# **28 Kombinatorika – met.**

**Stručný přehled teorie**

**Kombinatorika** je součástí **finitní matematiky**, která studuje konečné soubory (množiny a uspořádané k-tice, kN).

# **Kombinatorická pravidla**

* **Kombinatorické pravidlo součinu**

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n1 způsoby, druhý člen po výběru prvního n2 způsoby, ....., k-tý člen po výběru všech předchozích nk způsoby, je roven číslu p, pro které platí : p = n1 . n2 . … . nk

* **Kombinatorické pravidlo součtu**

Jsou-li A1 , A2, ....., An  konečné množiny, které mají po řadě p1, p2, ....., pn prvků, přičemž každé dvě z nich jsou disjunktní, pak platí: = p1 + p2 + … + pn

# **Skupiny,v nichž záleží na pořadí prvků**

**Variace k-té třídy z n prvků bez opakování ,**

- představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše jednou (k, n N, k ≤ n).

počet všech popsaných variací: V(k, n) = n.(n - 1).(n - 2). … . (n - k + 1) =

## **Variace k-té třídy z n prvků s opakováním**

- představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše k-krát (k, nN). počet všech popsaných variací: V´(k, n) = nk

## **Permutace z n prvků bez opakování = variace n-té třídy z n prvků bez opakování**

- představuje každouuspořádanou **n**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje právě jednou.

počet všech popsaných permutací: P(n) = V (n, n) = n.(n - 1).(n - 2). … .1 = n!

Pozn.: n! …. čteme n faktoriál

## **Permutace k prvků s opakováním z n prvků** (k, n**N**, k > n)

– představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje aspoň jednou.

Nechť se v uspořádané **k**-tici první prvek vyskytuje k1-krát, druhý prvek k2-krát, třetí prvek k3-krát, ......, n-tý prvek kn-krát. Přitom k = k1+k2+…+kn.

počet všech popsaných permutací s opakováním:  **P´k1, k2, ..., kn (k)** =

# **Skupiny,v nichž nezáleží na pořadí prvků**

## **Kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování**

- je neuspořádaná **k**-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše jednou (k, n N, k ≤ n).

počet všech popsaných kombinací: K (k, n) = =  čteme „n nad k“

## **Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním**

- je neuspořádaná **k**-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše **k**-krát.

počet všech popsaných kombinací: K´(k, n) = 

**Pravidla pro práci s kombinačními čísly a faktoriály:**

**Faktoriál n!**

Pro každé **n** přirozené: n! = n.(n - 1).(n - 2). ... .2.1

Pro n = 0 definujeme: 0! = 1

## **Kombinační číslo**

Pro všechna n, k celá nezáporná, k ≤ n :

## Některé základní vlastnosti kombinačních čísel:

1)

2) pro k ≤ n

3) pro k < n.

Met.: Kombinatorika představuje relativně náročné téma, je však pro studenty zajímavá, hravá, pestrá. Učitel toho musí využít a dosáhnout u studentů co nejlepšího pochopení kombinatorických jevů a problémů a naučit je optimálním pohledům na kombinatorické úlohy a způsobům jejich řešení. Pokud by se mu to nepodařilo, měli by studenti potíže nejen s kombinatorikou, ale později i s mnoha dalšími oblastmi matematiky, do kterých ve větší či menší míře kombinatorika zasahuje (např. Pravděpodobnost, …).

Úvod kombinatoriky by měl rozhodně patřit kapitole o faktoriálech a kombinačních číslech. Studenti by měli být důkladně seznámeni s oběma těmito matematickými objekty, jejich nadefinováním, podmínkami jejich existence, pravidly pro počítání s nimi, měli by dokonale zvládat středoškolskou úroveň úprav výrazů, důkazů rovností i řešení rovnic a nerovnic s faktoriály a kombinačními čísly. Až budou řešit např. slovní kombinatorické úlohy, musí už mít faktoriály a kombinační čísla „v malíčku“.

Řada kombinatorických úloh potřebuje k řešení znalost dvou základních pravidel, tedy kombinatorického pravidla součtu a kombinatorického pravidla součinu. Jakmile učitel s těmito pravidly studenty seznámí, měl by zařadit několik jednoduchých úloh, díky kterým studenti jejich podstatu lépe pochopí:

Př. V první restauraci nabízejí 3 druhy polévek, 8 druhů hlavních jídel a 4 druhy nápojů. Ve druhé restauraci mají jen 2 druhy polévek, ale 10 druhů hlavních jídel a 5 druhů nápojů. Kolika způsoby si host může vybrat oběd za předpokladu, že a) zvolil první restauraci a bude jíst hlavní jídlo a nápoj? b) zvolil první restauraci a bude jíst polévku, hlavní jídlo a nápoj? c) bude vybírat restauraci a jíst polévku, hlavní jídlo a nápoj?

Řeš.: a) hlavní jídlo … 8 možností, nápoj … 4 možnosti počet všech možností (kombinatorické pravidlo součinu) … 8.4 = 32 b) polévka … 3 možnosti, hlavní jídlo … 8 možností, nápoj … 4 možnosti počet všech možností (kombinatorické pravidlo součinu) … 3.8.4 = 96 c) první restaurace … 3.8.4 = 96 možností druhá restaurace … 2.10.5 = 100 možností počet všech možností (kombinatorické pravidlo součtu) … 96 + 100 = 196

Učitel musí k výuce přistupovat se stálým vědomím toho, že kombinatorika studuje dva typy konečných souborů, které jsou principiálně odlišné: ● uspořádané k-tice, kN, v nichž záleží na pořadí prvků, ● množiny, ve kterých na pořadí prvků nezáleží. Učitel musí především naučit studenty spolehlivě rozpoznat, s kterým z uvedených dvou typů souborů mají v zadané kombinatorické úloze pracovat. Zkušenosti ukazují, že to některým studentům dělá občas potíže. Pozn.: Studentům je dobré poradit, aby si ze zadaných prvků vytvořili třeba trojici, pak v ní vyměnili pořadí prvků a promysleli si, zda jde o tutéž trojici nebo o trojici jinou: Př.1: Nechť jsou Adam, Bedřich a Cyril tři studenti. Vytvořme z nich trojici pro a) službu ve třídě: b) první tři místa v soutěži: Př.2: Tóny c, e, g zahrané a) najednou (souzvuk) na klavír: b) postupně na trubku (jako souzvuk nelze): .

Vzorce, kterých je kombinatorika plná, si studenti jistě lépe zapamatují, když je jimi učitel nezasype, ale ukáže jim, jak se odvozují. Navíc, a to je jistě ještě mnohem důležitější, tak studenti uvidí další příklad toho, jak se matematika buduje a tvoří. Vzorce je třeba dokázat matematickou indukcí (některé – podle času).

1. **Konečné soubory prvků, ve kterých záleží na pořadí prvků** **– variace, – variace s opakováním, – permutace, – permutace s opakováním**

**①** **Variace k-té třídy z n prvků**  (prvky se nesmí opakovat)

1 2 3 4 5

x 12 13 14 15

21 x 23 24 25

31 32 x 34 35

41 42 43 x 45

51 52 53 54 x

231 234 235 z každé uspořádané dvojice se vytvoří 3 uspořádané trojice

521 523 524

………..

**Počet řádků**

**Prvků v řádku**

**Zobecnění:**

…………..

**②** **Variace k-té třídy z n prvků s opakováním**

1 2 3 4 5

11 12 13 14 15

21 22 23 24 25

31 32 33 34 35

41 42 43 44 45

51 52 53 54 55

231 232 233 234 235 z každé uspořádané dvojice se vytvoří 5 uspořádaných trojic

521 522 523 524 525

………..





**Zobecnění:**

…………..

**③ Permutace z n prvků** (prvky se nesmí opakovat)

Permutace z n prvků = variace k-té třídy z n prvků:

④ **Permutace s opakováním**

V této množině je k1 = 4 prvků typu ***x*** a k2 = 3 prvků typu***y***, tedy celkem k = k1 + k2 = 7 prvků.

Počet permutací (bez opakování) z těchto prvků je .

Jedna z těchto permutací je např. . Kdybychom z této permutace tvořili další tak, že bychom všechny prvky typu *y* nechali na „svých“ místech a „promíchávali“ bychom pouze prvky typu ***x***, získali bychom spolu s původní celkem 4! permutací. Ty všechny by ovšem splynuly v jedinou permutaci v okamžiku, kdy bychom přestali rozlišovat prvky typu ***x***, tj. zavedli bychom . Množina *M* by se změnila na , vybraná permutace by se změnila na a počet permutací (teď už s opakováním prvku *x*) by se změnil na .

Když přestaneme rozlišovat navíc i prvky typu *y*, bude a počet permutací s opakováním bude

**Zobecnění:**  Přitom .

Počet všech permutací s opakováním z prvků množiny *M* je

1. **Konečné soubory prvků, ve kterých nezáleží na pořadí prvků – kombinace, – kombinace s opakováním**

**① Kombinace k-té třídy z n prvků** (prvky se nesmí opakovat)

Vytvořme variace 3. třídy z těchto pěti prvků. Je jich .

Uvědomme si, že např. 123, 132, 213, 231, 312, 321 představuje 3! = 6 různých variací, ale jedinou kombinaci třetí třídy z pěti prvků. Podobně každých 3! variací vytvořených „promícháním“ každé trojice prvků množiny *M* představuje jedinou kombinaci. Proto .

**Zobecnění:**

Pozn.:

…Skutečnost, že v čitateli i jmenovateli posledního zlomku je stejný počet činitelů, umožňuje velmi zjednodušit výpočet kombinačních čísel:

Např.: 1) místo ;

2) …. využití pravidla

**②** **Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním**

Aby učitel dosáhl pochopení tvorby kombinací s opakováním u co největšího počtu studentů, měl by jim na začátku ukázat několik konkrétních příkladů:

Př.: Nechť . Vypište několik kombinací s opakováním páté třídy ze tří prvků množiny M a pokuste se zjistit, kolik takových kombinací existuje.

Řeš.: ……. Jak zjistit počet všech možných kombinací s opakováním páté třídy ze tří prvků? 1. způsob …. Použít vzorec , tedy 2. způsob …. Využít skutečnosti, že každou kombinaci s opakováním lze jednoduše převést na permutaci s opakováním. V případě tří prvků stačí vytvořit prostor s dvěma oddělovači (oddělovačů je vždy o jeden méně než prvků – viz obrázek). Pak zvolíme dva grafické znaky: – první pro oddělovač …. např. **│ –** druhý jako značku registrující přítomnost prvku v „jeho“ prostoru …. např. •

prvky 1

prvky 2

prvky 3

Zápis

znamená

Zápis

znamená

Zápis

znamená

Je evidentní, že všechny kombinace s opakováním páté třídy ze tří prvků dokážeme zobrazit pomocí pouhých dvou druhů znaků: pět modrých teček odpovídá pěti použitým prvkům (páté třídě), dvě červené rysky představují dva potřebné oddělovače). Zároveň je jasné, že na pořadí těchto znaků záleží. Proto musíme pracovat s permutacemi s opakováním:

Tento druhý způsob řešení úlohy je jednoduchý, srozumitelný a logický, takže jej studenti mohou používat vždy, když hledají počet kombinací s opakováním, a to aniž by si museli pamatovat nepříjemný vzorec. Navíc díky němu může učitel studentům ukázat, jak lze ke vzorci dojít: .

Základní poznatky:

Poznámka: Ve výsledcích příkladů 2 – 6  této části uveďte také druh kombinatorické skupiny, kterou příklad procvičuje.

1. MA 2017 Čtyřciferné přirozené číslo se má sestavit ze čtyř **různých** číslic. Na prvním místě má být číslice 2 a na místě desítek lichá číslice. (Daným podmínkám vyhovují např. čísla 2 430 a 2 793.) Kolik různých čísel je možné uvedeným způsobem sestavit?

a) 21 b) 240 c) 280 d) 360 e) jiný počet [C]

1. Je dána množina M = {1, 2, 3, 4, 5}.
2. Kolik trojciferných čísel, v nichž se neopakují cifry, lze vytvořit z jejich prvků? [60, variace 3. třídy z 5 prvků bez opakování]
3. Kolik z nich je dělitelných pěti?

[12, variace bez opakování]

1. Kolik pěticiferných čísel bez opakování číslic lze vytvořit z prvků množiny M? [120, permutace z 5 prvků (bez opakování) nebo

variace 5. třídy z 5 prvků bez opakování]

Met.: Učitel by měl ukázat studentům dva způsoby řešení a nechat na studentech, který z nich si vyberou, až budou psát prověrku: 1. způsob: užitím vzorců a) ; b) Poslední cifra musí být 5, obsazujeme tedy jen první dvě pozice v čísle a nesmíme už použít 5 … ; c)

2. způsob: užitím kombinatorického pravidla součinu:

**5** možností

**4** možnosti

**3** možnosti

**Trojciferné číslo – znázornění pozic**

Počet možností: **5.4.3 = 60**

**a)**

4 možnosti

3 možnosti

1 možnost

**Trojciferné číslo – znázornění pozic**

Počet možností: **4.3.1** = **12**

b)

**5**

**5** možností

**4** možnosti

**3** možnosti

**Pěticiferné číslo – znázornění pozic**

Počet možností**: 5.4.3.2.1 = 120**

**c)**

**2** možnosti

**1** možnost

Pozn.: Zadání úlohy by měl učitel ještě zkomplikovat tím, že mezi prvky množiny M zařadí nulu. Pak může být např. . Předchozí výpočet je potom třeba doplnit o vyřazení všech trojic, které mají nulu na prvním místě. Úlohu lze nejprve využít jako prémiovou úlohu, jejíž správné řešení může učitel odměnit …

1. Řešte úlohu č. 2 pro případ, kdy se cifry mohou opakovat.

[a) 125, variace 3. třídy z 5 prvků s opakováním b) 25, variace s opakováním c) 3125, variace 5. třídy z 5 prvků s opakováním]

1. Kolik existuje osmiciferných čísel, ve kterých jsou 3 dvojky, 1 pětka a 4 šestky?

[280, 8 členné permutace s opakováním typu P´**3,1,4**(8)]

1. Kolik existuje tříprvkových podmnožin množiny M?

[10, kombinace 3. třídy z 5 prvků bez opakování]

1. Student psal v matematice během pololetí 7 písemných prací a známky na konci pololetí uspořádal od nejlepších po nejhorší, např. 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5. Kolik různých výsledků mohl student získat?

[330, kombinace 7. třídy z 5 prvků s opakováním]

1. Vyjádřete jedním kombinačním číslem:

a)  b)  [a)  b) ]

Typové příklady standardní náročnosti

1. MA 2016 Je dána rovnice s neznámou nN: 

Jaké je řešení rovnice? A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) jiné řešení [A]

1. Kolik přímek je určeno 12 body, jestliže:

a) žádné tři body neleží na přímce? b) čtyři z nich leží na přímce? [66, 61]

1. S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet:
2. všech možných pořadí jejich vystoupení.
3. všech možných pořadí jejich vystoupení, v nichž vystupuje A po E.
4. všech možných pořadí jejich vystoupení, v nichž vystupuje A ihned po E

[720, 360, 120]

1. MA 2014 Trenér vybírá z 5 děvčat a 4 chlapců šestičlennou skupinu, v níž budou 3 dívky a 3 chlapci. Kolika způsoby lze šestičlennou skupinu za těchto podmínek sestavit?

A) 16 B) 20 C) 40 D) 180 E) jiným počtem

[C]

1. V sérii 12 výrobků jsou 3 vadné. Kolika způsoby lze z nich vybrat 6 výrobků, z nichž právě 2 jsou vadné? [378]
2. a) Z kolika prvků lze vytvořit 600 variací druhé třídy bez opakování? [25]

b) Kolik prvků dává 55 kombinací 2. třídy bez opakování? [11]

1. a) Upravte a určete podmínky pro n:

 []

b) Řešte v Z:  [5]

1. Řešte rovnici a nerovnici:

a)  b)  < 72 [a) {5}, b) {8, 9}]

Rozšiřující cvičení

1. V novinovém stánku lze koupit 10 druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v 50 exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit:

a) 15 pohledů b) 51 pohledů c) 8 různých pohledů [1 307 504; K´(51, 10) - 10; 45]