30 Binomická věta a její aplikace – met.

Stručný přehled teorie

Binomická věta: Pro každá dvě komplexní čísla *a, b* a pro každé přirozené číslo *n* platí:

$$\boxed{(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^n}_{1.\ \text{člen}} + \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b}_{2.\ \text{člen}} + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}_{3.\ \text{člen}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}}_{k.\ \text{člen}} + \underbrace{\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}_{(k+1).\ \text{člen}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n-1}a.b^{n-1}}_{n.\ \text{člen}} + \underbrace{\binom{n}{n}b^n}_{(n+1).\ \text{člen}}}$$

neboli $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$

Pro řešení řady úloh je dobré si uvědomit, že (k + 1). člen binomického rozvoje je:

$$\boxed{A_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Pro *n*-tou mocninu dvojčlenu *a + b* tvoří binomické koeficienty n-tý řádek Pascalova trojúhelníku.

1	$\binom{0}{0}$
1 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
1 2 1	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
1 3 3 1	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
1 5 10 10 5 1	…………………..
1 ……….	…………………
………….	
………..	

Met.: Vzhledem k tomu, že probírání binomické věty je ve středoškolské matematice zařazeno dříve než probírání komplexních čísel, musí učitel binomický rozvoj nadefinovat zatím pouze pro množinu čísel reálných. Rozšíření na množinu komplexních čísel přijde na řadu až při maturitním opakování v semináři z matematiky v maturitním ročníku.

Téma binomické věty je po stránce rozsahu i po stránce obsahu relativně nenáročné. Lze je využít např. k zopakování výpočtů s mocninami a odmocninami (viz př. 6, 7, …).

Základní poznatky:

1. Vypočítejte:

   a) $\left(2x - \frac{y}{3}\right)^4$

   b) $\left(\sqrt{2} + i\sqrt{3}\right)^5$

   Pozn.: Pro komplexní jednotku *i* platí $i^2 = -1$.

$$\left[a)\ 16x^4 - \frac{32}{3}x^3y + \frac{8}{3}x^2y^2 - \frac{8}{27}xy^3 + \frac{y^4}{84}, b) - 11\sqrt{2} - 31\sqrt{3}i\right]$$

2. Vypočítejte sedmý člen binomického rozvoje $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$. [672]

Typové příklady standardní náročnosti:

3. Určete, pro jaké x je pátý člen rozvoje $\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ roven 105. $\left[\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

Met.: Nejčastější chybou, které se studenti dopouštějí při výpočtu této (a podobně třeba i předcházející) úlohy, je nesprávný zápis pátého (u předchozí úlohy sedmého) členu binomického rozvoje.

Správné řešení:

$$A_5 = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2x}\right)^6 . \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 105$$

$$\frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} . \frac{1}{2^{10}.x^6} = 105$$

$$\frac{210}{2^{10}.x^6} = 105$$

$$2^{-9} = x^6$$

$$x = \pm 2^{-\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^3}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

4. Pomocí binomické věty vypočítejte $0{,}98^{10}$ na 6 desetinných míst.

Met.: Návod: $0{,}98^{10} = (1 - 0{,}02)^{10} \sim \binom{10}{0}.1^{10}.(-0{,}02)^0 + \binom{10}{1}.1^9.(-0{,}02)^1 + \binom{10}{2}.1^8.(-0{,}02)^2 + \binom{10}{3}.1^7.(-0{,}02)^3 + \binom{10}{4}.1^6.(-0{,}02)^4 - \binom{10}{5}.1^5.(-0{,}02)^5 = 1 - 0{,}2 + 0{,}0180 - 0{,}00096 + 0{,}0000336 - 0{,}0000008064 = \cdots$ … další členy rozvoje už prvních 6 desetinných míst neovlivní

5. Určete součet $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.

[Realisticky.cz – 9.1.19, 2^n]

6. Zjistěte, který člen binomického rozvoje výrazu $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^7$ je součinem koeficientu a neznámé $\sqrt{x}$.

[5. člen]

Met.: U podobných úloh je důležité všímat si přesně znění otázky. Pokud se úloha ptá na to, ***kolikátý*** člen rozvoje vykazuje požadovanou vlastnost, ***stačí*** skutečně ***určit pořadí*** členu. Jestliže však máme zjistit, ***který*** nebo ***jaký*** člen rozvoje má danou vlastnost, je třeba ***raději*** kromě ***pořadí*** vypočítat ***i hodnotu*** tohoto členu.

Studentům je rozumné doporučit, aby k výpočtům použili raději jednodušší člen $A_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k$ místo komplikovanějšího $A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}.b^{k-1}$.

Řeš.: $\binom{7}{k}.\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{7-k}.\left(-\sqrt{x}\right)^k = M.\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{7-k}.x^{\frac{k}{2}} = M.x^{\frac{k-7}{2}+\frac{k}{2}} = M.x^{\frac{2k-7}{2}}$ ... pro určení pořadí hledaného členu není hodnota koeficientu M důležitá. To podstatně zjednoduší výpočet.

$M.x^{\frac{2k-7}{2}} = M.x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \frac{2k-7}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad k = 4.$ → pátý člen A_5

$A_5 = \binom{7}{4}.\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3.\left(-\sqrt{x}\right)^4 = +\binom{7}{3}.\frac{8}{x\sqrt{x}}.x^2 = \frac{7.6.5}{3.2.1}.8.\sqrt{x} = 280\sqrt{x}$

7. Státní maturita 2015 Matematika+

Jaký je absolutní člen binomického rozvoje výrazu $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{15}$ **?**

Poznámka: Absolutní člen neobsahuje proměnnou x.

A) $\frac{15!}{10! \cdot 5!}$

B) $\frac{15!}{12! \cdot 3!}$

C) $\frac{15!}{8! \cdot 7!}$

D) $\frac{15!}{6! \cdot 9!}$

E) žádný z uvedených

$\left[\frac{15!}{12!.3!}\right]$