25 Goniometrické rovnice – met.

Stručný přehled teorie

Goniometrické rovnice: - obsahují neznámou **x** nebo výraz s neznámou **x** jako argumenty jedné nebo více goniometrických funkcí:
$f\big(\sin(g(x)), \cos(h(x)), \mathrm{tg}(j(x)), \mathrm{cotg}(k(x))\big) = 0$

Velmi často se při řešení goniometrických rovnic využívá takových úprav, kterými se získá rovnice obsahující jen jediný typ goniometrické funkce.

Typy goniometrických rovnic:

a) základní $\boxed{\left.\begin{array}{l}\sin x = a\\ \cos x = a\end{array}\right\}, \text{ kde } a \in \langle -1; 1\rangle}$ … tyto rovnice mají nekonečně mnoho řešení lišících

se periodou $2k\pi$, kde $k \in Z$

Pozn. Pro $a \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1\right\}$ musí zvládnout student gymnázia řešení těchto základních

rovnic bez kalkulačky, pouze s využitím jednotkové kružnice, případně grafu příslušné funkce

---

$\boxed{\left.\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = a\\ \mathrm{cotg}\, x = a\end{array}\right\}, \text{ kde } a \in R}$ … tyto rovnice mají nekonečně mnoho řešení lišících

se periodou $k\pi$, kde $k \in Z$

Pozn. Pro $a \in \left\{0, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm 1, \pm\sqrt{3}\right\}$ musí zvládnout student gymnázia řešení těchto základních rovnic

bez kalkulačky, pouze s využitím jednotkové kružnice, případně grafu příslušné funkce

---

Další příklady základních rovnic: a.sin f(x) = b, a.cos f(x) = b, a.tg f(x) = b, a.cotg f(x) = b

(Např. $2.\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$)

---

b) vedoucí k algebraické rovnici – např. ke kvadratické či bikvadratické rovnici
- řeší se většinou užitím substituce

(Např. $\sqrt{3}.tg^2\, x + 2.tg\, x - \sqrt{3} = 0$, $\sin^2 x + 2.\sin x - 3 = 0$, …)

c) využívající vztahů mezi goniometrickými funkcemi (většina goniometrických rovnic)

(Např. $6.\sin^2 x - 7.\cos x - 1 = 0$, $\sqrt{3}.\sin x - \cos x = \sqrt{2}$, $\sin 2x + \cos 2x = 1 + \mathrm{tg}\, x$, …)

d) využívající srovnání hodnot goniometrických funkcí

(Např. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\pi - 3x)$, …)

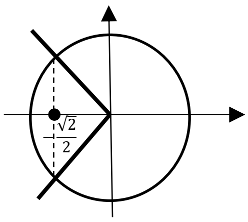
Met.: Téma goniometrických rovnic patří ve středoškolské matematice k tématům velmi náročným. Goniometrických rovnic existuje nepřeberné množství. Jejich kategorizace je obtížná a problematická, protože drtivá většina goniometrických rovnic nespadá striktně pouze do jediné kategorie, ať už ji specifikujeme jakkoli. O to větší pozornost musí učitel věnovat tomu, aby studenty naučil postupům, které jsou optimální při řešení nejjednodušších základních goniometrických rovnic. Pokud budou studenti tyto postupy znát a s jistotou zvládat, budou se moci pustit i do řešení komplikovanějších rovnic, které často obsahují více goniometrických funkcí i více členů. Při úpravách takových rovnic se nejčastěji používá buď jejich převedení (za pomoci vzorců) do základního tvaru, ve kterém se vyskytuje jen jediná goniometrická funkce, nebo se rovnice anuluje a jedna strana se převede na součin členů tak, aby v každém z nich byla jen jedna goniometrická funkce. Takto upravené rovnice lze pak zpravidla už bez větších potíží vyřešit.
Učitel samozřejmě musí obrátit pozornost studentů i na skutečnost, že před samotným řešením je nutné precizně zpracovat i podmínky, kterých v goniometrických rovnicích bývá často celá řada.

Goniometrické rovnice

$\boxed{2\cos x = -\sqrt{2}}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee\, x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$



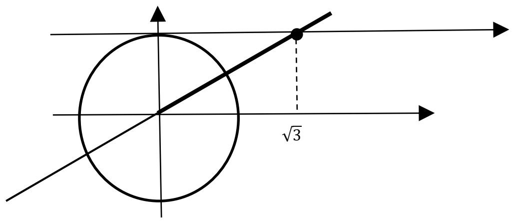
$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

$\boxed{\sqrt{5} + \sqrt{3}\operatorname{cotg} x = 3 + \sqrt{5}}$

Podm.: $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \ \rightarrow\ \sin x \neq 0 \ \rightarrow x \neq k\pi$

$\operatorname{cotg} x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

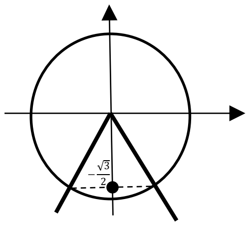


$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$

$\boxed{2\sin\left(5x - \frac{\pi}{7}\right) = -\sqrt{3}}$

Subst.: $y = 5x - \frac{\pi}{7}$

$\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$y = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad y = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

$5x - \frac{\pi}{7} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ \vee\ 5x - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

$5x = \frac{31\pi}{21} + 2k\pi \ \vee\ 5x = \frac{38\pi}{21} + 2k\pi$

$x = \frac{31\pi}{105} + \frac{2k\pi}{5} \ \vee\ x = \frac{38\pi}{105} + \frac{2k\pi}{5}$

$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{31\pi}{105} + \frac{2k\pi}{5}; \frac{38\pi}{105} + \frac{2k\pi}{5}\right\}$

$\boxed{\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1} = 2+\sqrt{3}} / .(\operatorname{tg} x - 1)$

Podm.: 1) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$

2) $\operatorname{tg} x - 1 \neq 0 \rightarrow \operatorname{tg} x \neq 1 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\operatorname{tg} x + 1 = 2 \operatorname{tg} x + \sqrt{3}.\operatorname{tg} x - 2 - \sqrt{3}$

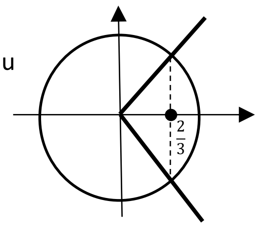
$\operatorname{tg} x.\left(\sqrt{3}+1\right) = \sqrt{3}+3$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}.\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+3\sqrt{3}-\sqrt{3}-3}{2} = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi;$

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi\right\}$

$\boxed{\cos x = \frac{2}{3}}$

① Přibližné řešení – s kalkulačkou



$x_{z1} \sim 0{,}84 \ \ldots \ \alpha_{z1} \sim 48°11'$

$x_{z2} \sim 5{,}44 \ \ldots \ \alpha_{z2} \sim 311°49'$

$K = \bigcup_{k \in Z} \{0{,}84 + 2k\pi;\ 5{,}44 + 2k\pi\}$

$K = \bigcup_{k \in Z} \{48°11' + k.360°;\ 311°49' + k.360°\}$

② Přesné řešení – s použitím **cyklometrických funkcí**

Pokud učiteli okolnosti dovolí zavést cyklometrické funkce, může je využít při řešení goniometrických rovnic a nerovnic. Je ovšem pravda, že čas na probírání těchto funkcí je velmi omezený a jejich používání při zápisech množin řešení goniometrických rovnic není bez úskalí. Cyklometrické funkce jsou inverzní funkce k odpovídajícím funkcím goniometrickým, jejichž definiční obory jsou omezeny tak, aby na nich byly funkce prosté (pozn. k funkcím, které nejsou prosté, inverzní funkce neexistují):

Goniometrické a cyklometrické funkce a jejich definiční obory:

Goniometrická funkce	Cyklometrická funkce
Sinus: $\sin x \ pro \ x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$	Arkus sinus: $\arcsin x \ pro \ x \in \langle -1; 1 \rangle$
Kosinus: $\cos x \ pro \ x \in \langle 0; \pi \rangle$	Arkus kosinus: $\arccos x \ pro \ x \in \langle -1; 1 \rangle$
Tangens: $\operatorname{tg} x \ pro \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	Arkus tangens: $\operatorname{arctg} x \ pro \ x \in R$
Kotangens: $\operatorname{cotg} x \ pro \ x \in (0; \pi)$	Arkus kotangens: $\operatorname{arccotg} x \ pro \ x \in R$

Studenti, kterým je práce s cyklometrickými funkcemi jasná, si mohou dovolit zapsat množinu řešení rovnice e) takto:

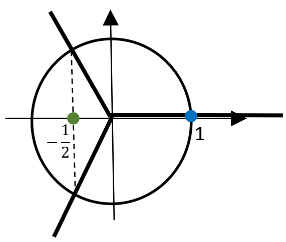
$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{arcsin\frac{2}{3} + 2k\pi;\ -arcsin\frac{2}{3} + 2k\pi\right\}$$

$\boxed{2\cos^2 x = \cos x + 1}$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ Subst.: $\cos x = y$

$2y^2 - y - 1 = 0$

$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = < \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$



$\cos x = 1 \quad \vee \quad \cos x = -\frac{1}{2}$

$x = 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

$$\boxed{4sin^4x - 5sin^2x = -1}$$

Subst.: $\sin^2 x = y$

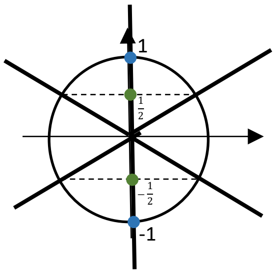
$4y^2 - 5y + 1 = 0$

$y_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8} = < \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{matrix}$

$\sin^2 x = 1 \quad \vee \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}$

$\sin x = \pm 1 \quad \vee \quad \sin x = \pm\frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$



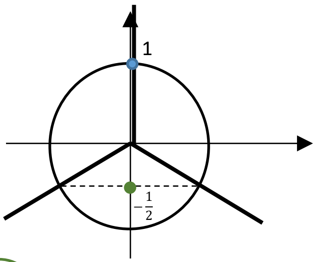
$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6} + k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + k\pi\right\}$$

$$\boxed{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1}$$

Subst.: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = y$

$2y^2 - y - 1 = 0$

$y = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = < \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$



$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \vee \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$

$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{11\pi}{12} + 2k\pi;\ \frac{19\pi}{12} + 2k\pi\right\}$$

$$\boxed{2\sin^2 x = 2 - \mathrm{cotg}^2 x}$$

Podm.: $\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow \sin x \neq 0 \rightarrow x \neq k\pi, k \in Z$

$2\sin^2 x = 2 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} /.\sin^2 x$

$2\sin^4 x - 2\sin^2 x + \cos^2 x = 0$

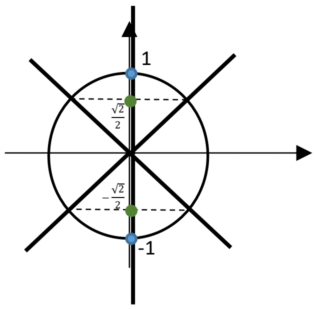
$2\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x = 0$

$2\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = 0$

Subst.: $\sin^2 x = y$

$2y^2 - 3y + 1 = 0$

$y_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} = < \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$



$\sin^2 x = 1 \quad \vee \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \pm 1 \quad \vee \quad \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}, k \in Z$

$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}\right\}$$

$\boxed{(\operatorname{tg} x + 1).(\operatorname{tg} x + 5) = 12}$

Podm.: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \;\rightarrow\; \cos x \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 7 = 0$

$y^2 + 6y - 7 = 0$ Subst.: $\operatorname{tg} x = y$

$(y+7).(y-1) = 0$

$y = -7 \quad \vee \quad y = 1$

$\operatorname{tg} x = -7 \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = 1$

$x = \operatorname{arctg}(-7) + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{\operatorname{arctg}(-7) + k\pi;\ \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$

nebo

$$K = \bigcup_{k \in Z} \{98°08' + k.180°;\ 45° + k.180°\}$$

$\boxed{2\sin^3 x - 3\sin x \cos x = 0}$

$\sin x.(2\sin^2 x - 3\cos x) = 0$

$\sin x = 0 \quad \vee \quad 2\sin^2 x - 3\cos x = 0$

$x = k\pi \quad \vee \quad 2.(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0$

$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ Subst.: $\cos x = y$

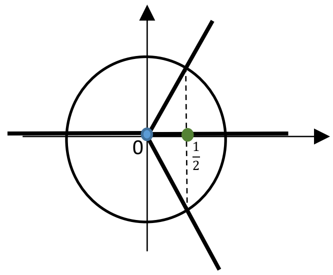
$2y^2 + 3y - 2 = 0$

$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = < \begin{matrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$

$y = -2 \quad \vee \quad y = \frac{1}{2}$

$\cos x = -2 \quad \vee \quad \cos x = \frac{1}{2}$

NELZE $\quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$



$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

$\boxed{\sqrt{3}.\sin x - \cos x = 1}$

1. způsob řešení

- využívá vzorce pro goniometrickou funkci součtu argumentů;
- vyžaduje jistou dávku „zručnosti“ a zkušenosti;
- není univerzální, nelze jej použít pro tento typ zadání vždy;
- pokud jej lze použít, vede rychle k řešení.

$\sqrt{3}.\sin x - \cos x = 1 / .\frac{1}{2}$ umělá úprava – finta …

$.\sin x - .\cos x = \frac{1}{2}$

$.\sin x - .\cos x = \frac{1}{2}$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi + 2k\pi$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ (2k+1)\pi\right\}$$

---

2. způsob řešení (univerzální)

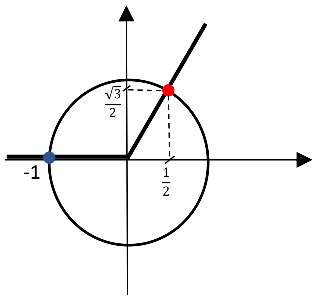
- vychází z toho, že se na zadanou rovnici díváme jako na rovnici o dvou neznámých $\sin x$ a $\cos x$;
- jako druhá rovnice o stejných neznámých poslouží základní vzorec $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

$\boxed{\sqrt{3}.\sin x - \cos x = 1}$ $\rightarrow$ $\cos x = \sqrt{3}.\sin x - 1$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin^2 x + \left(\sqrt{3}.\sin x - 1\right)^2 = 1$$
$$\sin^2 x + 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x + 1 = 1$$
$$4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x = 0$$
$$\sin x.\left(4\sin x - 2\sqrt{3}\right) = 0$$

$\vee$



$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ (2k+1)\pi\right\}$$

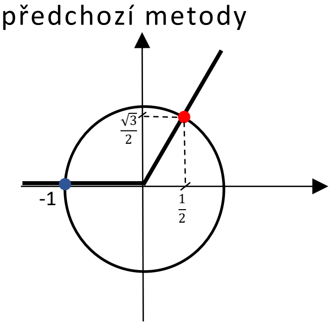
---

3. způsob řešení (univerzální)

- jde jen o jinou variantu předchozí metody

$\boxed{\sqrt{3}.\sin x - \cos x = 1}$

$$\sqrt{3}.\sin x = \cos x + 1 \quad /^2$$
$$3\sin^2 x = \cos^2 x + 2\cos x + 1$$
$$3.(1 - cos^2 x) = \cos^2 x + 2\cos x + 1$$
$$4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0$$
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \qquad \text{Subst.: } \cos x = y$$
$$2y^2 + y - 1 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = < \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$



$\vee$

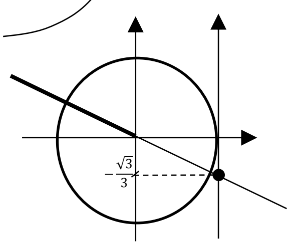
$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ (2k+1)\pi\right\}$$

$\boxed{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2.\sin x}$

$$\sin x.\cos\frac{\pi}{3} - \cos x.\sin\frac{\pi}{3} = 2.\sin x$$
$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 2.\sin x$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{3}{2}.\sin x \ /.\frac{2}{\cos x}$$
$$\mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$
$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi\right\}$$

Podm.: $\cos x \neq 0 \rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Co kdyby $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$? Pak by $\sin x = \pm 1$ a zadaná rovnice by byla $\boxed{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 2.}$ To ovšem znamená, že by neměla řešení.



$$\boxed{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1+\cos 2x}$$

$$\sin x\,.\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\,.\sin\frac{\pi}{6}+\cos x\,.\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\,.\sin\frac{\pi}{3}=1+\cos^2 x-\sin^2 x$$

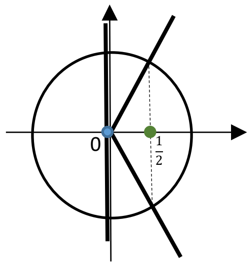
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=2\cos^2 x$$

$$2\cos^2 x-\cos x=0$$

$$\cos x\,.(2\cos x-1)=0$$

$$\cos x=0 \quad \vee \quad \cos x=\frac{1}{2}$$

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \vee \quad x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$



$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right\}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} x-\operatorname{tg} 40^\circ=\sin(50^\circ-x)}$$

Podm.: $\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}\to \sin x\neq 0\to$ $x\neq k.180^\circ,$ $k\in Z$

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}=\cos[90^\circ-(50^\circ-x)]$$

$$\frac{\cos x.\cos 40^\circ-\sin x.\sin 40^\circ}{\sin x.\cos 40^\circ}=\cos(x+40^\circ)\ /.\sin x\,.\cos 40^\circ$$

$$\cos(x+40^\circ)=\cos(x+40^\circ)\,.\sin x\,.\cos 40^\circ$$

$$\cos(x+40^\circ)\,.(1-\sin x\,.\cos 40^\circ)=0$$

$$\cos(x+40^\circ)=0 \qquad \vee \qquad 1-\sin x\,.\cos 40^\circ=0$$

$$x+40^\circ=90^\circ+k.180^\circ \qquad \vee \qquad \sin x=\frac{1}{\cos 40^\circ}$$

$x=50^\circ+k.180^\circ$ NELZE, neboť $0<\cos 40^\circ<1$, proto $\frac{1}{\cos 40^\circ}>1$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\{50^\circ+k.180^\circ\}$$

$$\boxed{\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos x=\sqrt{3}}$$

$$-2.\sin\frac{x+\frac{2\pi}{3}+x}{2}.\sin\frac{x+\frac{2\pi}{3}-x}{2}=\sqrt{3}$$

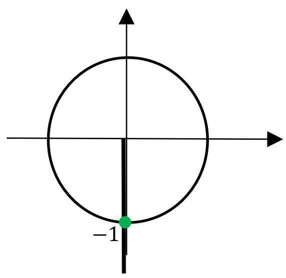
$$-2.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$-2.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

$$x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$$



$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right\}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin 2x}$$

$$2.\cos\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}.\sin\frac{\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}+x}{2}=\sin 2x$$

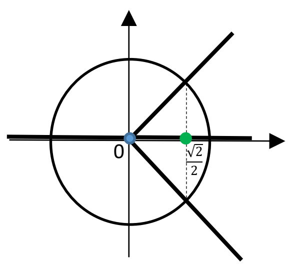
$$2.\cos\frac{\pi}{4}.\sin x=2\sin x\,.\cos x$$

$$2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin x-2\sin x\,.\cos x=0$$

$$\sqrt{2}\sin x.\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)=0$$

$$\sin x=0 \quad \vee \quad \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=k\pi \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad \vee \quad x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$$



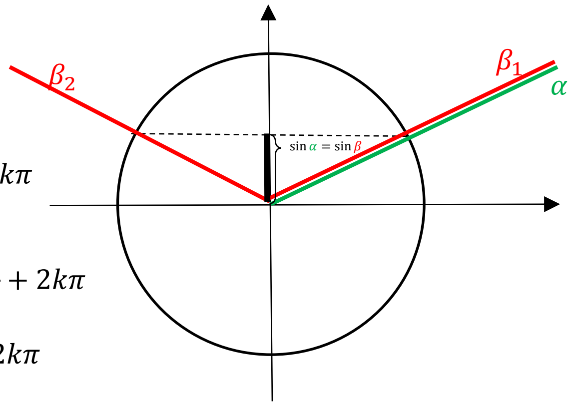
$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{k\pi;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{7\pi}{4}+2k\pi\right\}$$

$$\boxed{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Subst.: $x+\frac{\pi}{6}=\alpha, \qquad 4x-\frac{2\pi}{3}=\beta$

$$\sin\alpha=\sin\beta$$

1) $\beta_1=\alpha+2k\pi \qquad \vee \qquad$ 2) $\beta_2=\pi-\alpha+2k\pi$



$$4x-\frac{2\pi}{3}=x+\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad 4x-\frac{2\pi}{3}=\pi-x-\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$3x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad 5x=\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$x=\frac{5\pi}{18}+2k\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x=\frac{3\pi}{10}+2k\frac{\pi}{5}$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{5\pi}{18}+2k\frac{\pi}{3};\ \frac{3\pi}{10}+2k\frac{\pi}{5}\right\}$$

Pozn.: Tuto úlohu by jistě bylo možné řešit rovněž třeba za použití součtových vzorců. Jednalo by se však o velmi komplikovaný a časově náročný postup.

$$\boxed{\sin\left(3x+\frac{7\pi}{6}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Subst.: $3x+\frac{7\pi}{6}=\alpha, \qquad x+\frac{\pi}{4}=\beta$

$$\sin\alpha=-\cos\beta$$

1) $\beta_1=\frac{\pi}{2}+\alpha+2k\pi \qquad \vee \qquad$ 2) $\beta_2=\frac{3\pi}{2}-\alpha+2k\pi$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+3x+\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}-3x-\frac{7\pi}{6}+2k\pi$$

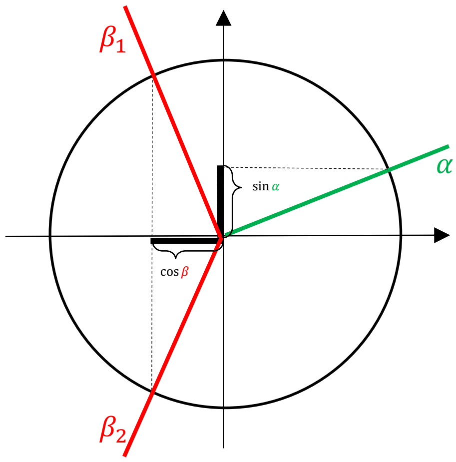
$$-2x=\frac{17\pi}{12}+2k\pi \quad \vee \quad 4x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$$

$$x=-\frac{17\pi}{24}-k\pi \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{48}+k.\frac{\pi}{2}$$

nahradíme základní velikostí

k ∈ Z, proto lze mínus nahradit znaménkem plus

$$x=\frac{31\pi}{24}+k\pi$$

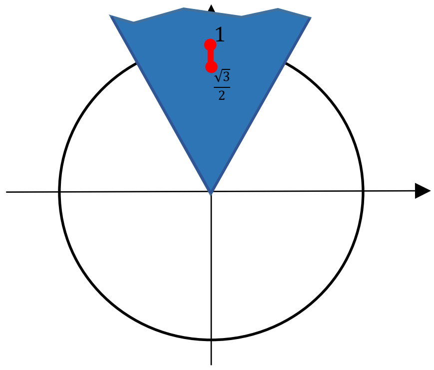


$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{31\pi}{24}+k\pi;\ \frac{\pi}{48}+k\frac{\pi}{2}\right\}$$

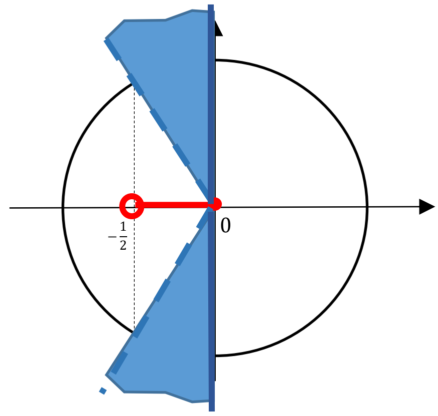
Goniometrické nerovnice

$\boxed{\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \left\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle \right\}$$



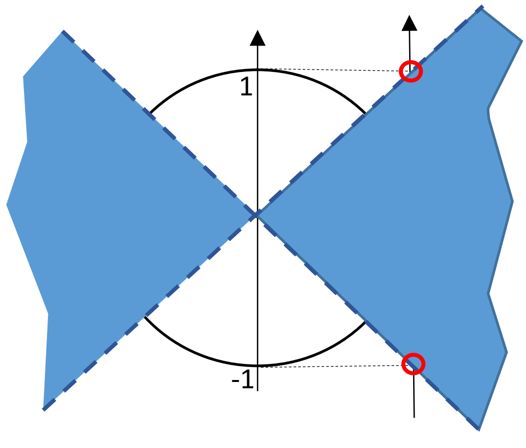
$\boxed{-\frac{1}{2} < \cos x \leq 0}$



$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right), \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle \right\}$$

$\boxed{|\mathrm{tg}\, x| < 1}$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle \right\}$$

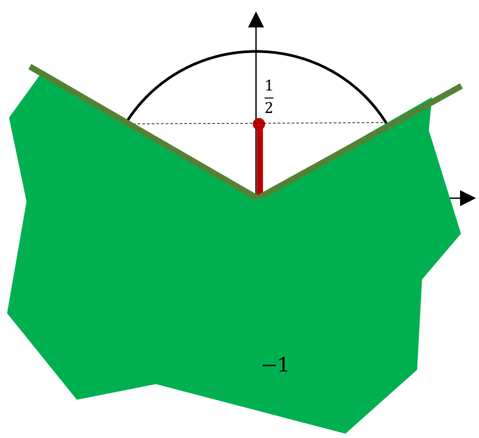


$\boxed{\sin 2x \leq \frac{1}{2}}$

$$2x \in \left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{13\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle \quad /:2$$

$$x \in \left\langle \frac{5\pi}{12} + k\pi ; \frac{13\pi}{12} + k\pi \right\rangle$$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \left\langle \frac{5\pi}{12} + k\pi ; \frac{13\pi}{12} + k\pi \right\rangle \right\}$$



$\boxed{2\sin^2 x > 3\cos x}$

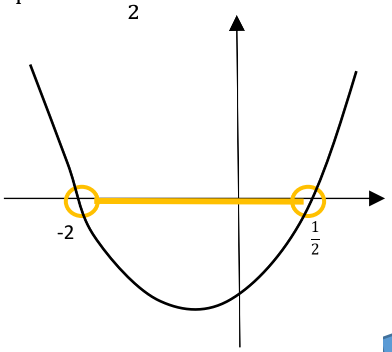
$2.(1-\cos^2 x) > 3\cos x$

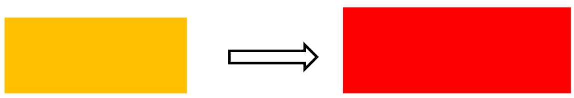
$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$ Subst.: $\cos x = y$

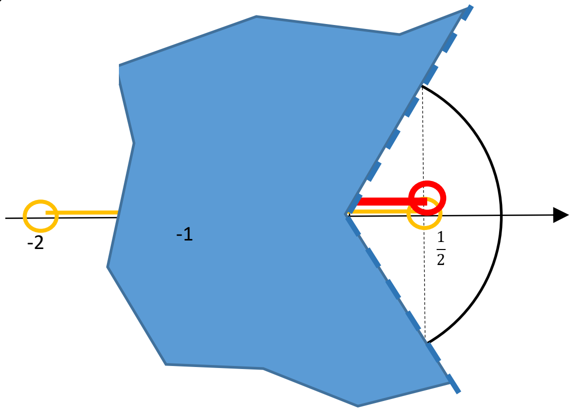
$2y^2 + 3y - 2 < 0$

$$y_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3\pm5}{4} =< \begin{matrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$2.(y+2).\left(y-\frac{1}{2}\right) < 0$





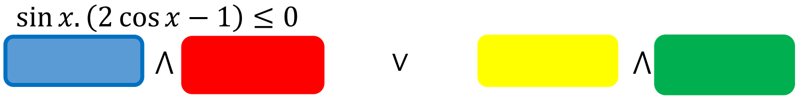


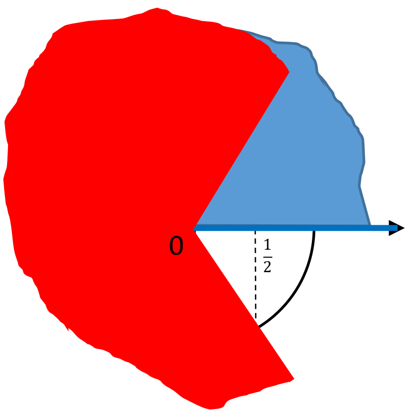
$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)\right\}$$

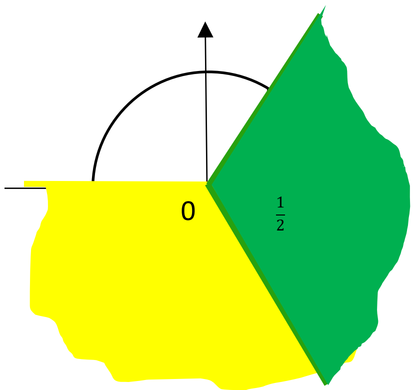
$\boxed{\sin 2x \leq \sin x}$

$2\sin x\cos x - \sin x \leq 0$

$\sin x.(2\cos x - 1) \leq 0$







$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\left\langle\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\pi + 2k\pi\right\rangle, \left\langle\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\,;\ 2\pi + 2k\pi\right\rangle\right\}$$

Základní poznatky

1. Řešte v R rovnice

a) $2\sin x = \sqrt{3}$ $\left[typ\ 1,\ K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}\right]$

b) $-\sqrt{3}\ tg\ x = 1$ $\left[typ\ 1,\ K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi\right\}\right]$

2. Přiřaďte ke každé rovnici 1. – 4. její řešení a) – f) v oboru R: (zdroj státní maturita září 2016)

1. $tg\ x = 0$
2. $\cos x = 1$
3. $\sin 2x = 0$
4. $cotg\ \frac{x}{2} = 1$

a) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$

b) $x = k\pi, k \in Z$

c) $x = 2k\pi, k \in Z$

d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

e) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$

f) $x = \pi + 2k\pi, k \in Z$

$[1b, 2c, 3a, 4e]$

3. Kolik řešení má rovnice $tg\ 2x = 0$ v oboru $\langle 0; 2\pi\rangle$? (zdroj maturita M+, květen 2017)

$[5]$

Typové příklady standardní náročnosti

4. Řešte v R rovnice

a) $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ $\left[typ\ 1,\ K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{7\pi}{12} + k\pi\right\}\right]$

b) $3\sin x = 2\cos^2 x$ $\left[typ\ 2,\ K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}\right]$

c) $2\sin^2 x = 2 - \mathrm{cotg}^2\, x$ $\left[typ\ 2,\ K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}\right]$

d) $\sin x + \cos 2x = 1$ $\left[typ\ 2,\ K = \bigcup_{k\in Z}\left\{k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}\right]$

e) $cotg^3\, x - 2cotg^2\, x + cotg\ x = 0$ $\left[typ\ 2,\ K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}\right]$

f) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$ $\left[typ\ 3,\ K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}\right]$

Rozšiřující cvičení

5. Řešte v R rovnici

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi - 3x)$ $\left[typ\ 4,\ K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}\right]$

Poznámka

Pro případné zadání rovnic do Wolframalpha.com a podobných programů použijte do zadání rovnice v příkazovém řádku následující syntaxi:

- goniometrické funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$
- mocniny goniometrických fcí $sin\^{}2(x) + cos\^{}2(x)$
- odmocnina (angl. square root) $sqrt(x), sqrt(x+1), sqrt(2), sqrt(3), \ldots$

Ve Wolframalpha si nastavte funkci reálné proměnné, tj. Real-valued plot, nikoliv Complex-valued plot.