31 Typy matematických vět a základní metody jejich důkazů – met.:

Stručný přehled teorie

Matematika nepřipouští plané řeči o pojmech, jejichž smysl není jasně a jednoznačně stanoven.

Každý matematický pojem musí být přesně definován.

Každá **matematická teorie** musí obsahovat:

1. ***Základní pojmy*** - ty se nedefinují, pouze jsou vysvětleny pomocí představ a příkladů (z něčeho se vyjít musí) – je jich jen omezené množství (např. pro planimetrii – bod, přímka, rovina)
2. ***Axiomy*** - jasně vymezené vztahy mezi základními pojmy (o jejich pravdivosti se nepochybuje) (např. pro planimetrii – Daným bodem lze vést s danou přímkou jedinou rovnoběžku)
3. ***Definice*** - představují přesné vymezení matematického pojmu pomocí pojmů základních nebo pojmů dříve definovaných (např. v definici kružnice k(S; r) = $\{X \in \pi_2 ; |XS| = r\}$ jsou použity základní pojmy *bod* a *rovina* a dříve definované pojmy *množina* a *vzdálenost bodů*)
4. ***Matematické věty*** - výroky (tvrzení), jejichž pravdivost se musí dokázat. Důkaz musí vycházet z axiomů nebo vět dokázaných dříve. Jakékoliv tvrzení se může do dané matematické teorie zařadit až tehdy, je-li dokázáno.

Typy matematických vět: 1) $\boxed{A}$ 2) $\boxed{A \Rightarrow B}$ 3) $\boxed{A \Leftrightarrow B}$

1) Důkaz věty (tvrzení) typu A:

- PŘÍMÝ … princip:

1) V – platí (axiom nebo předem dokázaná věta)
2) $\underbrace{V \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n}_{\text{řetězec platných implikací}}$
3) $A_n \Rightarrow A$ (poslední tvrzení řetězce je dokazované tvrzení)

- SPOREM … princip:

1) Předpoklad, že A neplatí, tzn. platí $\neg A$
2) $\underbrace{\neg A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B}_{\text{řetězec platných implikací}}$, kde B je evidentní nepravda
3) Vzhledem k pravdivosti všech implikací v řetězci muselo být chybné výchozí tvrzení – tj. předpoklad o neplatnosti A.

2) Důkaz věty typu A $\Longrightarrow$ B:

- **PŘÍMÝ** … princip : 1) Nechť A platí

2) $\underbrace{A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n}_{\textit{řetězec platných implikací}}$

3) $A_n \Rightarrow B$ platí

- **NEPŘÍMÝ** … princip založen na ekvivalenci dané implikace A $\Longrightarrow$ B a její obměny $\neg B \Longrightarrow \neg A$.
  Obměněná implikace $\neg B \Longrightarrow \neg A$ se dokazuje přímo.

- **SPOREM** … princip:
  1) Předpoklad, že A $\Longrightarrow$ B neplatí, tzn. platí $\neg(A \Longrightarrow B) = A \wedge \neg B$
  2) $\underbrace{(A \wedge \neg B) \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow T_{n-1} \Rightarrow T_n}_{\textit{řetězec platných implikací}}$, kde T_n je evidentní nepravda
  3) Vzhledem k pravdivosti všech implikací v řetězci muselo být chybné výchozí tvrzení –
     – tj. předpoklad o neplatnosti A => B

3) Důkaz věty typu A$\Leftrightarrow$B:

Využijeme skutečnosti, že ekvivalence logicky odpovídá oboustranné implikaci:

$$(A \Leftrightarrow B) = \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big),$$

takže místo jedné ekvivalence dokážeme dvě implikace.

<u>**Matematická indukce**</u>: je důkazová metoda, kterou se dokazují výroky typu:

a) $\forall n \in N$: $T_{(n)}$
b) $\forall n \in N, kde\ n > n_0$: $T_{(n)}$.

Princip: Nechť $T_{(n)}$ je tvrzení o proměnné n, které chceme dokázat. $n, k \in N$

I. <u>**První krok**</u>: $\boxed{T_{(1)}}$ – dokážeme platnost tvrzení pro 1 (případně pro nejmenší přirozené číslo n_0, pro něž má T platit)
II. <u>**Indukční krok**</u>: dokážeme platnost implikace $\boxed{T_{(k)} \Rightarrow T_{(k+1)}}$, tedy dokážeme, že z platnosti dokazovaného tvrzení T pro nějaké přirozené $k \geq n_0$ automaticky plyne platnost tohoto tvrzení i pro bezprostředně následující přirozené číslo k + 1.

Met.: Všechny matematické informace, se kterými se dosud studenti setkali na základní škole nebo v prvních měsících studia na gymnáziu, brali jako samozřejmost. Nepochybovali o ničem, co slyšeli z úst svého vyučujícího matematiky. Na otázku „Jaký je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku?“ odpověděli „180°“. Na otázku „Kolik kolmic lze vést daným bodem k dané přímce?“ odpověděli „jednu“ nebo „právě jednu“. … Nyní nastal čas, aby učitel poprvé vyvolal u studentů pochybnost o věcech, které dosud považovali za dané a jednoznačné, aby je přinutil přemýšlet novým způsobem, aby v nich vyvolal zvědavost a touhu objevovat nové věci za tajemnými dveřmi, které se před nimi v matematice pootevírají. Stačí k tomu vyslovit jednoduchou a prostou námitkou „Určitě? Nemůže to být třeba 181°? Proč je to právě 180°?“, nebo „Jsi si jist, že jen jedna kolmice? Co když nakreslím dvě nebo tři těsně vedle sebe? Půjde to? Budou to všechno kolmice? Proč myslíš, že ne? Zkusíš to dokázat?“ Je docela možné, že se mezi studenty najde některý s mimořádným matematickým talentem, komu se (vzhledem k relativní jednoduchosti problému) podaří přiblížit se úvahou ke správnému důkazu.

Téma by mělo být zařazeno bezprostředně po probrání Výrokové logiky v prvním ročníku čtyřletého gymnázia. V žádném případě by nemělo mít podobu přednášky a nemělo by se zařazovat až do předmaturitního období, jak se doporučuje v kapitole „Logická stavba matematiky“ na Matematika SŠ.realisticky.cz. Je sice pravda, že téma je velmi náročné a patří nepochybně k nejobtížnějším pasážím matematiky, s jakými se studenti dosud setkali. Ale zařazení těsně po Výrokové logice zaručí nejlepší pochopení všech užívaných jevů a souvislostí a zároveň umožní důkladné procvičení a prohloubení znalostí z oblasti formální logiky. Vzhledem k tomu, že celou gymnaziální matematikou, všemi probíranými tématy, od prvního až po maturitní ročník se jako červená nit táhne spousta důkazových úloh, nelze rozhodně s probráním principů důkazů matematických vět otálet a připustit, aby studenti předmaturitních ročníků při řešení důkazových úloh nevěděli nic o principech důkazů. Naopak, studenti musí umět zvolit vhodnou důkazovou metodu a rozumět každému jejímu kroku.

Místo přednášky by měl učitel využít materiálů zpracovaných v teorii k tomuto tématu. Tyto materiály by měl dát studentům k dispozici a projít s nimi společně úvod až po typy matematických vět a princip první důkazové metody.

Každý typ matematické věty a každý způsob jejího důkazu by pak měl učitel studentům důkladně vysvětlit za pomoci obecného principu ze zpracovaných teoretických materiálů, které studenti dostali, a demonstrovat (samozřejmě za vydatné pomoci studentů) důkaz na jednom, dvou či několika konkrétních zadáních.

Sbírky úloh ze středoškolské matematiky jsou plné úloh důkazových. Učitel by si měl dát práci, vyhledat třeba 15 – 20 takových zadání (případně zvolit počet podle vlastního uvážení), soustředit je do jednoho materiálu, dát jej studentům k dispozici k procvičení a vyučovací hodiny potom organizovat tak, aby si studenti pod jeho dohledem některé důkazy vyzkoušeli, případně aby v rámci konzultačních částí hodin zodpověděl dotazy.

1) Důkaz věty (tvrzení) typu A:

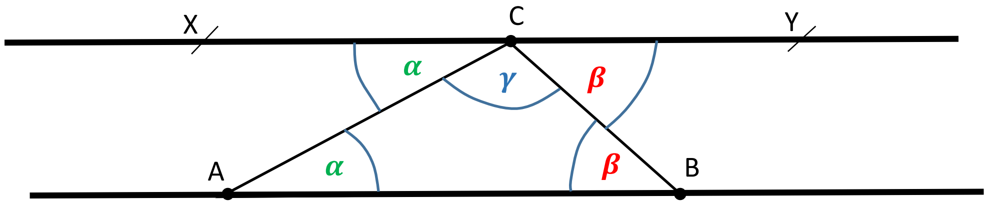
- **PŘÍMÝ** … princip:

1) V – platí (axiom nebo předem dokázaná věta)
2) $\underbrace{V \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n}_{\textit{řetězec platných implikací}}$
3) $A_n \Rightarrow A$ (poslední tvrzení řetězce je dokazované tvrzení)

Konkrétní příklady by měl učitel volit zejména s ohledem na různé možnosti hledání výchozího tvrzení V. Právě první krok důkazu mívá rozhodující vliv na jeho řešení.

Př.1: Dokažte, že v každém trojúhelníku je součet vnitřních úhlů roven 180°.

Řeš.: 1) V Axiom: Daným bodem (C) lze k dané přímce ($\leftrightarrow AB$) vést jedinou rovnoběžku ($\leftrightarrow XY$)



2) V => A_1 => A_2 => … => A_{n-1} => A_n

$$\leftrightarrow XY \parallel \leftrightarrow AB \Rightarrow \underbrace{(|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACX| = \alpha\ ) \wedge (|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCY| = \beta)}_{\text{Střídavé úhly vyťaté příčkou na rovnoběžkách}} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = |\sphericalangle XCY|$$

3) A_n => A

$\alpha + \beta + \gamma = |\sphericalangle XCY|$ => $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ cbd.

Př.2: Dokažte, že součet libovolných pěti po sobě následujících přirozených čísel je dělitelný pěti.

Řeš.: 1) Nechť je dáno pět po sobě následujících přirozených čísel.

2) Pak je lze zapsat jako $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, kde $n \in N$.

Pak jejich součet je $s = n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4$.

Pak $s = 5n + 10$.

Pak $s = 5(n+2)$

3) Pak $5 \mid s$. cbd.

Př.3: Dokažte, že platí: $\sqrt{13+\sqrt{12}} < 1 + \sqrt{13-\sqrt{12}}$.

Řeš.: Výchozí tvrzení V se pokusíme najít úpravou zadané nerovnosti:

$\sqrt{13+\sqrt{12}} < 1 + \sqrt{13-\sqrt{12}}$ $/^2$ … ekvivalentní úprava

$13+\sqrt{12} < 1 + 2.\sqrt{13-\sqrt{12}} + 13 - \sqrt{12}$

$2\sqrt{12} - 1 < 2.\sqrt{13-\sqrt{12}}$ $/^2$… ekvivalentní úprava

$4.12 - 4\sqrt{12} + 1 < 4.(13-\sqrt{12})$

$49 - 4\sqrt{12} < 52 - 4\sqrt{12}$

$49 < 52$ … evidentně platí – našli jsme výchozí tvrzení

směr vedení důkazu

- SPOREM … princip:

1) Předpoklad, že A neplatí, tzn. platí ¬A

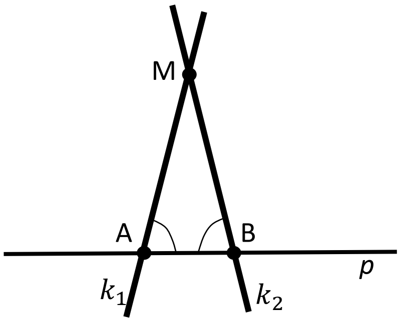
2) $\underbrace{\neg A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n}_{\textit{řetězec platných implikací}} \Rightarrow B$, kde B je evidentní nepravda

3) Vzhledem k pravdivosti všech implikací v řetězci muselo být chybné výchozí tvrzení – tj. předpoklad o neplatnosti A.

Př.1: Dokažte, že $\underbrace{\text{každým bodem v rovině lze vést k dané přímce } p \text{ jedinou kolmici}}_{A}$.

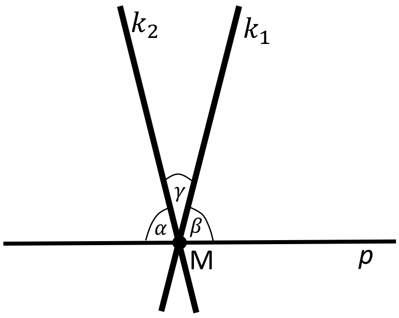
Řeš.: 1) Předpokládejme, že dokazované tvrzení A neplatí.
Platí tedy jeho negace ¬A: Existuje bod v rovině, kterým lze vést k dané přímce *p* aspoň dvě různé kolmice.

2) a) Nechť M je libovolný bod roviny, který neleží na přímce *p*.



Nechť k_1 a k_2 jsou dvě kolmice vedené bodem M k přímce *p*.
$k_1 \neq k_2$, proto $A \neq B$. Proto ABM je trojúhelník. Jeho vnitřní úhly mají velikost: $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle ABM| = 90° \wedge |\sphericalangle AMB| > 0°$.
Součet vnitřních úhlů ΔABM je proto větší než 180°. To je ale evidentní nepravda.

b) Nechť M je libovolný bod roviny, který leží na přímce *p*.



Nechť k_1 a k_2 jsou dvě kolmice vedené bodem M k přímce *p*.
Proto $\alpha = \beta = 90°$. Protože $k_1 \neq k_2$, je $\gamma > 0°$. Velikost přímého úhlu s vrcholem M a rameny na opačných polopřímkách přímky p je proto $\alpha + \beta + \gamma$ >180°. To je ale evidentní nepravda.

3) Bez ohledu na polohu bodu M jsme dospěli k evidentně nepravdivému tvrzení. Tozn., že úvodní předpoklad o neplatnosti dokazovaného tvrzení byl chybný. cbd.

Př.2: Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho. (Pozn. Jde o nádhernou historickou úlohu, kterou vyřešil už tři století př. n. l. Eukleidés z Alexandrie.)

Řeš.: 1) Předpokládejme, že dokazované tvrzení A neplatí.
Platí tedy jeho negace ¬A: Prvočísel je konečný počet.

2) Pak můžeme všechna prvočísla zapsat a seřadit podle velikosti od nejmenšího k největšímu: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. ($p_n$ je největší ze všech prvočísel.)
Pak lze vytvořit číslo $\boldsymbol{a} = p_1 . p_2 . p_3 . \dots . p_n + 1$. Pro toto číslo $\boldsymbol{a}$ nepochybně platí:
– je větší než každé z prvočísel $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$;
– není dělitelné žádným z prvočísel $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$;

3) Pak může nastat pouze jedna ze dvou situací:

- buď je $\boldsymbol{a}$ prvočíslo, to je ale v rozporu s tím, že p_n je největší prvočíslo,
- nebo je $\boldsymbol{a}$ složené číslo, pak ale musí existovat ještě další prvočíslo (evidentně větší než p_n), kterým je $\boldsymbol{a}$ dělitelné, protože žádným z prvočísel $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ dělitelné není.. To je ovšem také v rozporu s předpokladem, že $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ jsou všechna existující prvočísla.

Náš předpoklad o tom, že prvočísel je konečný počet, je evidentně chybný.

---

2) Důkaz věty typu A $\Longrightarrow$ B:

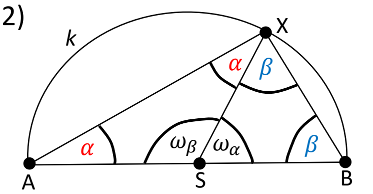
- **PŘÍMÝ** … princip :

1) Nechť A platí
2) $\underbrace{A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n}_{\text{řetězec platných implikací}}$
3) $A_n \Rightarrow B$ platí

Př.1: Dokažte: Je-li S střed úsečky AB a $k = k\left(S; \frac{|AB|}{2}\right)$, pak pro každý bod $X \in k$, kde $X \neq A, B$ platí: $|\sphericalangle AXB| = 90°$.

Řeš.: 1) Nechť je dána úsečka AB, S její střed, $k = k\left(S; \frac{|AB|}{2}\right)$ a $X \in k$, kde $X \neq A, B$.

2)



Pak trojúhelníky ASX a BSX jsou rovnoramenné.

Pak $\omega_\alpha = 2\alpha$, neboť jde o vnější úhel ΔASX

a $\omega_\beta = 2\beta$, neboť jde o vnější úhel ΔBSX.

Pak $\omega_\alpha + \omega_\beta = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180°$

3) $2(\alpha + \beta) = 180°$. Proto $\alpha + \beta = 90°$. cbd.

Př.2: Dokažte: Pro každé přirozené číslo *n* platí: je-li *n* liché, pak je i n^2 liché.

Řeš.: 1) Nechť *n* je libovolné liché číslo.

2) Pak lze zapsat … $n = 2k + 1$, kde $k \in Z$.

Pak $n^2 = (2k+1)^2$

Pak $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Pak $n^2 = 2.(2k^2 + 2k) + 1$, $\quad 2k^2 + 2k = m \in Z$

3) Pak $n^2 = 2.m + 1$, kde $m \in Z$. Pak n^2 je liché. cbd.

- **NEPŘÍMÝ** … princip založen na ekvivalenci dané implikace A => B a její obměny ¬B =>¬A. Obměněná implikace ¬B =>¬A se dokazuje přímo.

Př.1: Dokažte: Pro každé přirozené číslo *n* platí: Jestliže $\underbrace{3 \mid n^2}_{A}$, pak $\underbrace{3 \mid n}_{B}$.

$A \Longrightarrow B$

Řeš.: Místo dané implikace budeme dokazovat obměněnou: Jestliže $\underbrace{3 \nmid n}_{\neg B}$, pak $\underbrace{3 \nmid n^2}_{\neg A}$.

$\neg B \Longrightarrow \neg A$

1) Nechť n je libovolné přirozené číslo, které není dělitelné třemi.

2) Pak $n = 3k + 1$ nebo $n = 3k + 2$, kde $k \in Z$.

Pak $n^2 = (3k+1)^2$ nebo $n^2 = (3k+2)^2$.

Pak $n^2 = 9k^2 + 6k + 1$ nebo $n^2 = 9k^2 + 12k + 4$.

Pak $n^2 = 3.(3k^2 + 2k) + 1$ nebo $n^2 = 3.(3k^2 + 4k + 1) + 1$,

$3k^2 + 2k = m \in Z, \quad 3k^2 + 4k + 1 = l \in Z$

3) Pak $n^2 = 3m + 1$ nebo $n^2 = 3l + 1$, kde $m, l \in Z$. V obou případech $3 \nmid n^2$. cbd.

Př.2: $\boxed{\text{Dokažte: Pro každé přirozené číslo } n \text{ platí: Jestliže } \underbrace{10 \mid (n^2+6)}_{A}, \text{ pak } \underbrace{5 \nmid n}_{B}.}$ $A \Longrightarrow B$

Řeš.: Místo dané implikace budeme dokazovat obměněnou: Jestliže $\underbrace{5 \mid n}_{\neg B}$, pak $\underbrace{10 \nmid (n^2+6)}_{\neg A}$. $\neg B \Longrightarrow \neg A$

1) Nechť n je přirozené číslo dělitelné pěti.

2) Pak $n = 5k$, kde $k \in Z$.

Pak $n^2 = (5k)^2 = 25k^2$

Pak $n^2 + 6 = 25k^2 + 6 = 5.(5k^2+1)+1, \quad 5k^2+1 = m \in Z$

3) Pak $n^2+6 = 5m+1$, kde $m \in Z$. Pak ale $5 \nmid (n^2+6)$ a tím spíše $10 \nmid (n^2+6)$. cbd.

- **SPOREM** … princip:

1) Předpoklad, že A => B neplatí, tzn. platí (A => B)‘ = A ∧ B‘

2) (A ∧ B‘) => T_1 => T_2 => … => T_{n-1} => T_n, kde T_n je evidentní nepravda

řetězec platných implikací

3) Vzhledem k pravdivosti všech implikací v řetězci muselo být chybné výchozí tvrzení – tj. předpoklad o neplatnosti A => B

Př. $\boxed{\text{Dokažte: Pro každé přirozené číslo n platí: je-li } \underbrace{n^2 \text{ sudé číslo}}_{A}, \text{ pak je i } \underbrace{n \text{ sudé číslo}}_{B}.}$ $A \Longrightarrow B$

Řeš.: 1) Přepokládejme, že A => B neplatí, takže platí ¬ (A => B) = A ∧ ¬B.

Nechť tedy platí: $\underbrace{n^2 \text{ je sudé číslo}}_{A}$, $\land$ a zároveň $\underbrace{n \text{ je liché číslo}}_{\neg B}$

2) Pak n^2 je sudé číslo a zároveň $n = 2k+1$, kde $k \in Z$.

Pak n^2 je sudé číslo a zároveň $n^2 = (2k+1)^2$, kde $k \in Z$.

Pak n^2 je sudé číslo a zároveň $n^2 = 4k^2+4k+1$.

Pak n^2 je sudé číslo a zároveň $n^2 = 2.(2k^2+2k)+1$, $kde\ 2k^2+2k = m \in Z$.

Pak n^2 je sudé číslo a zároveň $n^2 = 2m+1$, $kde\ m \in Z$.

3) Pak n^2 je sudé číslo a zároveň n^2 je liché číslo … evidentně nelze. Tozn., že úvodní předpoklad o neplatnosti dokazovaného tvrzení byl chybný. cbd.

Pozn. Důkaz této věty (Je-li n^2 sudé číslo, pak je i n sudé číslo) lze provést i nepřímo. Pokud bychom použili nepřímý důkaz, pak bychom místo implikace „Je-li n^2 sudé číslo, pak je i n sudé číslo“ dokazovali obměněnou implikaci „Je-li n liché, pak je i n^2 liché“ (viz Př.2 odstavce **2) Důkaz věty typu A => B:** PŘÍMÝ způsob).

---

3) Důkaz věty typu A⇔B:

Využijeme skutečnosti, že ekvivalence logicky odpovídá oboustranné implikaci: $(A \Leftrightarrow B) = \big((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)\big)$, takže místo jedné ekvivalence dokážeme dvě implikace.

Př. $\boxed{\text{Dokažte: Pro každé reálné číslo } x \in R \text{ platí: } x \geq 0 \Leftrightarrow |x| - x = 0}$

Řeš.: $(\boxed{x \geq 0 \Leftrightarrow |x| - x = 0}) \Leftrightarrow ((\boxed{x \geq 0 => |x| - x = 0}) \land (\boxed{|x| - x = 0 => x \geq 0}))$

a) $\boxed{x \geq 0 => |x| - x = 0}$ (?)

Nechť $x \geq 0$. Pak $|x| = x$. Pak $|x| - x = 0$. Platí.

b) $\boxed{|x| - x = 0 => x \geq 0}$ (?)

Nechť $|x| - x = 0$. Pak $|x| = x$. Pak $x \geq 0$. Platí. cbd.

Matematická indukce: je důkazová metoda, kterou se dokazují výroky typu:

c) $\forall n \in N$: $\quad T_{(n)}$

d) $\forall n \in N, kde\ n > n_0$: $\quad T_{(n)}$.

Princip: Nechť $T_{(n)}$ je tvrzení o proměnné n, které chceme dokázat. $\quad n, k \in N$

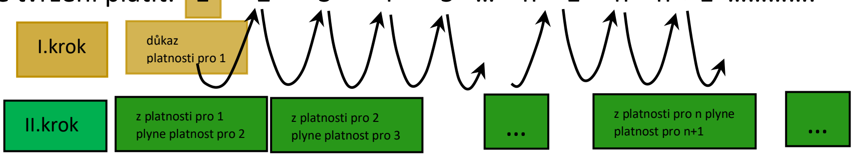
I. <u>První krok:</u> $\boxed{T_{(1)}}$ – dokážeme platnost tvrzení pro 1 (případně pro nejmenší přirozené číslo n_0, pro něž má T platit)

II. <u>Indukční krok:</u> $\boxed{T(k) \Rightarrow T(k+1)}$ – **dokážeme platnost implikace** $T(k) \Rightarrow T(k+1)$, tedy **dokážeme**, že z předpokladu o platnosti dokazovaného tvrzení $T(k)$ pro nějaké přirozené $k \geq n_0$ automaticky plyne platnost tohoto tvrzení i pro bezprostředně následující přirozené číslo *k + 1*, tedy platnost $T(k+1)$.

Pozn.: Předpoklad o platnosti $T_{(k)}$ *jsme oprávněni učinit, neboť jsme v předchozím kroku důkazu dokázali, že minimálně jedno takové k, pro něž tvrzení platí, existuje* ($k = 1$).

Je velmi důležité, aby učitel důkladně a názorně vysvětlil studentům, jak důkazová metoda matematické indukce funguje, aby jí studenti rozuměli a aby se nadchli vědomím, jak mocný a zároveň geniálně prostý důkazový nástroj dostali „do ruky“:

Seznam čísel, pro něž má dokazované tvrzení platit: 1 2 3 4 5 … n – 1 n n + 1 …………



Př.1: $\boxed{\text{Dokažte užitím matematické indukce: } \forall n \in N:\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n.(n+1)}{2}.}$

Řeš.: I. $T_{(1)}$ $\quad (?)$ $\quad$ (neboli dokážeme platnost dokazovaného tvrzení pro $n = 1$)

$$\left.\begin{array}{l} L_{(1)} = 1 \\ P_{(1)} = \frac{1.(1+1)}{2} = 1 \end{array}\right\} \quad \boxed{L_{(1)} = P_{(1)},\ \ plat\acute{\imath}}$$

II. $T_{(k)} \Rightarrow T_{(k+1)}$ $\quad (?)$ $\quad$ (neboli dokážeme platnost implikace … z $T_{(k)}$ plyne $T_{(k+1)}$)

Předpokládejme platnost $T_{(k)}$ dokazovaného tvrzení pro nějaké přirozené *k*.

Tedy předpokládejme, že platí $T_{(k)}$: $\quad 1+2+3+\cdots+k = \frac{k.(k+1)}{2}$.

Na základě tohoto předpokladu dokážeme, že platí také $T_{(k+1)}$, to znamená, že dokážeme:

$$1+2+3+\cdots+k+k+1 = \frac{(k+1).(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}\ .$$

$$L_{(k+1)} = 1+2+3+\cdots+k+k+1 = L_{(k)}+k+1 = \frac{k.(k+1)}{2}+k+1 = \frac{k.(k+1)+2.(k+1)}{2} =$$

$$\left.\begin{array}{l} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}; \\ P_{(k+1)} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}. \end{array}\right\} \quad \boxed{L_{(k+1)} = P_{(k+1)}} \quad \text{cbd.}$$

Pozn.: K této úloze se váže historka o malém žáku Gaussovi, který kdysi, pro zadávajícího učitele nepochopitelně rychle, sečetl takto prvních 100 přirozených čísel.

Gauss si zapsal:	1	+ 2	+ 3	+ 4	+	………	+	98	+	99	+	100
a znovu v opačném pořadí:	100	+ 99	+ 98	+ 97	+	………	+	3	+	2	+	1

Součet čísel v každém zeleném obdélníčku je 101. Obdélníčků je celkem 100. Celkový součet všech zapsaných čísel je tedy 100.101 = 10100. Protože ale malý Gauss součet prvních 100 přirozených čísel zapsal dvakrát, musel ještě výsledek vydělit dvěma a došel k výsledku 5050.

Srovnej: $1+2+3+\cdots+99+100 = \frac{100.101}{2} = \frac{100.(100+1)}{2} = 5050$ … součet prvních 100 členů aritmetické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a diferencí $d = 1$.

Př.2: Dokažte užitím matematické indukce: $\forall n \in N: \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n.(4n^2-1)}{3}$.

Pozn.: Než začneme úlohu řešit, je třeba se ujistit, že všichni studenti správně chápou zápis $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$. Může se stát, že se se znakem sumy setkávají poprvé. Pokud tomu tak je, lze studentům předvést nějaký velmi jednoduchý příklad, díky němuž bude rychle jasno:

Např.: $\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{3i+7}{5i}\right)^{i+8} = \left(\frac{3.1+7}{5.1}\right)^{1+8} + \left(\frac{3.2+7}{5.2}\right)^{2+8} + \left(\frac{3.3+7}{5.3}\right)^{3+8} + \left(\frac{3.4+7}{5.4}\right)^{4+8}$;

nebo: $\sum_{i=1}^{n}\left(\square^{i-5} + \frac{\square}{6i}\right) = \left(\square^{1-5} + \frac{\square}{6.1}\right) + \left(\square^{2-5} + \frac{\square}{6.2}\right) + \left(\square^{3-5} + \frac{\square}{6.3}\right) + \cdots + \left(\square^{n-5} + \frac{\square}{6.n}\right)$

Řeš.: I. $T_{(1)}$ (?)

$L_{(1)} = (2.1-1)^2 = 1$

$P_{(1)} = \frac{1.(4.1^2-1)}{3} = 1$

$\boxed{L_{(1)} = P_{(1)}, \text{ platí}}$

II. $T_{(k)} \Rightarrow T_{(k+1)}$ (?)

Předpokládejme platnost $T_{(k)}$ dokazovaného tvrzení pro nějaké přirozené k. Tedy předpokládejme, že platí $T_{(k)}$: $\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 = \frac{k.(4k^2-1)}{3}$.

Na základě tohoto předpokladu dokážeme, že platí také $T_{(k+1)}$, to znamená, že dokážeme:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 = \frac{(k+1).(4(k+1)^2-1)}{3} = \frac{(k+1).(4k^2+8k+3)}{3}$$

- -

$$L_{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2.(k+1)-1)^2 = \frac{k.(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2 =$$

$$= \frac{k.(2k+1).(2k-1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{(2k+1).[(2k^2-k)+3.(2k+1)]}{3} = \frac{(2k+1).(2k^2+5k+3)}{3} = \frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}$$

$$P_{(k+1)} = \frac{(k+1).(4k^2+8k+3)}{3} = \frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}$$

$\boxed{L_{(k+1)} = P_{(k+1)}}$ cbd

Př.3: Dokažte užitím matematické indukce: $\forall n \in N: 4 \mid (n^4+6n^3+11n^2+6n)$.

Řeš.: I. $T_{(1)}$ (?)

Hodnota polynomu pro $n=1$ je $1^4 + 6.1^3 + 11.1^2 + 6.1 = 24$ ... $4 \mid 24$ platí.

II. $T_{(k)} \Rightarrow T_{(k+1)}$ (?)

Předpokládejme platnost $T_{(k)}$ dokazovaného tvrzení pro nějaké přirozené k. Tedy předpokládejme, že platí $T_{(k)}$: $4 \mid (k^4+6k^3+11k^2+6k)$. Tozn., že $k^4+6k^3+11k^2+6k = 4m$, kde $m \in Z$.

Na základě tohoto předpokladu dokážeme, že platí také $T_{(k+1)}$, to znamená, že dokážeme:

$$4 \mid \left((k+1)^4 + 6(k+1)^3 + 11(k+1)^2 + 6(k+1)\right).$$

- -

Upravíme polynom: $(k+1)^4 + 6(k+1)^3 + 11(k+1)^2 + 6(k+1) =$

$= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 + 6k^3 + 18k^2 + 18k + 6 + 11k^2 + 22k + 11 + 6k + 6 =$

$= k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k + 4k^3 + 24k^2 + 44k + 8 = 4m + 4.\underbrace{(k^3+6k^2+11k+2)}_{l \in Z} =$

$= 4m + 4l = 4.(m+l) = 4p$, kde $p \in Z$ cbd.

Př.4: $\boxed{\text{Dokažte užitím matematické indukce: } \forall n \in N: 5 \mid (2^{4n+3} - 3).}$

Řeš.: I. $T_{(1)}$ (?)

Hodnota dvojčlenu pro $n = 1$ je $2^{4.1+3} - 3 = 128 - 3 = 125$ ... $5 \mid 125$ platí.

II. $T_{(k)} => T_{(k+1)}$ (?)

Předpokládejme platnost $T_{(k)}$ dokazovaného tvrzení pro nějaké přirozené k. Tedy předpokládejme,

že platí $T_{(k)}$: $5 \mid (2^{4k+3} - 3)$. Tozn., že $2^{4k+3} - 3 = 5m$, kde $m \in Z$.

Na základě tohoto předpokladu dokážeme, že platí také $T_{(k+1)}$, to znamená, že dokážeme:

$5 \mid (2^{4.(k+1)+3} - 3)$

$2^{4.(k+1)+3} - 3 = 2^{4k+7} - 3 = 2^4.2^{4k+3} - 3 = 16.2^{4k+3} - 3 = 15.2^{4k+3} + 2^{4k+3} - 3 =$

$= 5.(\underbrace{3.2^{4k+3}}_{l \in Z}) + 5m = 5l + 5m = 5.(l + m) = 5p$, kde $p \in Z$ cbd.

Př.5: $\boxed{\text{Dokažte užitím matematické indukce: } \forall n \in N: 36 \mid (7^n - 6n - 1).}$

Řeš.: I. $T_{(1)}$ (?)

Hodnota polynomu pro $n = 1$ je $7^1 - 6.1 - 1 = 0$ ... $36 \mid 0$ platí.

II. $T_{(k)} => T_{(k+1)}$ (?)

Předpokládejme platnost $T_{(k)}$ dokazovaného tvrzení pro nějaké přirozené k. Tedy předpokládejme,

že platí $T_{(k)}$: $36 \mid (7^k - 6k - 1)$. Tozn., že $7^k - 6k - 1 = 36m$, kde $m \in Z$.

Na základě tohoto předpokladu dokážeme, že platí také $T_{(k+1)}$, to znamená, že dokážeme:

$36 \mid (7^{k+1} - 6.(k+1) - 1)$

$7^{k+1} - 6.(k+1) - 1 = 7.7^k - 6k - 6 - 1 = 6.7^k + 7^k - 6k - 6 - 1 = 36m + 6.7^k - 6 =$

$= 36m + 6.(7^k - 1)$. Zbývá dokázat, že dvojčlen $7^k - 1$ je pro každé přirozené $k \in N$ dělitelný šesti. Pokud se to podaří bude zřejmě trojčlen $7^{k+1} - 6.(k+1) - 1$ dělitelný číslem 36.

Důkaz povedeme metodou matematické indukce: $\forall k \in N: 6 \mid (7^k - 1)$ (?)

I. $T_{(1)}$ (?)

Hodnota dvojčlenu pro $k = 1$ je $7^1 - 1 = 6$ $6 \mid 6$ platí.

II. $T_{(k)} => T_{(k+1)}$ (?)

Předpokládejme platnost $T_{(k)}$: $6 \mid (7^k - 1)$, $7^k - 1 = 6l$, kde $l \in Z$.

Na základě tohoto předpokladu dokážeme, že platí také $T_{(k+1)}$: $6 \mid (7^{k+1} - 1)$.

$7^{k+1} - 1 = 7.7^k - 1 = 6.7^k + 7^k - 1 = 6.7^k + 6l = 6.(7^k + l) = 6p$, $p \in Z$. cbd.

Dokončíme: $7^{k+1} - 6.(k+1) - 1 = 36m + 6.(7^k - 1) = 36m + 6.6.p = 36.(m + p) =$

$= 36q$, kde $q \in Z$. cbd.

Pozn.: Učitel by měl rozhodně trvat u svých studentů na tak podrobných zápisech, jaké byly použity u výše uvedených důkazů. Pokud studenti dokážou zapsat, kdy co předpokládáme a kdy co dokazujeme, učitel vidí, že postupu rozumí. Aby to po nich ale mohl chtít, musí je to naučit tím, že studenti od něj vidí precizní, přehledné a kompletní zápisy. Může studentům pro zpřehlednění důkazu doporučit, a sám to vždy dodržovat, aby si platný předpoklad vybarvovali třeba zeleně (představuje zelenou na cestě k úspěšnému dokončení důkazu) a zeleně si pak vybarvili i místo, kde ten předpoklad použili v důkazu implikace.

Základní poznatky

1. Dokažte, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$. [Realisticky.cz – 010411 – př. 1]

2. Je dána kružnice k s průměrem AB. Dokažte větu: Je-li X libovolný bod kružnice k různý od bodů A, B, pak úhel AXB je pravý. [Realisticky.cz – 010411 – př. 3]

Typové příklady standardní náročnosti

3. Dokažte: $\forall n \in N: 6|\,(n^3 + 5n)$
   a) přímým důkazem (užitím vytknutí dělitele)
   b) matematickou indukcí
4. Dokažte: $\forall n \in N: 4|\,n^2 \ \Rightarrow\ 2|\,n$
   a) nepřímým důkazem
   b) sporem
5. Dokažte matematickou indukcí:
   a) $\forall n \in N: 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
   b) $\forall n \in N:\ \sum_{i=1}^{n}\frac{i-2}{3} = \frac{n}{6}(n-3)$
6. Dokažte platnost vzorce
   a) pro výpočet n-tého členu aritmetické posloupnosti pomocí prvního;
   b) pro výpočet součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti.

Rozšiřující cvičení

7. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho. [Sporem]