

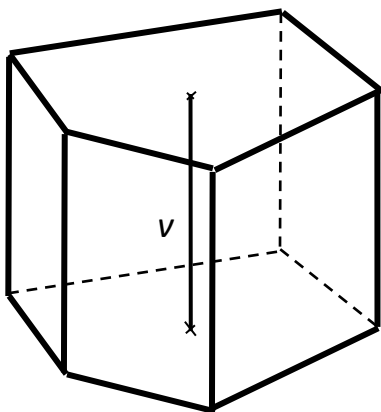
27 Objemy a povrchy těles – met.

Stručný přehled teorie

V.....objem
 P..... obsah podstavy
 Q.....obsah pláště
 u..... tělesová úhlopříčka
 u₁.....stěnová úhlopříčka

S.....povrch tělesa
 v.....výška tělesa
 r..... poloměr
 d.....průměr

Hranol - je těleso, jehož podstavy tvoří dva shodné konvexní n-úhelníky ležící v rovnoběžných rovinách; pobočné hrany jsou rovnoběžky spojující příslušné vrcholy těchto n-úhelníků. Výška je vzdálenost jeho podstav.



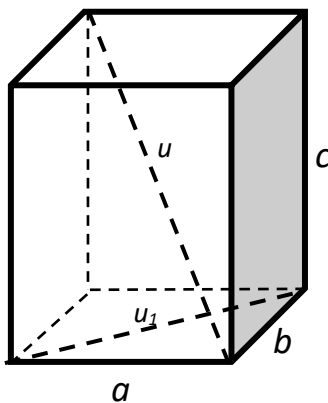
$$V = P \cdot v$$

$$S = 2P + Q$$

- **Kolmý** hranol - roviny podstav jsou kolmé na pobočné hrany.
- **Kosý** hranol - rovina podstavy svírá s pobočnou hranou úhel.
- **Pravidelný** hranol - je kolmý hranol, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník.

kosý

Kvádr – je kolmý hranol, jehož podstavou je pravoúhlý rovnoběžník.



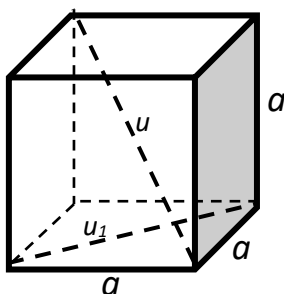
$$V = abc$$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$u_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Krychle - je kolmý hranol, jehož podstavou je čtverec a všechny hrany jsou shodné



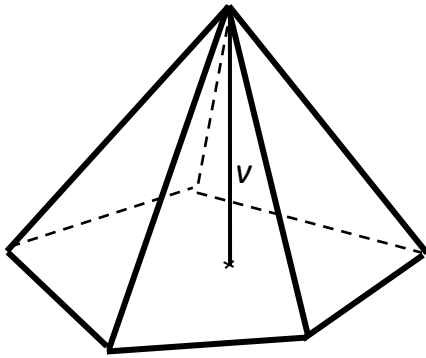
$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

$$u = a\sqrt{3}$$

$$u_1 = a\sqrt{2}$$

Jehlan – je těleso, jehož podstavu tvoří konvexní n-úhelník, pobočné hrany jsou spojnice hlavního vrcholu s jednotlivými vrcholy podstavy. Výška je vzdálenost hlavního vrcholu od roviny podstavy.



$$V = \frac{1}{3} P \cdot v$$

$$S = P + Q$$

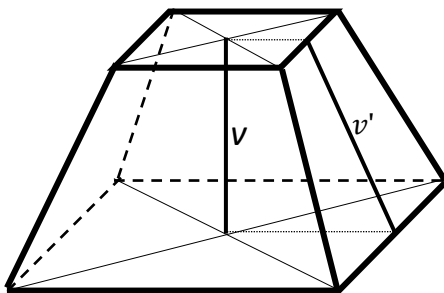
- **Pravidelný jehlan** - je jehlan, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník a výška prochází středem podstavy. Pro něj platí:

$$Q = \frac{1}{2} o \cdot v'$$

o ... obvod základny
v' ... výška pobočné stěny

- **Čtyřstěn** – je trojboký jehlan
- **Pravidelný čtyřstěn** – je trojboký jehlan, jehož všechny čtyři stěny tvoří shodné rovnostranné trojúhelníky

Komolý jehlan – vznikne seříznutím jehlanu rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy ve vzdálenosti v, která je menší než výška původního jehlanu. Pak v je výška komolého jehlanu.



$$V = \frac{v}{3} (P_1 + \sqrt{P_1 \cdot P_2} + P_2)$$

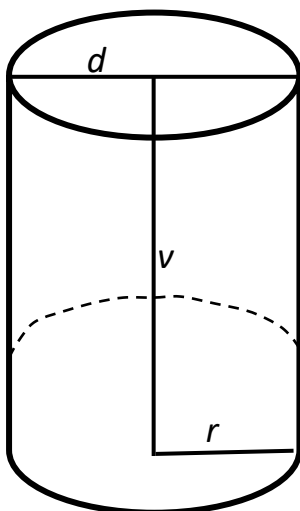
$$S = P_1 + P_2 + Q$$

- **Pravidelný komolý jehlan** – je komolý jehlan, jehož obě podstavy jsou čtvercové. Pro něj platí:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot (o + o_1) \cdot v'$$

o, o₁ ... obvody podstav; v' ... výška pobočné stěny

Rotační válec - je těleso, které dostaneme rotací obdélníku kolem jeho jedné strany.



$$V = \pi r^2 \cdot v$$

$$Q = 2\pi r v$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r \cdot (r + v)$$

- **Rovnostranný válec** – je válec, jehož výška je rovna průměru podstavy. Jeho osový řez je čtverec.
- **Kolmý eliptický válec** – je válec, jehož podstavy jsou elipsy a jehož osa je kolmá k rovinám podstav.

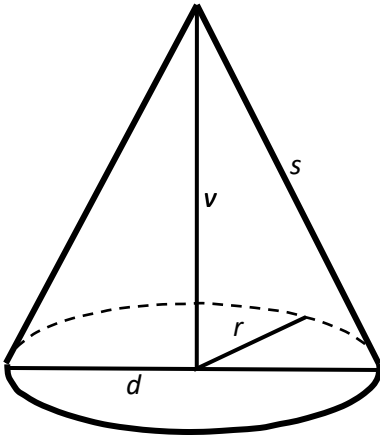
$$V = \pi a b v$$

$$Q = \pi v \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot (a + b) - \sqrt{ab} \right]$$

$$S = \pi v \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot (a + b) - \sqrt{ab} \right] + 2\pi a b$$

a ... velikost hlavní poloosy
b ... velikost vedlejší poloosy

Rotační kužel – je těleso, které dostaneme rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné odvěsny



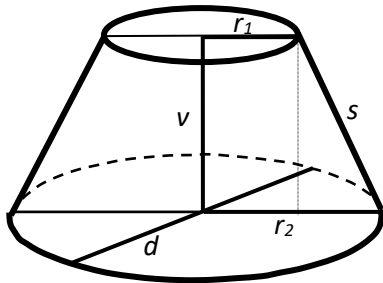
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v$$

$$Q = \pi r s$$

$$S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r \cdot (r + s)$$

(s – je strana kužele)

Komolý rotační kužel – vznikne z rotačního kužele seříznutím rovinou rovnoběžnou s podstavou ve vzdálenosti v, která je menší než výška původního kužele.



$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot v \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

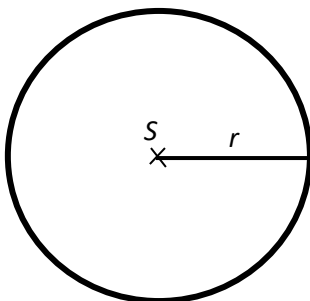
$$Q = \pi s \cdot (r_1 + r_2)$$

$$S = \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2 + \pi s \cdot (r_1 + r_2)$$

(s – strana komolého kužele;
 $s = \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2}$)

Kulová plocha – je množina všech bodů v prostoru, které mají od pevného bodu S stejnou vzdálenost r. Bod S je střed, r je poloměr kulové plochy.

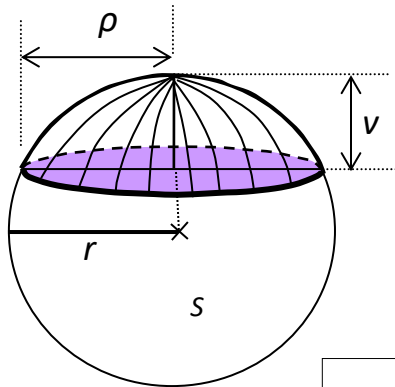
Koule – je množina bodů v prostoru, které mají od bodu S vzdálenost menší nebo rovnu r.



$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

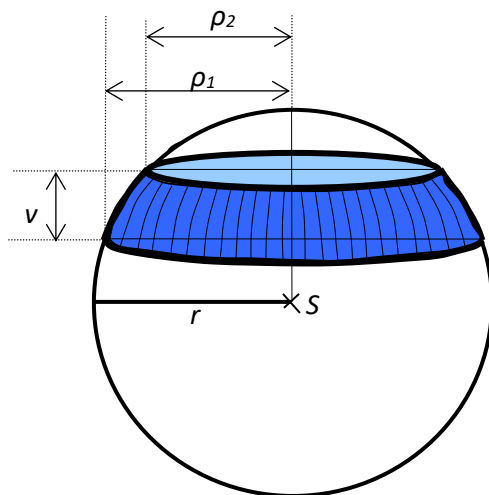
$$S = 4 \pi r^2$$

❖ Části koule: • Kulová úseč



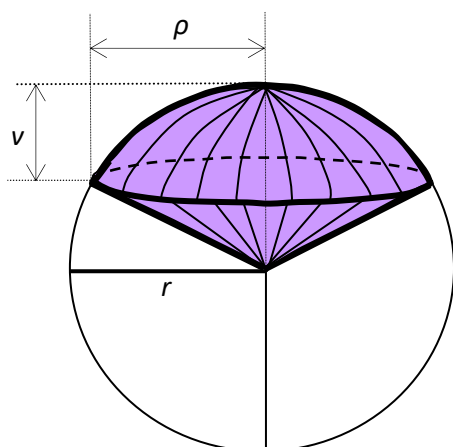
$$V = \pi \cdot \rho^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^3 = \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot (3\rho^2 + v^2) = \pi \cdot v^2 \cdot \left(r - \frac{v}{3}\right)$$

• Kulová vrstva



$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot (3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$$

• Kulová výseč



$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\pi r v \cdot r = \frac{2}{3} \pi r^2 v$$

❖ **Části kulové plochy:** • **Kulový vrchlík (povrch kulové úseče)**

$$Q = 2\pi r v$$

$$S = \pi \cdot (2rv + \rho^2) = \pi v \cdot (4r - v)$$

• **Kulový pás (povrch kulové vrstvy)**

$$Q = 2\pi r v$$

$$S = \pi \cdot (2rv + \rho_1^2 + \rho_2^2)$$

Met.: Toto téma je pro středoškoláky relativně velmi snadné. Většina těles byla dostatečně podrobně probrána už na základní škole - krychle, kvádry, hranoly, válce, jehlany, kužely. Žáci se na ZŠ krátce setkali dokonce i s komolými jehlany a kužely.

Na střední škole se tělesa kategorizují, přidává se k nim navíc pouze koule a její části. Samozřejmě se řeší komplikovanější úlohy s upravenými tělesy (otvory, průniky, ...).

Čas na probírání by měl vyučující co nejvíc zkrátit. Může využít zpracované teorie k tomuto tématu, dát tuto teorii studentům k dispozici a stručně ji s nimi projít.

Před řešením úloh by měl učitel studentům jasně rozdělit vzorce potřebné pro výpočty objemů a povrchů těles na ty, které si mají pamatovat (bylo by jistě trapné, kdyby absolvent gymnázia neznal z paměti vzorce pro objem a povrch krychle, válce, kužele, koule, ...) a na ty, o nichž je třeba jen vědět, kde je najdou a jak se používají:

a) vzorce pro pamatování:

KRYCHLE	$V = a^3$ $S = 6a^2$ $u_s = a\sqrt{2}$ (stěnová úhlopříčka) $u_t = a\sqrt{3}$ (tělesová úhlopříčka)
KVÁDR	$V = abc$ $S = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$ $u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
HRANOL	$V = S_p \cdot v$ $S = 2 \cdot S_p + Q$
JEHLAN	$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$ $S = S_p + Q$
VÁLEC	$V = \pi r^2 v$ $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$
KUŽEL	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$ $S = \pi r^2 + \pi r s$
KOULE	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $S = 4\pi r^2$

b) ostatní vzorce

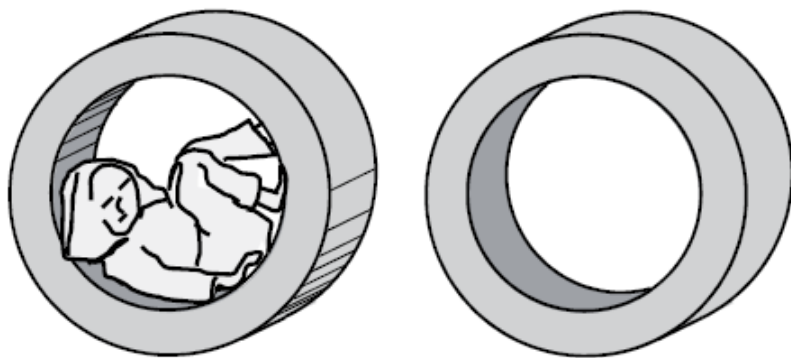
- části těles
- komolá tělesa
- ...

Základní poznatky

1. Délka tělesové úhlopříčky krychle je $3\sqrt{6}$ cm. Vypočítejte objem krychle. [$54\sqrt{2}$ cm³]
2. Hranu krychle zvětšíme dvakrát. Kolikrát se zvětší
 - a) její objem? [8x]
 - b) její povrch? [4x]
3. O kolik procent se zvětší objem krychle, jestliže se hrana krychle zvětší o 15%? [o 52%]

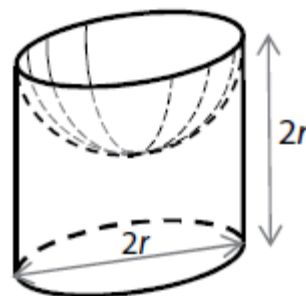
Typové příklady standardní náročnosti

4. Rozměry kváдру jsou v poměru 2: 3: 6, tělesová úhlopříčka má délku 14 cm. Určete povrch, objem a odchylku tělesové úhlopříčky od roviny podstavy. [288 cm², 288 cm³, 59°]
5. Nálevka má tvar rovnostranného kužele. Vypočítejte obsah plochy smáčené vodou v případě, že do nálevky nalijete 3 litry vody. [$6^3\sqrt{\pi}$ dm²]
6. (Státní maturita, květen 2017) Kapka rtuti tvaru koule o průměru 3 mm se rozdělila na dvě stejně velké kapičky tvaru koule. Jaký je poloměr nově vytvořené kapičky rtuti? Výsledek zaokrouhlete na setiny. [1,19 mm]
7. (Státní maturita, květen 2017) Cvičební pomůcka z šedé pěny je rotační těleso, které lze popsat jako dutý válec. Dutý válec má výšku 70 cm, vnější průměr 180 cm a vnitřní průměr (tj. průměr dutiny) 120 cm. Jaký je povrch tělesa (včetně plochy uvnitř dutiny)? Výsledek zaokrouhlete na desetiny m². [9,4 m²]



8. (Státní maturita, září 2016) V rovnostranném válci je vytvořena dutina tvaru polokoule. Poloměr podstavy válce i poloměr polokoule je $r = 10$ cm, výška válce je $2r$. Jaký je povrch vytvořeného tělesa (tj. válce s dutinou)?

[700π cm²]



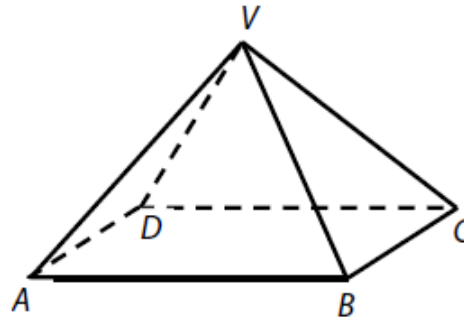
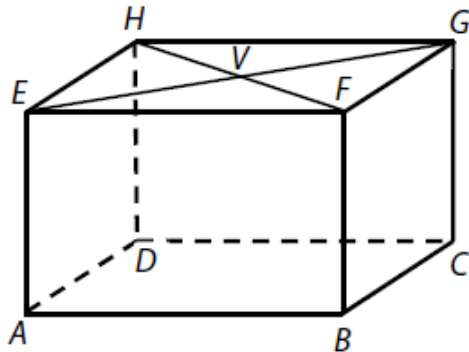
9. (Státní maturita, květen 2016) Z kvádrů $ABCDEFGH$ se vyřízne jehlan $ABCDV$.

Vrchol V je středem stěny $EFGH$. Určete,

a) kolikrát je objem kvádrů větší než objem jehlanu? [3 krát]

b) Je-li $|BD| = 4\sqrt{7}$ cm a $|BV| = 8$ cm, vypočítejte v cm výšku jehlanu.

[$v = 6$ cm]



10. Vypočítejte objem pravidelného trojbokého jehlanu, který má podstavnu hranu $a = 4$ cm

a odchylku pobočné stěny od roviny podstavy $\beta = 45^\circ$. [$\frac{8}{3}$ cm³]

11. Krychli vepište a opište kouli. Vypočítejte poměr objemů koule opsané, krychle a koule vepsané. [$3\pi\sqrt{3}: 6: \pi$]

Rozšiřující cvičení

12. Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm. Boční hrana svírá s rovinou podstavy úhel 60° . Vypočítejte objem a povrch komolého jehlanu.

$$\left[\frac{76}{3}\sqrt{6} \text{ cm}^3, 52 + 20\sqrt{7} \text{ cm}^2 \right]$$

13. Do koule daného objemu V je vepsán rotační kužel, jehož osový řez má při vrcholu úhel α .

Určete objem tohoto kužele. [$V_2 = \frac{1}{2} V \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$]

14. Vypočítejte objem a povrch čočky, která vznikne průnikem dvou koulí o poloměrech 8 cm a 4 cm. Vzdálenost středů je 10 cm. [$30,58 \text{ cm}^3; 65,3 \text{ cm}^2$]