

23 Exponenciální a logaritmické rovnice – met.

Stručný přehled teorie

Exponenciální rovnice

- obsahuje neznámou v exponentu některé mocniny
- základní tvar: $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbf{R}$
- řešení: a) Je-li $a = b \neq 1$, pak $f(x) = g(x)$ (rovnají-li se základy mocnin, rovnají se i exponenty)
b) Je-li $a \neq b$, použijeme logaritmování: $f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b$, (kde $c \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$)

Pozn.: Složitější exp. rovnice se řeší převedením na základní tvar, popřípadě na algebraickou rovnici (s častým použitím substituce $a^x = y$ ($a > 0$, $a \neq 1$)).

Logaritmická rovnice

- obsahuje logaritmy výrazů s neznámou $x \in \mathbf{R}$
- nejjednodušší tvar: $\log_a x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbf{R}$ (její řešení podle definice logaritmu je $x = a^b$)
- řešení na základě věty: Jestliže $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, pak $f(x) = g(x)$ (rovnají-li se logaritmy dvou kladných čísel o stejném základu, rovnají se i tato čísla)

Pozn.: 1) Platnost předchozí věty je podmíněna splněním podmínek $f(x) > 0$ a $g(x) > 0$. Pokud je nestanovíme předem, zkouška je nutnou součástí řešení.

2) Složitější log. rovnice - řešení často usnadňuje vhodná substituce (např. $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)) a převod rovnice z log. na algebraickou.

- Věty o logaritmech: Nechť $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $r \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$

$$1) \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$2) \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$3) \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$4) \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

$$5) \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, \text{ kde } a > 0, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1$$

Pozn.: Velký význam věty 5! - Umožňuje převod logaritmu při jednom základu na logaritmus při jiném základu! (Při řešení log. rovnic je často třeba dosáhnout toho, aby všechny logaritmy v rovnici měly stejný základ!)

Met.: Hned v úvodu tohoto tématu by měl učitel studentům zdůraznit, jak nesmírně důležitá bude pro úspěšné zvládnání exponenciálních a logaritmických rovnic a nerovnic znalost pravidel pro počítání s mocninami a odmocninami a také znalost pravidel pro práci s logaritmy. Užití všech těchto pravidel bude vzápětí demonstrovat při ukázkách řešení různých typů exponenciálních a logaritmických rovnic. Je dobré zapojit hned od začátku do diskuse o jednotlivých krocích řešení celou třídu. Řešení některých rovnic lze zjednodušit použitím vhodných „umělých“ úprav. Nazve-li učitel tyto úpravy „fintami“, studenti je obvykle velmi rádi přijmou jako dobré prostředky pro svá malá vítězství nad matematikou a někteří z nich se začnou pokoušet hledat ve vhodných úlohách další finty 😊. Učitel musí dbát na správnost, přehlednost a úplnost zápisů na tabuli. Pro většinu studentů jsou tyto zápisy vzorem, podle kterého provádějí vlastní zápisy do sešitu. I drobnosti, které se učiteli zdají být tak samozřejmé, že má tendenci je pouze konstatovat, ale na tabuli nenapsat, mohou být pro studenty nesmírně důležité.

Exponenciální rovnice:

1• **Rovnice vedoucí k typu** $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

a) $4 \cdot 2^{x^2} = 2^{3x}$
 $2^{2+x^2} = 2^{3x}$
 $x^2 + 2 = 3x$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x - 2) \cdot (x - 1) = 0$
 $K = \{1; 2\}$

b) $2^{2x} \cdot 5^x - 2^{2x-1} \cdot 5^{x+1} = -600$
 $4^x \cdot 5^x - \frac{4^x}{2} \cdot 5 \cdot 5^x = -600$
 $20^x - \frac{5}{2} \cdot 20^x = -600$
 $\frac{3}{2} \cdot 20^x = 600$
 $20^x = 400 \rightarrow x = 2$
 $K = \{2\}$

2• **Rovnice vedoucí k typu** $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, kde $a \neq b$

a) $2^x - 3^x = 2^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1}$
 $2^x - \frac{2^x}{2} = 3^x + 5 \cdot \frac{3^x}{3}$
 $\frac{2^x}{2} = 3^x \cdot \frac{8}{3}$
 $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{3}$

První způsob určení x : **logaritmování** (obě strany rovnice jsou kladné)

$$x \cdot \log \frac{2}{3} = \log \frac{16}{3} \rightarrow x = \frac{\log \frac{16}{3}}{\log \frac{2}{3}} = \log_2 \frac{16}{3} \quad K = \left\{ \log_2 \frac{16}{3} \right\}$$

b) $6 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} = 82$

$$6 \cdot 7 \cdot 7^2 \cdot 7^x - 7^2 \cdot 7^x = 82 \quad /:7^2$$

$$42 \cdot 7^x - 7^x = \frac{82}{49}$$

$$41 \cdot 7^x = \frac{82}{49} \quad /:41$$

$$7^x = \frac{2}{49}$$

Druhý způsob určení x : **užitím definice logaritmu**

$$x = \log_7 \frac{2}{49} \quad K = \left\{ \log_7 \frac{2}{49} \right\}$$

3• Rovnice vedoucí ke kvadratické rovnici (s eventuálním použitím substituce)

a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

Subst.: $2^x = y$, $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = y^2$

$$y^2 - 9y + 8 = 0$$

$$(y - 1) \cdot (y - 8) = 0$$

$$y = 1 \vee y = 8$$

$$2^x = 1 \vee 2^x = 8$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

$$K = \{0; 3\}$$

b) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} = 7$

$$3 \cdot 3^x + \frac{2}{3^x} = 7$$

Subst.: $3^x = y$

$$3y + \frac{2}{y} = 7 \quad | \cdot y$$

$$3y^2 - 7y + 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} = < \frac{2}{3}$$

$$3^x = 2 \vee 3^x = \frac{1}{3}$$

$$x = \log_3 2 \vee x = -1$$

$$K = \{-1; \log_3 2\}$$

c) $7 \cdot 6^x - 2 \cdot 4^x = 6 \cdot 9^x$ / $:9^x$

$$7 \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 6 \quad \text{Subst.: } \left(\frac{2}{3}\right)^x = y$$

(výše zmíněná „finta“ – vede k úpravě rovnice, v níž budou mít všechny mocniny s neznámou v exponentu stejný základ).

$$2y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = < \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \vee \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$$

$$x = \log_{\frac{2}{3}} 2 \vee x = -1$$

$$K = \left\{-1; \log_{\frac{2}{3}} 2\right\}$$

Pozn.: Učitel dosud stále zdůrazňoval, že rovnici nelze dělit výrazem s neznámou bez rozebrání situace, kdy se tento výraz rovná nule. Někdo ze studentů se na to teď může zeptat, případně učitel může položit otázku „Co když bude $9^x = 0$?“. V ideálním případě zareagují studenti tvrzením podpořeným podobou exponenciály $f: y = 9^x$, že $\forall x \in \mathbb{R}: 9^x > 0$.

4• Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých

a) $4^{x+y} = 128$
 $5^{3x-2y-3} = 1$

$$2(x + y) = 7$$

$$3x - 2y - 3 = 0$$

$$2x + 2y = 7$$

$$3x - 2y = 3$$

$$5x = 10 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$K = \left\{\left[2; \frac{3}{2}\right]\right\}$$

$$b) \begin{cases} 2 \cdot 2^{x-y} + 2^{x+y-1} = 20 \\ 10 \cdot 2^{x-y-1} - 2^{x+y} = -22 \end{cases}$$

$$\text{Subst.: } 2^{x-y} = a$$

$$2^{x+y} = b$$

$$2a + \frac{b}{2} = 20 \quad / \cdot 2$$

$$10 \frac{a}{2} - b = -22$$

$$4a + b = 40$$

$$5a - b = -22$$

$$9a = 18 \rightarrow a = 2 \rightarrow b = 32$$

 \implies

$$2^{x-y} = 2$$

$$2^{x+y} = 2^5$$

$\implies \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

$$2x = 6 \rightarrow x = 3$$

$$\rightarrow y = 2$$

$$K = \{[3; 2]\}$$

Logaritmické rovnice:

U logaritmických rovnic musíme počítat s celou řadou podmínek, které musí být splněny, aby měly rovnice smysl. Pokud najdeme všechny podmínky, dokážeme je úplně zpracovat a během výpočtů neprovedeme žádnou neekvivalentní úpravu, pak nemusíme pro potenciální kořeny, které s podmínkami nekolidují, provádět zkoušku. V opačném případě je zkouška nezbytnou součástí řešení.

1• Nejjednodušší rovnice typu $\log_a x = b, a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$

$$a) \begin{cases} \log_2(x+1) = 3 \\ x+1 = 2^3 \\ x = 7 \\ K = \{7\} \end{cases}$$

$$\text{Podm.: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2 \\ 2-x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\ 2-x = 4 \\ x = -2 \\ K = \{-2\} \end{cases}$$

$$\text{Podm.: } 2-x > 0 \\ x < 0$$

$$c) \begin{cases} \log_8 \sqrt{x+30} + \log_8 \sqrt{x} = 1 \\ \log_8 \sqrt{(x+30) \cdot x} = 1 \\ \sqrt{(x+30) \cdot x} = 8 \quad / ^2 \text{ ekvivalentní úprava} \\ x^2 + 30x - 64 = 0 \\ (x+32) \cdot (x-2) = 0 \\ x = \cancel{-32} \vee x = 2 \\ \text{neodpovídá} \\ \text{podmínkám} \\ K = \{2\} \end{cases}$$

$$\text{Podm.: } \left. \begin{array}{l} 1) x+30 > 0 \rightarrow x > -30 \\ 2) x > 0 \end{array} \right\} x > 0$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad & \log_9\{3 \log_2[1 + \log_3(1 - 2 \log_3 x)]\} = 0,5 \\
 & 3 \log_2[1 + \log_3(1 - 2 \log_3 x)] = 9^{0,5} = 3 \\
 & \log_2[1 + \log_3(1 - 2 \log_3 x)] = 1 \\
 & 1 + \log_3(1 - 2 \log_3 x) = 2 \\
 & \log_3(1 - 2 \log_3 x) = 1 \\
 & 1 - 2 \log_3 x = 3 \\
 & \log_3 x = -1 \\
 & x = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Podm.: $x > 0$.

Dalších podmínek je řada, např. $1 - 2 \log_3 x > 0$,
 $1 + \log_3(1 - 2 \log_3 x) > 0$, ...

Výpočty podmínek komplikované – nedořešíme je
a raději na závěr provedeme zkoušku.

$$\begin{aligned}
 \text{Zkouška: } L_{\left(\frac{1}{3}\right)} &= \log_9\left\{3 \log_2\left[1 + \log_3\left(1 - 2 \log_3 \frac{1}{3}\right)\right]\right\} = \log_9\{3 \log_2[1 + \log_3(1 - 2(-1))]\} = \\
 &= \log_9\{3 \log_2[1 + \log_3 3]\} = \log_9\{3 \log_2[1 + 1]\} = \log_9\{3 \log_2 2\} = \log_9\{3 \cdot 1\} = \log_9 3 = 0,5 \\
 P_{\left(\frac{1}{3}\right)} &= 0,5 \\
 L_{\left(\frac{1}{3}\right)} &= P_{\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \quad \quad K = \left\{\frac{1}{3}\right\}
 \end{aligned}$$

2• Rovnice vedoucí k typu $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, kde $a > 0$, $a \neq 1$

$$a) \quad \log(x+1) + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 8$$

$$\log \frac{(x+1)(x-1)}{x-2} = \log 8$$

$$\frac{x^2-1}{x-2} = 8$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3) \cdot (x-5) = 0$$

$$x = 3 \vee x = 5 \quad \implies \quad K = \{3; 5\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Podm.: } & 1) \ x + 1 > 0 \rightarrow x > -1 \\
 & 2) \ x - 1 > 0 \rightarrow x > 1 \\
 & 3) \ x - 2 > 0 \rightarrow x > 2
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} 1) \\ 2) \\ 3) \end{aligned}} \right\} x > 2$$

$$b) \quad \log_5(2x+9) + \log_5(4-3x) = 2 + \log_5(4+x)$$

$$\log_5(2x+9) + \log_5(4-3x) = \log_5 25 + \log_5(4+x)$$

$$\log_5(2x+9) \cdot (4-3x) = \log_5 25 \cdot (4+x)$$

$$-6x^2 - 19x + 36 = 100 + 25x$$

$$6x^2 + 44x + 64 = 0$$

$$3x^2 + 22x + 32 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{484 - 384}}{6} = \frac{-22 \pm 10}{6} = < \frac{-16}{3} \text{ neodpovídá podmínkám}$$

$$K = \{-2\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Podm.: } & 1) \ 2x + 9 > 0 \rightarrow x > -\frac{9}{2} \\
 & 2) \ 4 - 3x > 0 \rightarrow x < \frac{4}{3} \\
 & 3) \ 4 + x > 0 \rightarrow x > -4
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} 1) \\ 2) \\ 3) \end{aligned}} \right\} x \in \left(-4; \frac{4}{3}\right)$$

3• Rovnice vedoucí ke kvadratické rovnici (s eventuálním použitím substituce)

a) $\frac{1}{\log x + 1} + \frac{6}{\log x + 5} = 1$ Subst.: $\log x = y$

$$\frac{1}{y+1} + \frac{6}{y+5} = 1 \quad / \cdot (y+1) \cdot (y+5)$$

$$y + 5 + 6y + 6 = y^2 + 6y + 5$$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$(y - 3) \cdot (y + 2) = 0$$

$$y = 3 \quad \vee \quad y = -2$$

$$\log x = 3 \quad \vee \quad \log x = -2$$

$$x = 1000 \quad \vee \quad x = \frac{1}{100}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{100}; 1000 \right\}$$

Podm.: 1) $x > 0$

$$2) \log x + 1 \neq 0 \rightarrow \log x \neq -1 \rightarrow x \neq \frac{1}{10}$$

$$3) \log x + 5 \neq 0 \rightarrow \log x \neq -5 \rightarrow x \neq \frac{1}{10^5}$$

$$x \in (0; \infty) - \left\{ \frac{1}{10}; \frac{1}{10^5} \right\}$$

Pozor! Na podmínky 2), 3) studenti zapomínají ...

b) $\log x^3 + 2 = \frac{10}{\log x^2}$

$$3 \cdot \log x + 2 = \frac{10}{2 \cdot \log x} \quad \text{Subst.: } \log x = y$$

$$3 \cdot y + 2 = \frac{10}{2 \cdot y} \quad / \cdot y$$

$$3y^2 + 2y - 5 = 0 \rightarrow y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \left\langle \frac{1}{3}; -\frac{5}{3} \right\rangle$$

Podm.: 1) $x > 0$

$$2) \log x \neq 0 \rightarrow \log x \neq 1$$

$$x \in (0; \infty) - \{1\}$$

$$1) \log x = 1 \rightarrow x = 10 \quad 2) \log x = -\frac{5}{3} \rightarrow x = 10^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10^5}} = \frac{1}{10 \cdot \sqrt[3]{10^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{100}$$

$$K = \left\{ 10; \frac{\sqrt[3]{10}}{100} \right\}$$

c) $\log^2 x - \log x^4 + 3 = 0$

$$(\log x)^2 - 4 \log x + 3 = 0 \quad \text{Subst.: } \log x = y$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y - 1)(y - 3) = 0$$

$$1) \log x = 1 \rightarrow x = 10 \quad 2) \log x = 3 \rightarrow x = 1000$$

$$K = \{10; 1000\}$$

Podm.: $x > 0$

V této úloze je třeba věnovat velkou pozornost exponentům – rozlišovat, kdy jde o umocnění funkce a kdy o umocnění jejího argumentu!!!

$$d) \log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1}$$

$$\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{4} - 1} \quad \text{Subst.: } \log_2 \frac{x}{4} = y$$

$$\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{4} + \log_2 2^{-1} - 1}$$

$$y = \frac{15}{y-1-1}$$

$$y^2 - 2y - 15 = 0$$

$$(y - 5) \cdot (y + 3) = 0$$

$$1) \log_2 \frac{x}{4} = -3 \rightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{8} \rightarrow x = \frac{1}{2} \quad 2) \log_2 \frac{x}{4} = 5 \rightarrow \frac{x}{4} = 32 \rightarrow x = 128 \quad K = \left\{ \frac{1}{2}; 128 \right\}$$

Podm.: 1) $x > 0$

$$2) \log_2 \frac{x}{8} \neq 1 \rightarrow \frac{x}{8} \neq 2 \rightarrow x \neq 16$$

$$x \in (0; \infty) - \{16\}$$

$$e) x^{\log x} = 1000x^2 / \text{logaritmuje}$$

$$\log x^{\log x} = \log 1000x^2$$

$$(\log x)^2 = \log 1000 + \log x^2 \quad \text{Subst.: } \log x = y$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$(y - 3) \cdot (y + 1) = 0$$

$$1) \log x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{10} \quad 2) \log x = 3 \rightarrow x = 1000$$

$$K = \left\{ \frac{1}{10}; 1000 \right\}$$

Podm.: $x > 0$

4• Rovnice obsahující logaritmy s různými základy (včetně úloh s neznámou v základu logaritmu)

$$a) 2 \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9$$

Podm.: $x > 0$

$$2 \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = 9 \quad \text{Subst.: } \log_2 x = y$$

$$2y + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 9$$

$$3y = 9 \rightarrow y = 3 \rightarrow \log_2 x = 3 \rightarrow x = 8$$

$$K = \{8\}$$

$$b) \log_x 4 + \log_4 x = \log_2 x$$

$$\frac{\log_2 4}{\log_2 x} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 x \quad \text{Subst.: } \log_2 x = y$$

$$\frac{2}{y} + \frac{y}{2} = y \quad / \cdot 2y$$

$$4 + y^2 = 2y^2$$

$$y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$

$$1) \log_2 x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{4} \quad 2) \log_2 x = 2 \rightarrow x = 4$$

$$K = \left\{ \frac{1}{4}; 4 \right\}$$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $x \neq 1$

$$x \in (0; \infty) - \{1\}$$

c) $\log_5^2 x + \log_{5x}^5 = 1$

$$\log_5^2 x + \frac{\log_5^5 x}{\log_5 5x} = 1$$

$$\log_5^2 x + \frac{\log_5^5 x - \log_5 x}{\log_5 5 + \log_5 x} = 1 \quad \text{Subst.: } \log_5 x = y$$

$$y^2 + \frac{1-y}{1+y} = 1 \quad / \cdot (1+y)$$

$$y^3 + y^2 + 1 - y = 1 + y$$

$$y^3 + y^2 - 2y = 0$$

$$y(y^2 + y - 2) = 0$$

$$y = 0 \vee (y+2) \cdot (y-1) = 0$$

$$y = 0 \vee y = -2 \vee y = 1$$

1) $\log_5 x = 0 \rightarrow x = 1$ 2) $\log_5 x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{25}$ 3) $\log_5 x = 1 \rightarrow x = 5$ $K = \left\{ \frac{1}{25}; 1; 5 \right\}$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $5x \neq 1$

$x \in (0; \infty) - \left\{ \frac{1}{5} \right\}$

5• **Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých**

a) $\log_3 x + \log_9 y = \frac{3}{2}$

$$\log_x 3 + \log_y 9 = 3$$

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 3} + \frac{\log_3 y}{\log_3 9} = \frac{3}{2} \quad \text{Subst.: } \log_3 x = a$$

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 3} + \frac{\log_3 9}{\log_3 y} = 3 \quad \log_3 y = b$$

$$a + \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \quad \iff \quad a = \frac{3-b}{2}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 3$$

$$\frac{2}{3-b} + \frac{2}{b} = 3 \quad / \cdot (3-b) \cdot b$$

$$2b + 6 - 2b = 9b - 3b^2$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$(b-1) \cdot (b-2) = 0$$

$$b = 1 \vee b = 2$$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $x \neq 1$

$x \in (0; \infty) - \{1\}$

3) $y > 0$

4) $y \neq 1$

$y \in (0; \infty) - \{1\}$

1) $b = \log_3 y = 1 \rightarrow y = 3$

$$a = \frac{3-b}{2} = 1 = \log_3 x \rightarrow x = 3$$

2) $b = \log_3 y = 2 \rightarrow y = 9$

$$a = \frac{3-b}{2} = \frac{1}{2} = \log_3 x \rightarrow x = \sqrt{3}$$

$K = \{[3; 3], [\sqrt{3}; 9]\}$

$$\begin{cases} 5^{\log x} + 3^{\log y} = 4 \\ 5^{2 \log x} - 3^{2 \log y} = -8 \end{cases}$$

$$\text{Subst.: } 5^{\log x} = a; 3^{\log y} = b$$

$$\text{Podm.: } x > 0$$

$$y > 0$$

$$a + b = 4$$

$$a^2 - b^2 = -8$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = -8 \iff 4 \cdot (a - b) = -8 \iff a - b = -2$$

$$a + b = 4$$

$$a - b = -2$$

$$a = 1; b = 3$$

$$5^{\log x} = 1 \rightarrow \log x = 0 \rightarrow x = 1;$$

$$3^{\log y} = 3 \rightarrow \log y = 1 \rightarrow y = 10$$

$$K = \{[1, 10]\}$$

Exponenciální nerovnice:

- K řešení využíváme zejména
- ekvivalentní úpravy nerovnic;
 - vlastnosti exponenciálních funkcí (zejména monotónnost –
 - připomeňme: necht' $f: y = a^x$. Pak pro $a > 1$ je f **rostoucí**, pro $0 < a < 1$ je f **klesající**;
 - u složitějších nerovnic i substituci.

$$\text{a) } 0,01^{x+3} < \sqrt{10}$$

$$10^{-2 \cdot (x+3)} < 10^{\frac{1}{2}}$$

$$-2x - 6 < \frac{1}{2} / :2$$

$$-4x - 12 < 1$$

$$-4x < 13 / :(-4)$$

$$x > -\frac{13}{4}$$

$a > 1 \rightarrow$ exponenciální funkce využívaná při řešení je **rostoucí**

$$K = \left(-\frac{13}{4}; \infty\right)$$

$$\text{b) } \frac{1}{2^{x^2}} \cdot 4^{x+1} < \frac{1}{64}$$

$$2^{-x^2+2x+2} < 2^{-6}$$

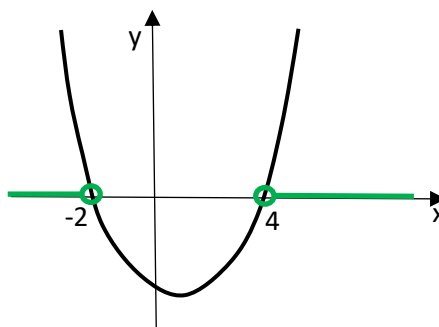
$$a > 1$$

$$-x^2 + 2x + 8 < 0$$

$$x^2 - 2x - 8 > 0$$

$$(x + 2) \cdot (x - 4) > 0$$

$$K = (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$$



$$\text{c) } 0,2^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$$

$$1. \text{ způsob } (5^{-1})^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$$

$$5^{\frac{3-2x}{x-2}} > 5$$

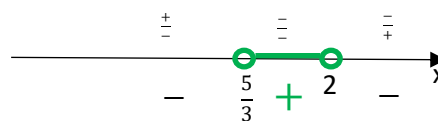
$$a > 1$$

$$\frac{3-2x}{x-2} > 1$$

$$\frac{3-2x}{x-2} - 1 > 0$$

$$\frac{5-3x}{x-2} > 0$$

$$K = \left(\frac{5}{3}; 2\right)$$



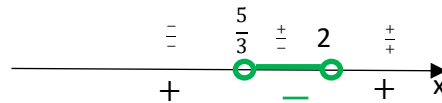
2. způsob $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x-3}{x-2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ $0 < a < 1 \rightarrow$ exponenciální funkce využívaná při řešení je **klesající**

$$\frac{2x-3}{x-2} < -1$$

$$\frac{2x-3}{x-2} + 1 < 0$$

$$\frac{3x-5}{x-2} < 0$$

$$K = \left(\frac{5}{3}; 2\right)$$



d) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$

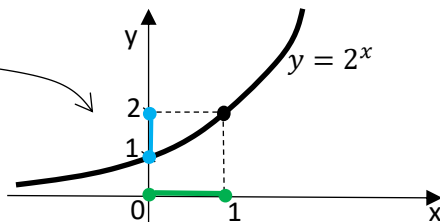
Subst.: $2^x = y; \quad 4^x = y^2$

$$y^2 - 3y + 2 \leq 0$$

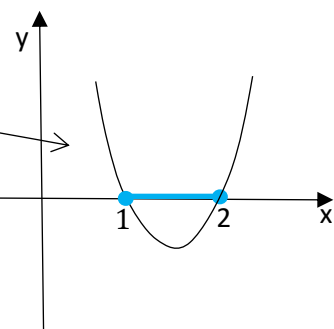
$$(y-1) \cdot (y-2) \leq 0$$

$$y \in \langle 1; 2 \rangle$$

$$2^x \in \langle 1; 2 \rangle$$



$$K = \langle 0; 1 \rangle$$



e) $\frac{1}{2^{x+2}} \geq \frac{2^x}{2^{x-1}}$

Subst.: $2^x = y$

$$\frac{1}{y+2} \geq \frac{y}{y-1}$$

$$\frac{1}{y+2} - \frac{y}{y-1} \geq 0$$

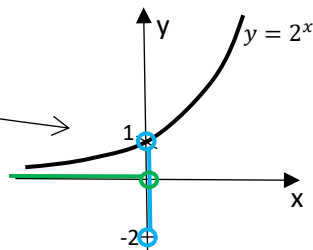
$$\frac{y-1-y^2-2y}{(y+2)(y-1)} \geq 0$$

$$\frac{-(y^2+y+1)}{(y+2)(y-1)} \geq 0 \quad \dots \forall y \in \mathbb{R}: y^2+y+1 > 0, \text{ proto } -(y^2+y+1) < 0$$

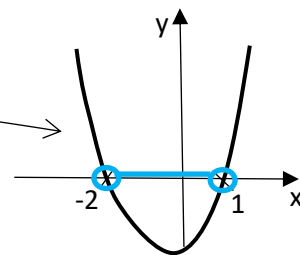
$$(y+2) \cdot (y-1) < 0$$

$$y \in (-2; 1)$$

$$2^x \in (-2; 1)$$



$$K = (-\infty; 0)$$



Logaritmické nerovnice:

a) $\log_7 \frac{2x-6}{2x-1} > 0$ $a > 1$

$$\frac{2x-6}{2x-1} > 7^0$$

$$\frac{2x-6}{2x-1} - 1 > 0$$

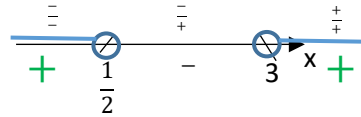
$$\frac{2x-6-2x+1}{2x-1} > 0$$

$$\frac{-5}{2x-1} > 0$$

$$2x - 1 < 0$$

$$x < \frac{1}{2} \rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$$

Podm.: $\frac{2x-6}{2x-1} > 0$



$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3; \infty)$$

$$K = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$$

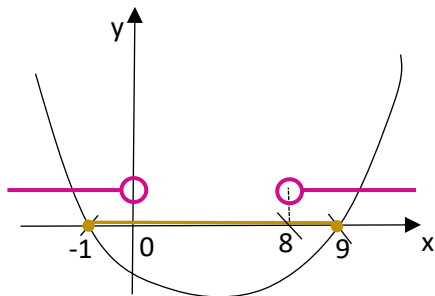
b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 8x) + 2 \geq 0$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 8x) \geq -2 \quad 0 < a < 1$$

$$x^2 - 8x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$x^2 - 8x - 9 \leq 0$$

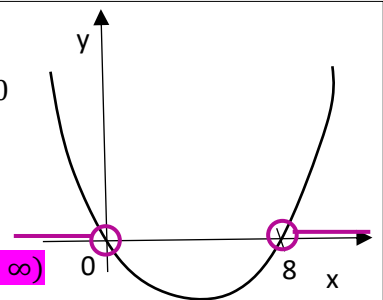
$$(x+1) \cdot (x-9) \leq 0$$



$$x \in \langle -1; 9 \rangle$$

Podm.: $x^2 - 8x > 0$

$$x \cdot (x - 8) > 0$$



$$x \in (-\infty; 0) \cup (8; \infty)$$

$$K = \langle -1; 0 \rangle \cup (8; 9)$$

c) $\log_{\frac{1}{5}} \log_4(x^2 - 5) \geq 0$

$0 < a = \frac{1}{5} < 1$

$\log_4(x^2 - 5) \leq \left(\frac{1}{5}\right)^0$

$\log_4(x^2 - 5) \leq 1$

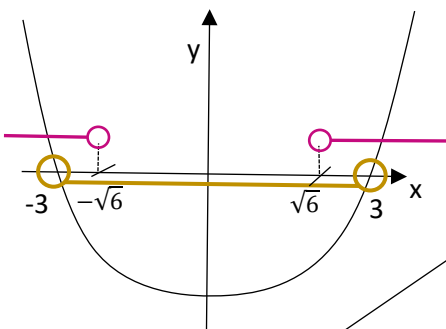
$a = 4 > 1$

$x^2 - 5 \leq 4$

$x^2 - 9 < 0$

$(x + 3) \cdot (x - 3) < 0$

$x \in (-3; 3)$



Podm.: 1) $x^2 - 5 > 0$

$x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$

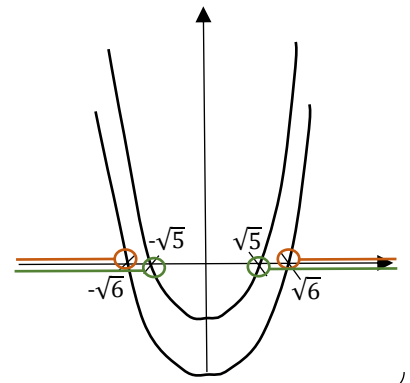
2) $\log_4(x^2 - 5) > 0$ $a > 1$

$x^2 - 5 > 4^0$

$x^2 - 6 > 0$

$x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; \infty)$

$x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; \infty)$



$K = (-3; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; 3)$

d) $\log_{20}(x^2 - 3x) \leq \log_{20} x + \log_{20} 5$

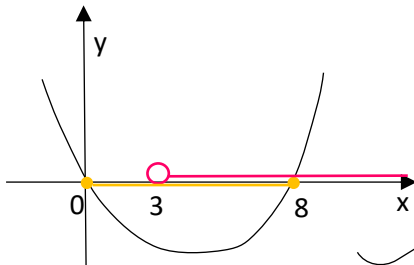
$\log_{20}(x^2 - 3x) \leq \log_{20} 5x$ $a > 1$

$x^2 - 3x \leq 5x$

$x^2 - 8x \leq 0$

$x \cdot (x - 8) \leq 0$

$x \in (0; 8]$



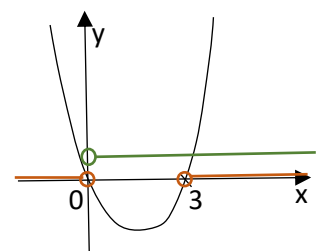
Podm.: 1) $x^2 - 3x > 0$

$x \cdot (x - 3) > 0$

$x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$

2) $x > 0$

$x \in (3; \infty)$



$K = (3; 8)$

e) $\frac{1-\log x}{2+\log x} \geq 1$ Subst.: $\log x = y$

$$\frac{1-y}{2+y} \geq 1$$

$$\frac{1-y}{2+y} - 1 \geq 0$$

$$\frac{1-y-2-y}{2+y} \geq 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\frac{2y+1}{2+y} \leq 0$$

$$y = \log x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \quad a > 1$$

$$\log x > -2 \quad \wedge \quad \log x \leq -\frac{1}{2}$$

$$10^{-2} < x \leq 10^{-\frac{1}{2}}$$

$$x \in \left(\frac{1}{100}; \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $\log x \neq -2$ tuto podmínku není třeba podrobně řešit, zohledníme ji při řešení „hlavní“ nerovnice

$$K = \left(\frac{1}{100}; \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

f) $\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$

$$\log_2(x+1) > \frac{\log_2 16}{\log_2(x+1)} \quad \text{Subst.: } \log_2(x+1) = y$$

$$y > \frac{4}{y}$$

$$y - \frac{4}{y} > 0$$

$$\frac{y^2-4}{y} > 0$$

$$\frac{(y+2)(y-2)}{y} > 0$$

$$y \in (-2; 0) \cup (2; \infty)$$

$$-2 < \log_2(x+1) < 0 \quad \vee \quad \log_2(x+1) > 2 \quad a > 1$$

$$2^{-2} < x+1 < 2^0 \quad \vee \quad x+1 > 2^2$$

$$-\frac{3}{4} < x < 0 \quad \vee \quad x > 3$$

Podm.: 1) $x+1 > 0$

$$x > -1$$

2) $x+1 \neq 1$

$$x \neq 0$$

$$x \in (-1; \infty) - \{0\}$$

$$K = \left(-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (3; \infty)$$

Základní poznatky:

1) Řešte v R: a) MA 2017: $3 \cdot 9^x - 9^x = 6$

b) $3^x = 10$ c) $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$

[a) $\frac{1}{2}$ b) $\log_3 10$ c) $\frac{1}{2}; 1$]

2) Řešte v R: a) MA 2017: $\log_3 3x = 6$

b) $\log_2^2 x + 2 \cdot \log_2 x - 3 = 0$

[a) 243 b) $\frac{1}{8}; 2$]

Typové příklady standardní náročnosti

Následující rovnice a nerovnice řešte v R.

3) $\left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{x-1} = \frac{3}{5}$ [2]

4) $4 \cdot \sqrt{2^{5-7x}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4^{3-5x}}$ [12]

5) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$ [2]

6) MA+ 2017: $\log_3 x + \log_3 \frac{x}{3} = \log_{\sqrt{3}} 3 + 1$ [9]

7) $\log(x+1) + \log(x-1) - \log x = \log(x+2)$ [\emptyset]

8) $\log x^3 + 2 = \frac{10}{\log x^2}$ [$10; \frac{\sqrt[3]{10}}{100}$]

9) $1994^{\log(x^2-4x+4)} = 1$ [1; 3]

10) a) $\left(\frac{1}{6}\right)^{3x} < \left(\frac{1}{6}\right)^{2x+8}$ b) $4^{x+5} < 16^{x+1}$ [a) $(8; \infty)$, b) $(3; \infty)$]

11) a) $\log_{\frac{4}{7}}(3x+2) > 0$ b) $\log_{20}(-3x+16) \leq \log_{20} x + \log_{20} 5$
[a) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right), \left(2; \frac{16}{3}\right)$]

Rozšiřující cvičení

12) $(\log_x \sqrt{5})^2 - \log_x 5\sqrt{5} + 1,25 = 0$ [$5; \sqrt[5]{5}$]

13) $3^{\log x} + 5^{\log y} = 14$
 $3^{2\log x} - 5^{2\log y} = 56$ [100; 10]