# **28 Kombinatorika – met.**

**Stručný přehled teorie**

**Kombinatorika** je součástí **finitní matematiky**, která studuje konečné soubory (množiny a uspořádané k-tice, kN).

# **Kombinatorická pravidla**

* **Kombinatorické pravidlo součinu**

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n1 způsoby, druhý člen po výběru prvního n2 způsoby, ....., k-tý člen po výběru všech předchozích nk způsoby, je roven číslu p, pro které platí : p = n1 . n2 . … . nk

* **Kombinatorické pravidlo součtu**

Jsou-li A1 , A2, ....., An  konečné množiny, které mají po řadě p1, p2, ....., pn prvků, přičemž každé dvě z nich jsou disjunktní, pak platí: $\left|A\_{1}∪A\_{2}∪...∪A\_{n} \right|$= p1 + p2 + … + pn

# **Skupiny,v nichž záleží na pořadí prvků**

**Variace k-té třídy z n prvků bez opakování ,**

 - představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše jednou (k, n N, k ≤ n).

 počet všech popsaných variací: V(k, n) = n.(n - 1).(n - 2). … . (n - k + 1) =

## **Variace k-té třídy z n prvků s opakováním**

 - představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše k-krát (k, nN). počet všech popsaných variací: V´(k, n) = nk

## **Permutace z n prvků bez opakování = variace n-té třídy z n prvků bez opakování**

 - představuje každouuspořádanou **n**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje právě jednou.

 počet všech popsaných permutací: P(n) = V (n, n) = n.(n - 1).(n - 2). … .1 = n!

 Pozn.: n! …. čteme n faktoriál

## **Permutace k prvků s opakováním z n prvků** (k, n**N**, k > n)

 – představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje aspoň jednou.

 Nechť se v uspořádané **k**-tici první prvek vyskytuje k1-krát, druhý prvek k2-krát, třetí prvek k3-krát, ......, n-tý prvek kn-krát. Přitom k = k1+k2+…+kn.

počet všech popsaných permutací s opakováním:  **P´k1, k2, ..., kn (k)** =$\frac{k!}{k\_{1}!.k\_{2}!...k\_{n}!}$

# **Skupiny,v nichž nezáleží na pořadí prvků**

## **Kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování**

 - je neuspořádaná **k**-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše jednou (k, n N, k ≤ n).

 počet všech popsaných kombinací: K (k, n) = =  čteme „n nad k“

## **Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním**

 - je neuspořádaná **k**-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše **k**-krát.

 počet všech popsaných kombinací: K´(k, n) = 

**Pravidla pro práci s kombinačními čísly a faktoriály:**

 **Faktoriál n!**

Pro každé **n** přirozené: n! = n.(n - 1).(n - 2). ... .2.1

Pro n = 0 definujeme: 0! = 1

## **Kombinační číslo** $\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)$

Pro všechna n, k celá nezáporná, k ≤ n : $\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)=\frac{n!}{\left(n-k\right)!.k!}$

## Některé základní vlastnosti kombinačních čísel:

 1) $\left(\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right)=n$ $\left(\begin{matrix}n\\0\end{matrix}\right)=1$ $\left(\begin{matrix}n\\n\end{matrix}\right)=1$ $\left(\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)=1$

 2) $\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}n\\n-k\end{matrix}\right)$ pro k ≤ n

 3) $\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}n\\k+1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}n+1\\k+1\end{matrix}\right)$ pro k < n.

Met.: Kombinatorika představuje relativně náročné téma, je však pro studenty zajímavá, hravá, pestrá. Učitel toho musí využít a dosáhnout u studentů co nejlepšího pochopení kombinatorických jevů a problémů a naučit je optimálním pohledům na kombinatorické úlohy a způsobům jejich řešení. Pokud by se mu to nepodařilo, měli by studenti potíže nejen s kombinatorikou, ale později i s mnoha dalšími oblastmi matematiky, do kterých ve větší či menší míře kombinatorika zasahuje (např. Pravděpodobnost, …).

 Úvod kombinatoriky by měl rozhodně patřit kapitole o faktoriálech a kombinačních číslech. Studenti by měli být důkladně seznámeni s oběma těmito matematickými objekty, jejich nadefinováním, podmínkami jejich existence, pravidly pro počítání s nimi, měli by dokonale zvládat středoškolskou úroveň úprav výrazů, důkazů rovností i řešení rovnic a nerovnic s faktoriály a kombinačními čísly. Až budou řešit např. slovní kombinatorické úlohy, musí už mít faktoriály a kombinační čísla „v malíčku“.

 Řada kombinatorických úloh potřebuje k řešení znalost dvou základních pravidel, tedy kombinatorického pravidla součtu a kombinatorického pravidla součinu. Jakmile učitel s těmito pravidly studenty seznámí, měl by zařadit několik jednoduchých úloh, díky kterým studenti jejich podstatu lépe pochopí:

 Př. V první restauraci nabízejí 3 druhy polévek, 8 druhů hlavních jídel a 4 druhy nápojů. Ve druhé restauraci mají jen 2 druhy polévek, ale 10 druhů hlavních jídel a 5 druhů nápojů. Kolika způsoby si host může vybrat oběd za předpokladu, že a) zvolil první restauraci a bude jíst hlavní jídlo a nápoj? b) zvolil první restauraci a bude jíst polévku, hlavní jídlo a nápoj? c) bude vybírat restauraci a jíst polévku, hlavní jídlo a nápoj?

 Řeš.: a) hlavní jídlo … 8 možností, nápoj … 4 možnosti počet všech možností (kombinatorické pravidlo součinu) … 8.4 = 32 b) polévka … 3 možnosti, hlavní jídlo … 8 možností, nápoj … 4 možnosti počet všech možností (kombinatorické pravidlo součinu) … 3.8.4 = 96 c) první restaurace … 3.8.4 = 96 možností druhá restaurace … 2.10.5 = 100 možností počet všech možností (kombinatorické pravidlo součtu) … 96 + 100 = 196

 Učitel musí k výuce přistupovat se stálým vědomím toho, že kombinatorika studuje dva typy konečných souborů, které jsou principiálně odlišné: ● uspořádané k-tice, kN, v nichž záleží na pořadí prvků, ● množiny, ve kterých na pořadí prvků nezáleží. Učitel musí především naučit studenty spolehlivě rozpoznat, s kterým z uvedených dvou typů souborů mají v zadané kombinatorické úloze pracovat. Zkušenosti ukazují, že to některým studentům dělá občas potíže. Pozn.: Studentům je dobré poradit, aby si ze zadaných prvků vytvořili třeba trojici, pak v ní vyměnili pořadí prvků a promysleli si, zda jde o tutéž trojici nebo o trojici jinou: Př.1: Nechť jsou Adam, Bedřich a Cyril tři studenti. Vytvořme z nich trojici pro a) službu ve třídě: $\left\{A, B, C\right\}=\left\{B, C, A\right\}=\left\{A, C, B\right\}$ b) první tři místa v soutěži: $\left[A, B, C\right]\ne \left[B, C, A\right]\ne \left[A, C, B\right]$ Př.2: Tóny c, e, g zahrané a) najednou (souzvuk) na klavír: $\left\{c, e, g\right\}=\left\{e, c, g\right\}=\left\{g, c,e\right\}$ b) postupně na trubku (jako souzvuk nelze): $\left[c,e, g\right]\ne \left[e, c, g\right]\ne \left[g, c, e\right]$.

 Vzorce, kterých je kombinatorika plná, si studenti jistě lépe zapamatují, když je jimi učitel nezasype, ale ukáže jim, jak se odvozují. Navíc, a to je jistě ještě mnohem důležitější, tak studenti uvidí další příklad toho, jak se matematika buduje a tvoří. Vzorce je třeba dokázat matematickou indukcí (některé – podle času).

1. **Konečné soubory prvků, ve kterých záleží na pořadí prvků** **– variace, – variace s opakováním, – permutace, – permutace s opakováním**

 **①** **Variace k-té třídy z n prvků** $V\_{\left(k, n\right)}-?$ (prvky se nesmí opakovat)

$$M=\left\{1, 2, 3, 4, 5\right\}$$

$V\_{\left(1,5\right)}-?$ 1 2 3 4 5 $V\_{\left(1,5\right)}=5$

$V\_{\left(2,5\right)}-?$ x 12 13 14 15

 21 x 23 24 25

 31 32 x 34 35 $V\_{\left(2,5\right)}=5.4$

 41 42 43 x 45

 51 52 53 54 x

$V\_{\left(3,5\right)}-?$ 231 234 235 z každé uspořádané dvojice se vytvoří 3 uspořádané trojice

 521 523 524 $V\_{\left(3,5\right)}=5.4.3$

………..

**Počet řádků**

**Prvků v řádku**

**Zobecnění:** $M=\left\{1, 2, 3, …, n\right\}$

$$V\_{\left(1,n\right)}=n$$

$$V\_{\left(2,n\right)}=n.\left(n-1\right)$$

$$V\_{\left(3,n\right)}=n.\left(n-1\right).\left(n-2\right)$$

 …………..

$$V\_{\left(k,n\right)}=n.\left(n-1\right).\left(n-2\right). ….\left(n-k+1\right)=\frac{n.\left(n-1\right).\left(n-2\right). ….\left(n-k+1\right).\left(n-k\right). ….3.2.1}{\left(n-k\right). ….3.2.1}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$$

**②** **Variace k-té třídy z n prvků s opakováním** $V\_{\left(k,n\right)}^{´}-?$

$$M=\left\{1, 2, 3, 4, 5\right\}$$

$V\_{\left(1,5\right)}^{´}-?$ 1 2 3 4 5 $V\_{\left(1,5\right)}^{´}=5$

$V\_{\left(2,5\right)}^{´}-?$ 11 12 13 14 15

 21 22 23 24 25

 31 32 33 34 35 $V\_{\left(2,5\right)}^{´}=5.5=5^{2}$

 41 42 43 44 45

 51 52 53 54 55

$V\_{\left(3,5\right)}^{´}-?$ 231 232 233 234 235 z každé uspořádané dvojice se vytvoří 5 uspořádaných trojic

 521 522 523 524 525 $V\_{\left(3,5\right)}^{´}=5^{3}$

………..





**Zobecnění:** $M=\left\{1, 2, 3, …, n\right\}$

$$V\_{\left(1,n\right)}^{´}=n$$

$$V\_{\left(2,n\right)}^{´}=n^{2}$$

$$V\_{\left(3,n\right)}^{´}=n^{3}$$

 …………..

$$V\_{\left(k,n\right)}^{´}=n^{k}$$

 **③ Permutace z n prvků** $P\_{\left(n\right)}-?$(prvky se nesmí opakovat)

 Permutace z n prvků = variace k-té třídy z n prvků:

$P\_{\left(n\right)}=V\_{\left(n,n\right)}=\frac{n!}{\left(n-n\right)!}=\frac{n!}{0!}=\frac{n!}{1}=n!$ $P\_{\left(n\right)}=n!$

 ④ **Permutace s opakováním** $P\_{\left(k\right)}^{´}-?$

$M=\left\{x\_{1}, x\_{2}, x\_{3}, x\_{4}, y\_{1}, y\_{2}, y\_{3}\right\}$ V této množině je k1 = 4 prvků typu ***x*** a k2 = 3 prvků typu***y***, tedy celkem k = k1 + k2 = 7 prvků.

Počet permutací (bez opakování) z těchto prvků je $P\_{\left(7\right)}=7!$.

Jedna z těchto permutací je např. $\left[x\_{1}, x\_{2}, y\_{1}, x\_{3}, x\_{4},y\_{2}, y\_{3}\right]$. Kdybychom z této permutace tvořili další tak, že bychom všechny prvky typu *y* nechali na „svých“ místech a „promíchávali“ bychom pouze prvky typu ***x***, získali bychom spolu s původní celkem 4! permutací. Ty všechny by ovšem splynuly v jedinou permutaci v okamžiku, kdy bychom přestali rozlišovat prvky typu ***x***, tj. zavedli bychom $x\_{1},=x\_{2}= x\_{3}= x\_{4}=x$. Množina *M* by se změnila na $M=\left\{x, x, x, x, y\_{1}, y\_{2}, y\_{3}\right\}$ , vybraná permutace by se změnila na $\left[x, x, y\_{1}, x, x,y\_{2}, y\_{3}\right]$ a počet permutací (teď už s opakováním prvku *x*) by se změnil na $\frac{7!}{4!}$ .

Když přestaneme rozlišovat navíc i prvky typu *y*, bude $M=\left\{x, x, x, x, y, y, y\right\}$ a počet permutací s opakováním bude $P\_{4,3}^{´}\left(7\right)=\frac{7!}{4!.3!}$

**Zobecnění:** $M=\left\{x, …, x, y, …, y, ……, z, …, z\right\}$ Přitom $k\_{1}+k\_{2}+…+k\_{n}=k$.

Počet všech permutací s opakováním z prvků množiny *M* je $P\_{k\_{1,}k\_{2}, …,k\_{n}}^{´}\left(k\right)=\frac{k!}{k\_{1}!.k\_{2}!. ….k\_{n}!}$

$$k\_{n}$$

$$k\_{2}$$

$$k\_{1}$$

1. **Konečné soubory prvků, ve kterých nezáleží na pořadí prvků – kombinace, – kombinace s opakováním**

**① Kombinace k-té třídy z n prvků** $K\_{\left(k,n\right)}-?$(prvky se nesmí opakovat)

$$M=\left\{1, 2, 3, 4, 5\right\}$$

Vytvořme variace 3. třídy z těchto pěti prvků. Je jich $V\_{\left(3, 5\right)}= \frac{5!}{\left(5-3\right)!}$ .

Uvědomme si, že např. 123, 132, 213, 231, 312, 321 představuje 3! = 6 různých variací, ale jedinou kombinaci třetí třídy z pěti prvků. Podobně každých 3! variací vytvořených „promícháním“ každé trojice prvků množiny *M* představuje jedinou kombinaci. Proto $K\_{\left(3, 5\right)}=\frac{V\_{\left(3, 5\right)}}{3!}=\frac{5!}{\left(5-3\right)!.3!}$ .

**Zobecnění:** $M=\left\{1, 2, 3, …, n\right\}$ $K\_{\left(k, n\right)}=\frac{V\_{\left(k,n\right)}}{k!}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!.k!}=\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)$

 Pozn.: $\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)=\frac{n!}{\left(n-k\right)!.k!}=\frac{n.\left(n-1\right). …. \left(n-k+1\right).\left(n-k\right).\left(n-k-1\right). ….3.2.1}{\left(n-k\right).\left(n-k-1\right). ….3.2.1. k!}= \frac{n.\left(n-1\right). …. \left(n-k+1\right).\left(n-k\right).\left(n-k-1\right). ….3.2.1}{\left(n-k\right).\left(n-k-1\right). ….3.2.1. k!}=$

 $=\frac{n.\left(n-1\right). …. \left(n-k+1\right)}{k!}$ …Skutečnost, že v čitateli i jmenovateli posledního zlomku je stejný počet činitelů, umožňuje velmi zjednodušit výpočet kombinačních čísel:

 Např.: 1) $\left(\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right)=\frac{8.7}{2.1}=28$ místo $\left(\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right)=\frac{8!}{\left(8-2\right)!.2!}=\frac{8.7.6!}{6!.2!}=\frac{8.7}{2.1}=28$ ;

 2) $\left(\begin{matrix}20\\18\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}20\\2\end{matrix}\right)=\frac{20.19}{2.1}=190$ …. využití pravidla $\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)=$ $\left(\begin{matrix}n\\n-k\end{matrix}\right)$

  **②** **Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním** $K\_{\left(k, n\right)}^{´}-?$

Aby učitel dosáhl pochopení tvorby kombinací s opakováním u co největšího počtu studentů, měl by jim na začátku ukázat několik konkrétních příkladů:

 Př.: Nechť $M=\left\{1, 2, 3\right\}$. Vypište několik kombinací s opakováním páté třídy ze tří prvků množiny M a pokuste se zjistit, kolik takových kombinací existuje.

 Řeš.: $K\_{\left(5, 3\right)}^{´}-?$ $\left\{1, 1, 1, 3, 3\right\}$ $\left\{2, 2, 2, 2, 2\right\}$ $\left\{3, 3, 2, 1, 1\right\}$ ……. Jak zjistit počet všech možných kombinací s opakováním páté třídy ze tří prvků? 1. způsob …. Použít vzorec $K\_{\left(k, n\right)}^{´}=\left(\begin{matrix}n+k-1\\k\end{matrix}\right)$, tedy $K\_{\left(5, 3\right)}^{´}=\left(\begin{matrix}3+5-1\\5\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}7\\5\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}7\\2\end{matrix}\right)=\frac{7.6}{2.1}=21$ 2. způsob …. Využít skutečnosti, že každou kombinaci s opakováním lze jednoduše převést na permutaci s opakováním. V případě tří prvků stačí vytvořit prostor s dvěma oddělovači (oddělovačů je vždy o jeden méně než prvků – viz obrázek). Pak zvolíme dva grafické znaky: – první pro oddělovač …. např. **│ –** druhý jako značku registrující přítomnost prvku v „jeho“ prostoru …. např. •

prvky 1

prvky 2

prvky 3

Zápis

znamená $\left\{1, 1, 1, 3, 3\right\}$

Zápis

znamená $\left\{2, 2, 2, 2, 2\right\}$

Zápis

znamená $\left\{1, 1, 2, 3, 3\right\}=$

 $=\left\{3, 3, 2, 1, 1\right\}$

 Je evidentní, že všechny kombinace s opakováním páté třídy ze tří prvků dokážeme zobrazit pomocí pouhých dvou druhů znaků: pět modrých teček odpovídá pěti použitým prvkům (páté třídě), dvě červené rysky představují dva potřebné oddělovače). Zároveň je jasné, že na pořadí těchto znaků záleží. Proto musíme pracovat s permutacemi s opakováním: $K\_{\left(5, 3\right)}^{´}=P\_{5,2}^{´}\left(7\right)=\frac{7!}{5!.2!}=\frac{7.6.5!}{5!.2!}=\frac{7.6}{2.1}=21$

 Tento druhý způsob řešení úlohy je jednoduchý, srozumitelný a logický, takže jej studenti mohou používat vždy, když hledají počet kombinací s opakováním, a to aniž by si museli pamatovat nepříjemný vzorec. Navíc díky němu může učitel studentům ukázat, jak lze ke vzorci $K\_{\left(k, n\right)}^{´}=\left(\begin{matrix}n+k-1\\k\end{matrix}\right)$ dojít: $K\_{\left(5, 3\right)}^{´}=P\_{5,2}^{´}\left(7\right)=\frac{7!}{5!.2!}=\frac{7.6.5!}{5!.2!}=\frac{7.6}{2.1}=\left(\begin{matrix}7\\2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}7\\5\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}3+5-1\\5\end{matrix}\right)$ .

Základní poznatky:

Poznámka: Ve výsledcích příkladů 2 – 6  této části uveďte také druh kombinatorické skupiny, kterou příklad procvičuje.

1. MA 2017 Čtyřciferné přirozené číslo se má sestavit ze čtyř **různých** číslic. Na prvním místě má být číslice 2 a na místě desítek lichá číslice. (Daným podmínkám vyhovují např. čísla 2 430 a 2 793.) Kolik různých čísel je možné uvedeným způsobem sestavit?

a) 21 b) 240 c) 280 d) 360 e) jiný počet [C]

1. Je dána množina M = {1, 2, 3, 4, 5}.
2. Kolik trojciferných čísel, v nichž se neopakují cifry, lze vytvořit z jejich prvků? [60, variace 3. třídy z 5 prvků bez opakování]
3. Kolik z nich je dělitelných pěti?

[12, variace bez opakování]

1. Kolik pěticiferných čísel bez opakování číslic lze vytvořit z prvků množiny M? [120, permutace z 5 prvků (bez opakování) nebo

variace 5. třídy z 5 prvků bez opakování]

Met.: Učitel by měl ukázat studentům dva způsoby řešení a nechat na studentech, který z nich si vyberou, až budou psát prověrku: 1. způsob: užitím vzorců a) $V\_{\left(3,5\right)}=\frac{5!}{\left(5-3\right)!}=5.4.3=60$ ; b) Poslední cifra musí být 5, obsazujeme tedy jen první dvě pozice v čísle a nesmíme už použít 5 … $V\_{\left(2,4\right)}=\frac{4!}{2!}=12$ ; c) $P\_{\left(5\right)}=5!=120.$

 2. způsob: užitím kombinatorického pravidla součinu:

**5** možností $\rightarrow $

**4** možnosti $\rightarrow $

**3** možnosti $\rightarrow $

**Trojciferné číslo – znázornění pozic**

Počet možností: **5.4.3 = 60**

**a)**

4 možnosti$\rightarrow $

3 možnosti $\rightarrow $

1 možnost $\rightarrow $

**Trojciferné číslo – znázornění pozic**

Počet možností: **4.3.1** = **12**

b)

**5**

**5** možností $\rightarrow $

**4** možnosti $\rightarrow $

**3** možnosti $\rightarrow $

**Pěticiferné číslo – znázornění pozic**

Počet možností**: 5.4.3.2.1 = 120**

**c)**

**2** možnosti $\rightarrow $

**1** možnost$\rightarrow $

 Pozn.: Zadání úlohy by měl učitel ještě zkomplikovat tím, že mezi prvky množiny M zařadí nulu. Pak může být např. $M=\left\{0, 1, 2, 3, 4\right\}$. Předchozí výpočet je potom třeba doplnit o vyřazení všech trojic, které mají nulu na prvním místě. Úlohu lze nejprve využít jako prémiovou úlohu, jejíž správné řešení může učitel odměnit …

1. Řešte úlohu č. 2 pro případ, kdy se cifry mohou opakovat.

[a) 125, variace 3. třídy z 5 prvků s opakováním b) 25, variace s opakováním c) 3125, variace 5. třídy z 5 prvků s opakováním]

1. Kolik existuje osmiciferných čísel, ve kterých jsou 3 dvojky, 1 pětka a 4 šestky?

[280, 8 členné permutace s opakováním typu P´**3,1,4**(8)]

1. Kolik existuje tříprvkových podmnožin množiny M?

[10, kombinace 3. třídy z 5 prvků bez opakování]

1. Student psal v matematice během pololetí 7 písemných prací a známky na konci pololetí uspořádal od nejlepších po nejhorší, např. 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5. Kolik různých výsledků mohl student získat?

[330, kombinace 7. třídy z 5 prvků s opakováním]

1. Vyjádřete jedním kombinačním číslem:

a)  b)  [a)  b) ]

Typové příklady standardní náročnosti

1. MA 2016 Je dána rovnice s neznámou nN: 

Jaké je řešení rovnice? A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) jiné řešení [A]

1. Kolik přímek je určeno 12 body, jestliže:

 a) žádné tři body neleží na přímce? b) čtyři z nich leží na přímce? [66, 61]

1. S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet:
2. všech možných pořadí jejich vystoupení.
3. všech možných pořadí jejich vystoupení, v nichž vystupuje A po E.
4. všech možných pořadí jejich vystoupení, v nichž vystupuje A ihned po E

 [720, 360, 120]

1. MA 2014 Trenér vybírá z 5 děvčat a 4 chlapců šestičlennou skupinu, v níž budou 3 dívky a 3 chlapci. Kolika způsoby lze šestičlennou skupinu za těchto podmínek sestavit?

 A) 16 B) 20 C) 40 D) 180 E) jiným počtem

 [C]

1. V sérii 12 výrobků jsou 3 vadné. Kolika způsoby lze z nich vybrat 6 výrobků, z nichž právě 2 jsou vadné? [378]
2. a) Z kolika prvků lze vytvořit 600 variací druhé třídy bez opakování? [25]

b) Kolik prvků dává 55 kombinací 2. třídy bez opakování? [11]

1. a) Upravte a určete podmínky pro n:

 []

b) Řešte v Z:  [5]

1. Řešte rovnici a nerovnici:

a)  b)  < 72 [a) {5}, b) {8, 9}]

Rozšiřující cvičení

1. V novinovém stánku lze koupit 10 druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v 50 exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit:

 a) 15 pohledů b) 51 pohledů c) 8 různých pohledů [1 307 504; K´(51, 10) - 10; 45]