat{AB}$)

$\sphericalangle BAX = \varphi$ … **úsekový úhel** příslušný k menšímu $\widehat{AB}$
(X – libovolný bod na tečně ke kružnici k v bodě A zvolený tak, aby menší $\widehat{AB}$ byl součástí tohoto úhlu)

Platí:

1) Všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku kružnice jsou shodné a jejich velikost je rovna polovině velikosti středového úhlu příslušného k témuž oblouku. Tj. $\alpha = \frac{\omega_\alpha}{2}$ a $\omega_\alpha = 2\alpha$.

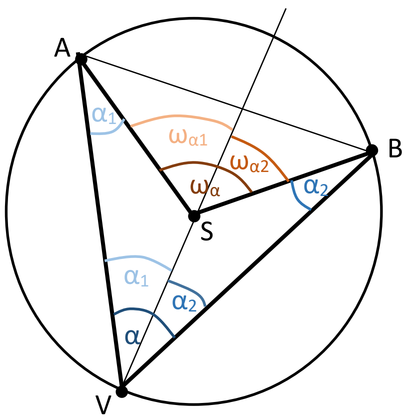
Důkaz (částečný – pro „nekomplikovanou" polohu vrcholu V):

- ΔAVS je rovnoramenný $\Rightarrow$ $|\sphericalangle VAS| = |\sphericalangle AVS| = \alpha_1$
  - $\omega_{\alpha 1}$ je vnější úhel ΔAVS při vrcholu S $\Rightarrow$

    $\Rightarrow \omega_{\alpha 1} = |\sphericalangle VAS| + |\sphericalangle AVS| = 2\alpha_1$
- obdobně ΔBVS je rovnoramenný, …, $\omega_{\alpha 2} = 2\alpha_2$

$$\boldsymbol{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha 1} + \omega_{\alpha 2} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = \boldsymbol{2\alpha}$$

cbd.



2) Úsekový úhel příslušný k danému oblouku kružnice je shodný s obvodovými úhly příslušnými k témuž oblouku, tj. $\varphi = \alpha$.

Pozn. Na této větě stojí princip konstrukce množiny bodů, ze kterých je úsečka viděna pod úhlem α.

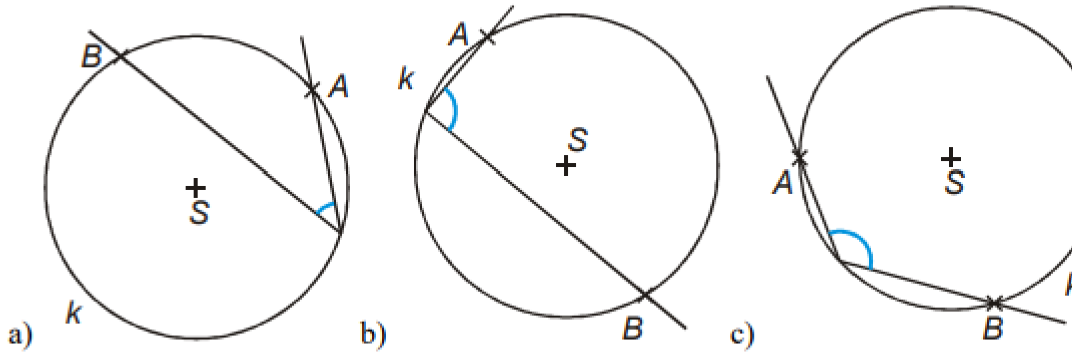
3) Všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.

4) Obvodové úhly příslušné menšímu a většímu oblouku $\widehat{AB}$ téže kružnice jsou výplňkové, neboli jejich součet je 180°.

Met.: Téma „Úhly příslušné oblouku kružnice“ je pro studenty jednoduché, snadno pochopitelné. Učitel by se měl zaměřit především na vztah mezi středovým úhlem a obvodovým úhlem příslušným témuž kružnicovému oblouku a měl by studentům ukázat důkaz tohoto vztahu pro některou nekomplikovanou polohu vrcholu V obvodového úhlu. Pochopení a znalost tohoto jednoduchého důkazu bude velmi užitečná, až bude studentům vysvětlovat konstrukci množiny $G_{AB,\alpha}$, všech bodů, z nichž je daná úsečka AB viděna pod úhlem α.
Pozn. Je vhodné doplnit ještě studentům informaci o úsekovém úhlu a zadat eventuálně jako dobrovolné domácí cvičení pokus o důkaz rovnosti úsekového a obvodového úhlu příslušného k témuž kružnicovému oblouku.

Základní poznatky:

Př. 1 Doplňte k nakresleným obvodovým úhlům odpovídající úhly středové. [Realisticky.cz – 3.2.9]



Př. 2 Doplňte věty uvádějící důsledky věty o obvodovém a středovém úhlu (ostrý úhel, tupý úhel, přímý…).
a) Obvodový úhel příslušný k menšímu oblouku je …
b) Obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je …
c) Obvodový úhel příslušný k půlkružnici je …

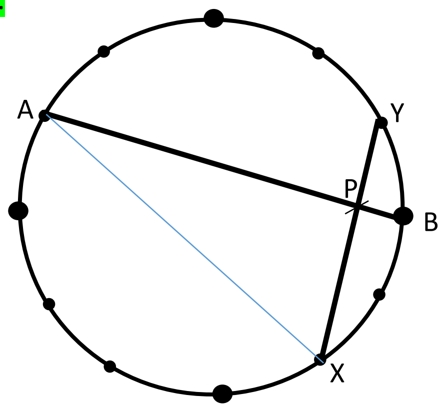
Př. 3 V tětivovém čtyřúhelníku ABCD, platí α = 52° , β = 96° . Určete zbývající vnitřní úhly.
[Realisticky.cz – 3.2.9, Úhly mají velikost 128°, 84°]

Typové příklady standardní náročnosti:

Př. 4 Nakreslete trojúhelníky, jejichž vrcholy tvoří body, které na ciferníku znázorňují:
a) 3, 6, 10 [60°, 75°, 45°]
b) 4, 5, 12 [105°, 60°, 15°]
Určete velikosti vnitřních úhlů těchto trojúhelníků.

Př. 5 Dokažte, že spojnice bodů, které vyznačují na ciferníku 2 a 5, je kolmá na spojnici bodů 3 a 10.

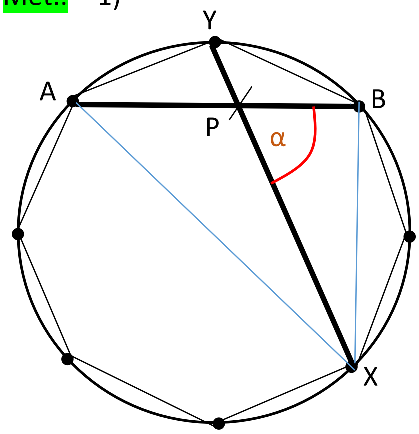
Met.:



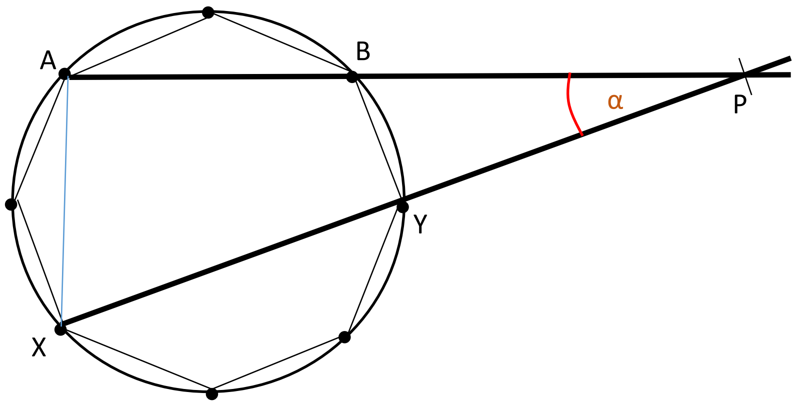
Pozice průsečíku P neumožňuje pro určení velikosti úhlu ∢APX využít vlastnosti středového a obvodového úhlu přímo ... v ΔAXP ale najdeme snadno velikosti úhlů při vrcholech A a X ...

Př. 6 V pravidelném osmiúhelníku ABCDEFGH vypočítejte velikosti:
a) vnitřních úhlů trojúhelníku ABG, ACE, BEH,
b) úhlů sevřených dvojicemi různě dlouhých úhlopříček.

Met.: 1)



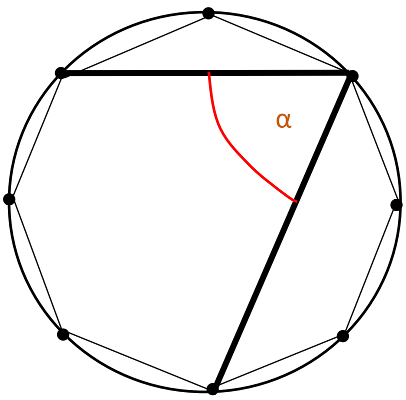
2)



Pokud se úhlopříčky protnou uvnitř osmiúhelníku, řešíme podobně jako v úloze 5 doplněním na vhodný trojúhelník. Jen je nutné pamatovat na to, že odchylka přímek α je definována jako menší (nejvýš rovný – v případě kolmosti) z obou úhlů, který přímky svírají.

Pokud se úhlopříčky protnou vně osmiúhelníku, odpadne starost s rozhodováním, který ze dvou úhlů s vrcholem v P představuje odchylku. Ale v této situaci se zase někteří studenti dopouštějí chyby tím, že považují úhel ∢APX za obvodový příslušný menšímu oblouku AX a tak jej i počítají.

Pozn.: Jestliže chce učitel v rámci prověrky ověřit, zda studenti zvládnou výpočet odchylky úhlopříček, jejichž vzájemná poloha odpovídá obrázkům 1) nebo 2), musí si dát pozor na formulaci zadání. Šikovný student může zadání formulované jako 6. b) řešit tak, že se vyhne komplikacím (viz např. následující obrázek) a učitel jeho řešení musí uznat:



Př. 7 Určete velikosti úhlů sevřených na ciferníku hodin spojnicí bodů 3 a 8 se spojnicí 12 a 7.

[60°]

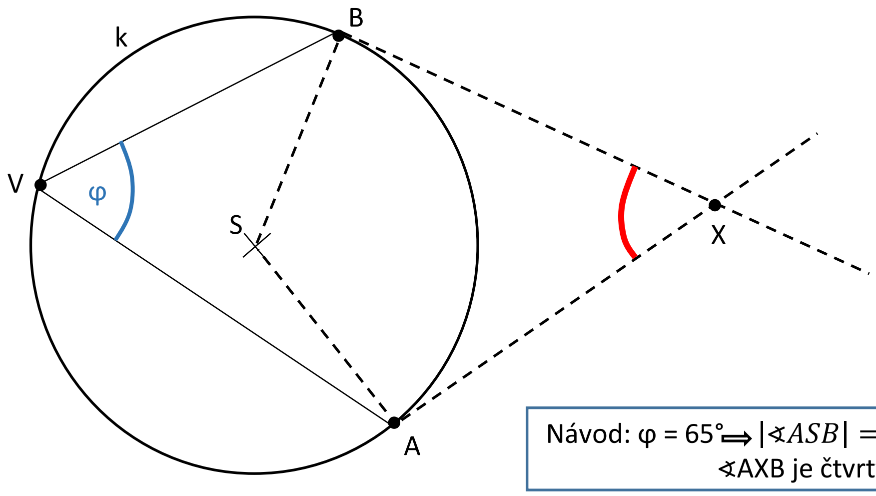
Př. 8 Dvě kružnice k_1, k_2 se protínají v bodech K, L; menší oblouk KL je osminou kružnice k_1 a pětinou kružnice k_2. Na k_1 je dán bod M tak, že nenáleží menšímu oblouku KL, ale menší oblouk KM je shodný s KL. Sestrojte trojúhelník MRN, který má $R \in k_2$, $N \in k_1$, $K \in RM$, $L \in RN$ a vypočítejte velikosti jeho vnitřních úhlů.

[36°, 45°, 99°]

Př. 9 Kružnice *k = (S; r)* je rozdělena na dva oblouky tak, že obvodový úhel nad větším obloukem se rovná středovému úhlu nad menším obloukem. Jak velké jsou obvodové úhly nad oběma oblouky?

[60°, 120°]

Př. 10 AB je menší oblouk kružnice s obvodovým úhlem 65°. V bodech A, B jsou sestrojeny tečny kružnice a bod X je jejich průsečík. Vypočti velikost úhlu AXB.



Návod: φ = 65° $\Longrightarrow |\sphericalangle ASB| = 130°, |\sphericalangle SAX| = |\sphericalangle SBX| = 90°$,
∢AXB je čtvrtý úhel v čtyřúhelníku SAXB

[Realisticky.cz – 3.2.10, 50°… pozor!!! Zdroj zadání i řešení je zde sice uveden správně a na této stránce jej najdete, ale je tam nesmyslný obrázek i chyby v řešení (pokud už autory někdo neupozornil a nepostarali se o opravu)]