**34 Spojitost funkce, limita funkce - met.**

**Stručný přehled teorie – uváděn průběžně – spolu s metodickými radami a vzorovými výpočty úloh**

# **Met.: Spojitost funkce:** Studenti by měli být v úvodu tématu o diferenciálním počtu seznámeni stručně, názorně a intuitivně s pojmem spojité funkce (důležité při výpočtech limit) – stačí nanejvýš rozsah této stránky. Učitel by měl dokonce zvážit, zda vůbec uvede definici spojitosti funkce (ve slabších třídách jde o příliš abstraktní záležitost, i v talentované třídě je tato definice velmi náročná a čas nedovolí zdržet se u ní déle, než aby studenti pochopili, že je funkce v bodě **a** spojitá právě tehdy, když funkční hodnoty všech argumentů z -okolí bodu **a** budou „natěsnány“ v -okolí bodu ).

Příklady grafů funkcí v bodě ***a*** **spojitých** (graf „plynule prochází“ přes bod, jehož x-ová souřadnice je ***a***) :

*y*

*y*

*y*

*a*

*x*

*a*

*x*

*x*

*a*

Příklady grafů funkcí v bodě ***a*** **nespojitých** (graf je v bodě s x-ovou souřadnicí ***a*** „nějak“ přerušen):

*y*

*y*

*y*

*x*

*x*

*a*

*a*

*x*

*a*

V definici spojitosti (a také limity) funkce se používá *okolí bodu* ***a****:*

* δ-okolím bodu ***a*** (δ  R+ ) nazveme otevřený interval (*a* – δ; *a* + δ), tedy množinu všech x, pro něž platí:

*a + δ*

*a*

*a - δ*

* levým δ-okolím bodu ***a*** (δ  R+ ) nazýváme interval ( *a* – δ ; *a*

*a - δ*

*a*

*a - δ*

* pravým δ-okolím bodu ***a*** (δ  R+ ) nazýváme interval 

*a + δ*

*a*

Def.: Funkce *f: y = f(x)* je spojitá v bodě ***a***, jestliže:

* 1. je definovaná v nějakém okolí bodu ***a*** (včetně samotného bodu ***a***);
  2. ke každému ε-okolí bodu *f(****a****)* existuje δ-okolí bodu ***a*** tak, že pro všechna *x* z δ-okolí bodu ***a*** patří funkční hodnoty *f(x)* do ε-okolí bodu *f(****a****).*

Tedy: Funkce *f: y = f(x)* je spojitá v bodě ***a****,* jestliže

* + 1. je v bodě***a***definovaná;
    2. *.*

Věty o spojitosti funkce v bodě:

Jsou-li funkce *f(x)* a *g(x)* spojité v bodě *a*, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce

1. *f(x) + g(x);*
2. *f(x) – g(x);*
3. *f(x) . g(x);*
4. .

V každém bodě xR jsou spojité funkce *f(x) = c* , *f(x) = anxn + an-1xn-1 + an-2xn-2 + … a1x + a0*, *f(x) =* sin *x* , *f(x) =* cos *x* , …

## Limita funkce: Před vlastním probíráním tématu „Limita funkce“ by měl učitel zařadit důležitou informaci:

**Rozšíření množiny reálných čísel o nevlastní body**

….. platí:

….. platí:

**Operace s nevlastními body:**

***1)*** ***3)***

***2)*** ***4)*** ***5)***

***6)***

***7)***

*pro c > 0*: ***8)*** *pro c < 0*: ***12)***

***9)*** ***13)***

***10)*** ***14)***

***11)*** ***15)***

***16)***

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Neurčité výrazy typu**: ***A)***  nebo … lze řešit užitím L’Hospitalova pravidla

***B)*** , **,** 00, … lze převést algebraickými transformacemi na typy nebo .

**Limita** (vlastní) funkce v daném bodě ***a*** je (intuitivně) číslo ***L***, k němuž se neomezeně blízko blíží hodnoty funkce, jestliže se hodnoty argumentu neomezeně blízko blíží k ***a***. Zápis:

)

Následujícímu obrázku by se měl učitel se studenty věnovat značnou část vyučovací hodiny. Ideálně by měl mít každý student obrázek k dispozici pro vlastní potřebu (nalepení do sešitu). Při online hodině by jej učitel mohl studentům nasdílet a využít jej k tomu, aby na něm ukázal studentům celou řadu nejrůznějších typů limit. Pokud by učil prezenčně, měl by využít k demonstraci obrázku dataprojektor, nebo jej může v krajním případě překreslit na tabuli. Jestliže se studenti tímto způsobem s limitami seznámí a intuitivně je pochopí, dokážou vzápětí zpravidla velmi dobře pochopit definice limit a v řadě případů dokonce dokážou tyto definice i sami „vymyslet“.

Evidentně na obrázku lze najít - vlastní limitu spojité funkce ve vlastním bodě (*a*); - vlastní limitu ve vlastním bodě funkce v něm nespojité (c, g); - vlastní limitu v nevlastním bodě ; - nevlastní limitu ve vlastním bodě (d); - nevlastní limitu v nevlastním bodě ; - jednostrannou vlastní limitu zleva ; - jednostrannou vlastní limitu zprava ; - jednostrannou nevlastní limitu zleva ; - jednostrannou nevlastní limitu zprava

9

x

y

a

b

c

d

e

g

9

6

4

-4

-9

-7

**f**

a

**Druhy limit**:

Vlastní limita ve vlastním bodě: 

Vlastní limita v nevlastním bodě:  Analogicky:

Nevlastní limita ve vlastním bodě:  Analogicky: 

Nevlastní limita v nevlastním bodě:  Analogicky: 

Jednostranné limity: a) vlastní limita zleva:   b) vlastní limita zprava:   c) nevlastní limita zleva:   Analogicky: ostatní nevlastní jednostranné limity

**Věty o limitách**:

* Funkce *f:y = f(x*) má v každém bodě *a* nejvýš jednu limitu.
* Jestliže je funkce *f: y = f(x)* v bodě ***a*** spojitá, pak platí: 

Př.: 

* Nechť jsou dány funkce *f(x*) a *g(x*) a nechť pro všechna *x ≠ a* z jistého δ-okolí bodu *a* platí: *f(x*) = *g(x*). Má-li funkce *g(x)* v bodě *a* limitu *L*, tedy , pak má v bodě *a* limitu i funkce *f(x)* a platí: .

Př.:

* Jestliže pro každé *x ≠ a* jistého δ-okolí bodu *a* platí: *g(x) < f(x) < h(x)* a jestliže existují limity , pak existuje také limita *f(x)* a platí: . *(Pozn. Tuto větu lze použít např. pro důkaz, že )*
* Nechť jsou dány funkce *f(x)* a *g(x),* které mají limitu v tomtéž bodě *a*.

Nechť platí: a .

Pak mají v tomto bodě limitu i funkce představující jejich součet, rozdíl, součin a pro M ≠ 0 i podíl a platí:

* **L´Hospitalovo pravidlo:** Pokud je splněna jedna z podmínek a) 

b) ,

a jestliže existuje , pak .

Př.: 1) …

2) …

3) …

4) …

5) …

6) … .

Před používáním L´Hospitalova pravidla musí být ovšem probrána derivace funkce. Tedy, lépe řečeno, výpočty limit užitím L´Hospitalova pravidla lze provádět až po probrání derivace funkce.

**Některé důležité limity** – učitel by měl většinu z nich doplnit drobnými náčrty grafů příslušných funkcí. Jednak si tak studenti grafy některých funkcí zopakují, jednak tím budou limity dobře vizualizovány:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;

**Pro :**

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;

**Pro :**

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. ;
11. ;
12. ;
13. ;
14. ;
15. ;
16. ;
17. ;
18. ;

*Rady, doporučení, metody, „finty“, … používané při výpočtech limit:*

**Limita funkce ve vlastním bodě:**

***Funkce spojitá v daném bodě a:***

Nechť počítáme , kde je spojitá v bodě *a.* Pak *.*

Př.1: a) ;

b) ;

c) ;

Př.2: Vypočítejte a na základě definice limity funkce v daném bodě dokažte správnost svého výpočtu.

Řeš.: Funkce je lineární, a tedy spojitá v každém bodě R. Proto . .

Nechť … libovolné. Kdy ? Když , , tedy když . Našli jsme

***Funkce v daném bodě a nespojitá:***

Nechť počítáme , kde je nespojitá v bodě *a*, . Pak *a* je kořen i a lze rozložit a .

Pak .

Zmíněné rozklady provádíme vytýkáním, užitím vhodných vzorců, dělením mnohočlenu mnohočlenem, užitím „umělých“ úprav, …

Př.2: a) ;

b) ;

c) ;

d) ;

e) ;

f)

Př.3: a) ;

Subst.:

b) ;

Subst.:

Př.4: a) ;

b) ;

c) ;

Př.5: a) ;

b) ;

c) ;

Př.6: a) ;

b) ;

c) ;

Př.7: a) ;

Subst.:

b) ;

c) ;

d)

e);

f);

Pozn.: Všechny příklady z úloh 2 – 7 lze řešit snadno LʼHospitalovým pravidlem. To však může učitel ukázat studentům až později, po probrání derivace funkce.

***Limita funkce v nevlastním bodě:***

Př.8: a) ;

b) ;

c) ;

d)

Při výpočtu limity polynomické lomené funkce se využívá vytýkání nejvyšší mocniny proměnné v čitateli i ve jmenovateli. Běžně se ale nemusí vždy postupovat takto podrobně. Lze využít následujícího postupu:

* je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, je limita rovna nule (viz zadání a));
* je-li stupeň čitatele stejný jako stupeň jmenovatele, je limita rovna podílu koeficientů při nejvyšších mocninách proměnné (viz zadání b));
* je-li stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, měl by být dodržen postup jako v zadáních c), d).

Př.9: a);

b) ;

c) ;

***Jednostranné limity:***

Př.10: a1) Zápis znamená, že *x* se neomezeně blízko blíží k 5 zprava. Proto pro výpočet limity dosadíme do zlomku za *x* pomocnou hodnotu, která je na číselné ose těsně vedle obrazu čísla 5 zprava … např. 5,1.Rozdíl ve jmenovateli bude tedy velmi malé kladné číslo (). Analogicky pracujeme s limitou zleva.

;

a2) ;

a3) ;

b) ;

c);

d) ;

e) ;

f) ;

Základní poznatky:

1. 4)
2. 5)

Typové příklady standardní náročnosti

1. 6)
2. 7)

3) 8)

4) 9)

 10)

b) 11) 

c) 12)