# **23 Exponenciální a logaritmické rovnice – met.**

**Stručný přehled teorie**

Exponenciální rovnice

* obsahuje neznámou v exponentu některé mocniny
* základní tvar:
* řešení: a) Je-li **,** pak (rovnají-li se základy mocnin, rovnají se i exponenty)

 b) Je-li , použijeme logaritmování: , ()

Pozn.: Složitější exp. rovnice se řeší převedením na základní tvar, popřípadě na algebraickou rovnici (s častým použitím substituce *ax = y (a > 0, a ≠ 1*)).

Logaritmická rovnice

* obsahuje logaritmy výrazů s neznámou *x****R***
* nejjednodušší tvar: **log *a*x = *b*, *a > 0,* *a ≠ 1, bR*** ( její řešení podle definice logaritmu je *x = ab*)
* řešení na základě věty: Jestliže **log *a**f(x)* = log *a g(x)****,* kde ***a > 0, a ≠ 1***, pak ***f(x) = g(x)*** (rovnají-li se logaritmy dvou kladných čísel o stejném základu, rovnají se i tato čísla)

Pozn.: 1) Platnost předchozí věty je podmíněna splněním podmínek a . Pokud je nestanovíme předem, zkouška je nutnou součástí řešení.

 2) Složitější log. rovnice - řešení často usnadňuje vhodná substituce (např. y = log *a*x (*a > 0, a ≠ 1*)) a převod rovnice z log. na algebraickou.

* Věty o logaritmech: Nechť
	1.
	2. 
	3. 
	4.
	5. , kde *a* > 0, *b* > 0, *b* ≠ 1, *c* > 0, *c* ≠ 1

Pozn.: Velký význam věty 5! - Umožňuje převod logaritmu při jednom základu na logaritmus při jiném základu! (Při řešení log. rovnic je často třeba dosáhnout toho, aby všechny logaritmy v rovnici měly stejný základ!)

Met.: Hned v úvodu tohoto tématu by měl učitel studentům zdůraznit, jak nesmírně důležitá bude pro úspěšné zvládání exponenciálních a logaritmických rovnic a nerovnic znalost pravidel pro počítání s mocninami a odmocninami a také znalost pravidel pro práci s logaritmy.

 Užití všech těchto pravidel bude vzápětí demonstrovat při ukázkách řešení různých typů exponenciálních a logaritmických rovnic. Je dobré zapojit hned od začátku do diskuse o jednotlivých krocích řešení celou třídu. Řešení některých rovnic lze zjednodušit použitím vhodných „umělých“ úprav. Nazve-li učitel tyto úpravy „fintami“, studenti je obvykle velmi rádi přijmou jako dobré prostředky pro svá malá vítězství nad matematikou a někteří z nich se začnou pokoušet hledat ve vhodných úlohách další finty 😊.

 Učitel musí dbát na správnost, přehlednost a úplnost zápisů na tabuli. Pro většinu studentů jsou tyto zápisy vzorem, podle kterého provádějí vlastní zápisy do sešitu. I drobnosti, které se učiteli zdají být tak samozřejmé, že má tendenci je pouze konstatovat, ale na tabuli nenapsat, mohou být pro studenty nesmírně důležité.

**Exponenciální rovnice:**

**1**● *Rovnice vedoucí k typu*

**2**● *Rovnice vedoucí k typu , kde*

 a)

 *První způsob* určení *x*: *logaritmování* (obě strany rovnice jsou kladné)

 /:72

 /:41

 *Druhý způsob* určení *x*: *užitím definice logaritmu*

**3***● Rovnice vedoucí ke kvadratické rovnici (s eventuálním použitím substituce)*

 a) Subst.:

1.

 Subst.:

 /.y

(výše zmíněná „finta“ – vede k úpravě rovnice, v níž budou mít všechny mocniny s neznámou v exponentu stejný základ).

Pozn.: Učitel dosud stále zdůrazňoval, že rovnici nelze dělit výrazem s neznámou bez rozebrání situace, kdy se tento výraz rovná nule. Někdo ze studentů se na to teď může zeptat, případně učitel může položit otázku „Co když bude ?“. V ideálním případě zareagují studenti tvrzením podpořeným podobou exponenciály , že .

 c) / : …………………….

 Subst.:

**4**● *Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých*

 a)

 Subst.:

 /.2

 **Logaritmické rovnice:**

U logaritmických rovnic musíme počítat s celou řadou podmínek, které musí být splněny, aby měly rovnice smysl. Pokud najdeme všechny podmínky, dokážeme je úplně zpracovat a během výpočtů neprovedeme žádnou neekvivalentní úpravu, pak nemusíme pro potenciální kořeny, které s podmínkami nekolidují, provádět zkoušku. V opačném případě je zkouška nezbytnou součástí řešení.

**1●** *Nejjednodušší rovnice typu log a x = b, a > 0, a ≠ 1, bR*

1. Podm.:

1. Podm.:

Podm.: 1)

 2)

1.

 /2 ekvivalentní úprava

neodpovídá

podmínkám

Podm.:

Dalších podmínek je řada, např. , …

Výpočty podmínek komplikované – nedořešíme je a raději na závěr provedeme zkoušku.

1.

Zkouška:

 **2**● *Rovnice vedoucí k typu log a f(x) = log a g(x), kde a > 0, a ≠ 1*

Podm.: 1)

 2)

 3)

 a)

Podm.: 1)

 2)

 3)

neodpovídá podmínkám

**3***● Rovnice vedoucí ke kvadratické rovnici (s eventuálním použitím substituce)*

 *a)* Subst.:

Podm.: 1)

 2)

 3)

 Pozor! Na podmínky 2), 3) studenti zapomínají …

 /.

 b)

Podm.: 1)

 2)

 Subst.:

 /.*y*

 2)

 Subst.:

Podm.:

1. 2)

 V této úloze je třeba věnovat velkou pozornost exponentům – rozlišovat, kdy jde o umocnění funkce a kdy o umocnění jejího argumentu!!!

 Subst.:

Podm.: 1)

 2)

1) 2)

Podm.:

1. / logaritmujeme

 Subst.:

 1) 2)

 **4**● *Rovnice obsahující logaritmy s různými základy (včetně úloh s neznámou v základu logaritmu)*

 a)

Podm.:

 Subst.:

Podm.: 1)

 2)

 Subst.:

 /.*2y*

1. 2)
2.

 Subst.:

Podm.: 1)

 2) 5

 /.

 ***5****● Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých*

Podm.: 1)

 2)

 3)

 4)

 Subst.:

1.

 /.

Podm.:

 Subst.:

;

 ;

**Exponenciální nerovnice:**

 K řešení využíváme zejména ▪ ekvivalentní úpravy nerovnic; ▪ vlastnosti exponenciálních funkcí (zejména monotónnost – – připomeňme: nechť *f: y = ax*. Pak pro ; ▪ u složitějších nerovnic i substituci.

1.

 /.2

 /:

x

2

x

y

-2

4

1.

1. způsob

1. způsob

x

2

1. Subst.:

x

y

1

2

0

1

x

y

2

x

y

-2

1

x

y

-2

1

1. Subst.:

 …

 **Logaritmické nerovnice:**

Podm.:

1.

3

x

Podm.:

y

x

8

0

x

y

-1

9

8

0

Podm.: 1)

 2)

-

-

1.

-3

3

x

y

1.

x

y

0

8

3

Podm.: 1)

 2)

x

y

3

0

-2

Podm.: 1)

 2) tuto podmínku není

 třeba podrobně řešit, zohledníme ji při řešení

 „hlavní“ nerovnice

1. Subst.:

 /.(-1)

Podm.: 1)

 2)

 Subst.:

Základní poznatky:

1. Řešte v R: a) MA 2017: 3⋅ 9x - 9x = 6 b) 3x = 10 c) 42x - 6⋅4x + 8 = 0

[a)  b) log310 c) ; 1]

1. Řešte v R: a) MA 2017:  b)

 [a) 243 b) ; 2]

Typové příklady standardní náročnosti

Následující rovnice a nerovnice řešte v R.

1.  [2]
2.  [12]
3. 52x-3 - 2⋅5x-2 = 3 [2]
4. MA+ 2017:  [9]
5. log(x+1) + log(x-1) – log x = log(x+2) []
6.  [10;]
7.  [1; 3]
8. a) <  b) 4x+5 < 16x+1 [a), b) ]
9. a)  > 0 b) 

[a), ]

Rozšiřující cvičení

1.  [5;]

1. 3log x +5log y = 14

32log x -52log y = 56 [100;10]