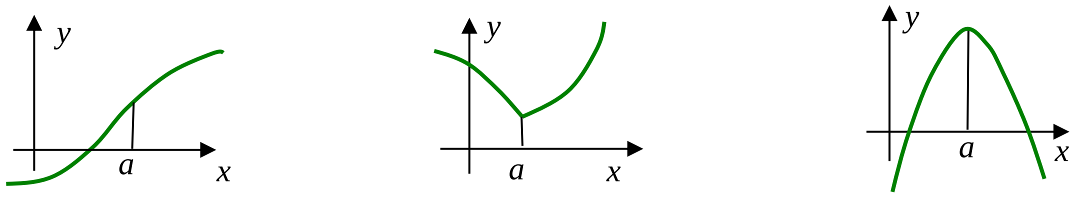
34 Spojitost funkce, limita funkce - met.

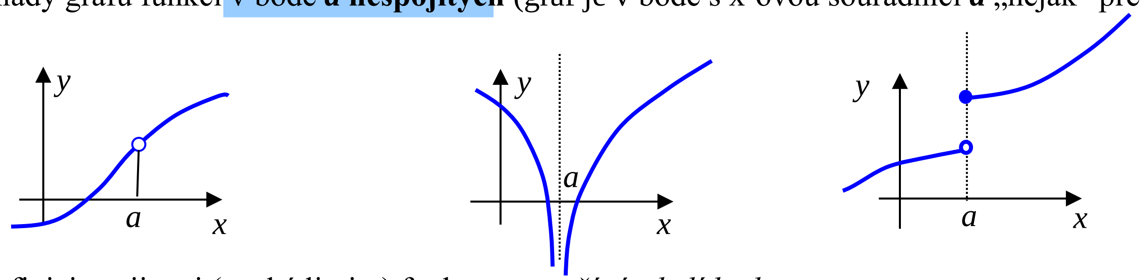
Stručný přehled teorie – uváděn průběžně – spolu s metodickými radami a vzorovými výpočty úloh

Met.: **<u>Spojitost funkce</u>:** Studenti by měli být v úvodu tématu o diferenciálním počtu seznámeni stručně, názorně a intuitivně s pojmem spojité funkce (důležité při výpočtech limit) – stačí nanejvýš rozsah této stránky. Učitel by měl dokonce zvážit, zda vůbec uvede definici spojitosti funkce (ve slabších třídách jde o příliš abstraktní záležitost, i v talentované třídě je tato definice velmi náročná a čas nedovolí zdržet se u ní déle, než aby studenti pochopili, že je funkce v bodě ***a*** spojitá právě tehdy, když funkční hodnoty všech argumentů z δ-okolí bodu ***a*** budou „natěsnány“ v ε-okolí bodu $\boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{a})}$).

Příklady grafů funkcí **v bodě *a* spojitých** (graf „plynule prochází“ přes bod, jehož x-ová souřadnice je ***a***) :



Příklady grafů funkcí **v bodě *a* nespojitých** (graf je v bodě s x-ovou souřadnicí ***a*** „nějak“ přerušen):



V definici spojitosti (a také limity) funkce se používá *okolí bodu* ***a***:

- δ-okolím bodu ***a*** (δ ∈ R⁺) nazveme otevřený interval $(a - \delta;\, a + \delta)$, tedy množinu všech x, pro něž platí: $|\boldsymbol{x} - a| < \delta$

- levým δ-okolím bodu ***a*** (δ ∈ R⁺) nazýváme interval $(a - \delta \,;\, a \rangle$

- pravým δ-okolím bodu ***a*** (δ ∈ R⁺) nazýváme interval $\langle a ; a + \delta)$

Def.: Funkce *f: y = f(x)* je spojitá v bodě ***a***, jestliže:

1. je definovaná v nějakém okolí bodu ***a*** (včetně samotného bodu ***a***);
2. ke každému ε-okolí bodu *f(**a**)* existuje δ-okolí bodu ***a*** tak, že pro všechna *x* z δ-okolí bodu ***a*** patří funkční hodnoty *f(x)* do ε-okolí bodu *f(**a**)*.

Tedy: Funkce *f: y = f(x)* je spojitá v bodě ***a***, jestliže

1. je v bodě ***a*** definovaná;
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x\colon |x - \boldsymbol{a}| < \delta)(|f(x) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon)$.

Věty o spojitosti funkce v bodě:

Jsou-li funkce *f(x)* a *g(x)* spojité v bodě *a*, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce

a) $f(x) + g(x);$
b) $f(x) - g(x);$
c) $f(x) \,.\, g(x);$
d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad pro\, g(a) \neq 0\,.$

V každém bodě $x \in R$ jsou spojité funkce $\boxed{f(x) = c}$, $\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots a_1 x + a_0}$,
$\boxed{f(x) = \sin x}$, $\boxed{f(x) = \cos x}$, …

Limita funkce: Před vlastním probíráním tématu „Limita funkce“ by měl učitel zařadit důležitou informaci:

Rozšíření množiny reálných čísel o nevlastní body $+\infty, -\infty$:

$-\infty$ ….. $\forall x \in R$ platí: $x > -\infty$

$+\infty$ ….. $\forall x \in R$ platí: $x < +\infty$

Operace s nevlastními body:

1) $+\infty + \infty = +\infty$ *3)* $+\infty.(+\infty) = +\infty$

2) $-\infty - \infty = -\infty$ *4)* $-\infty.(-\infty) = +\infty$ *5)* $+\infty.(-\infty) = -\infty$

6) $+\infty \pm c = +\infty \quad c \in R$

7) $-\infty \pm c = -\infty \quad c \in R$

pro c > 0: *8)* $c.(+\infty) = +\infty$ *pro c < 0*: *12)* $c.(+\infty) = -\infty$

9) $c.(-\infty) = -\infty$ *13)* $c.(-\infty) = +\infty$

10) $\frac{c}{0^-} = -\infty$ *14)* $\frac{c}{0^-} = +\infty$

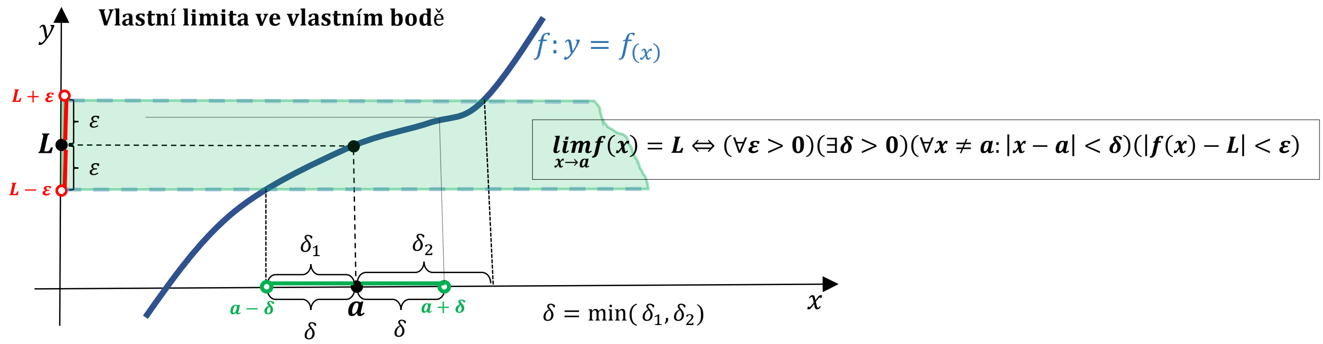
11) $\frac{c}{0^+} = +\infty$ *15)* $\frac{c}{0^+} = -\infty$

16) $\frac{c}{\pm\infty} = 0$

Neurčité výrazy typu: ***A)*** $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$ … lze řešit užitím L’Hospitalova pravidla

B) $0.\infty$, $+\infty - \infty$, 0^0, … lze převést algebraickými transformacemi na typy $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$

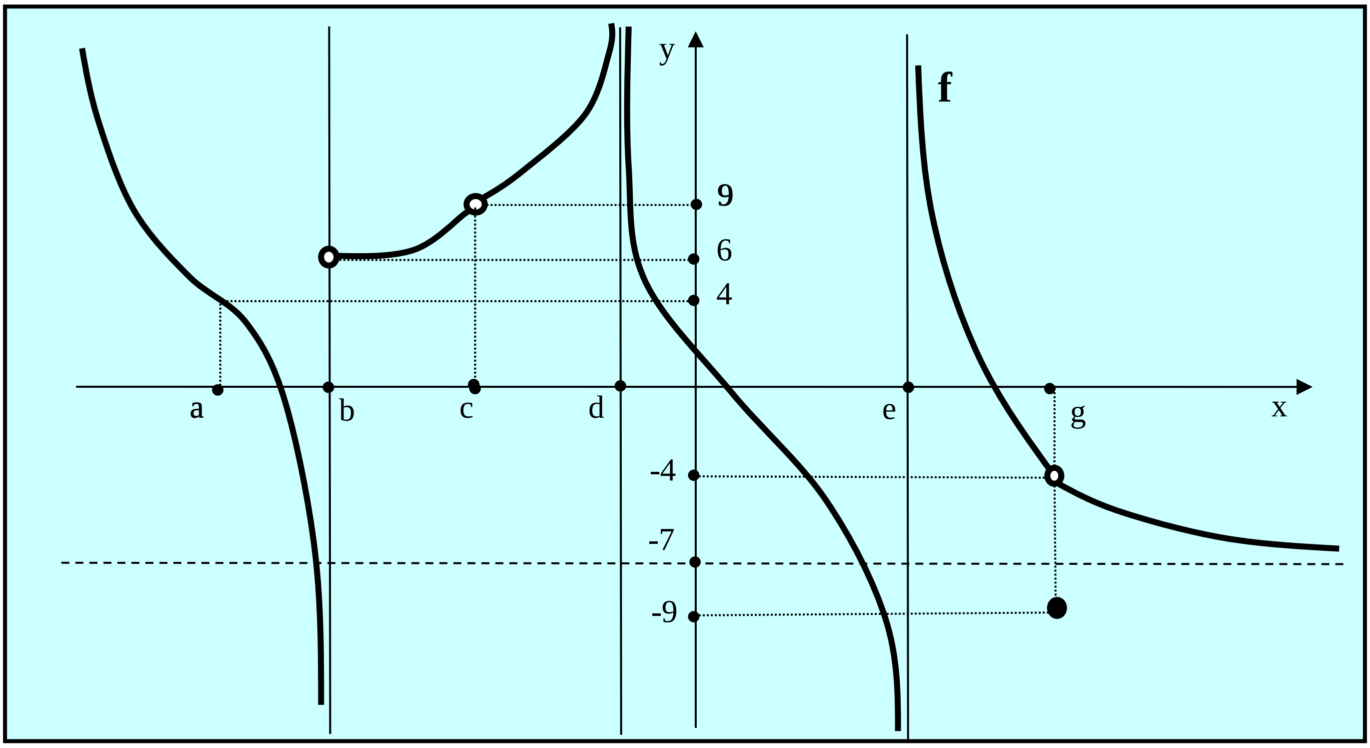
Limita (vlastní) funkce v daném bodě ***a*** je (intuitivně) číslo ***L***, k němuž se neomezeně blízko blíží hodnoty funkce, jestliže se hodnoty argumentu neomezeně blízko blíží k ***a***. Zápis: $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$



Následujícímu obrázku by se měl učitel se studenty věnovat značnou část vyučovací hodiny. Ideálně by měl mít každý student obrázek k dispozici pro vlastní potřebu (nalepení do sešitu). Při online hodině by jej učitel mohl studentům nasdílet a využít jej k tomu, aby na něm ukázal studentům celou řadu nejrůznějších typů limit. Pokud by učil prezenčně, měl by využít k demonstraci obrázku dataprojektor, nebo jej může v krajním případě překreslit na tabuli. Jestliže se studenti tímto způsobem s limitami seznámí a intuitivně je pochopí, dokážou vzápětí zpravidla velmi dobře pochopit definice limit a v řadě případů dokonce dokážou tyto definice i sami „vymyslet“.

Evidentně na obrázku lze najít

- vlastní limitu spojité funkce ve vlastním bodě (a);
- vlastní limitu ve vlastním bodě funkce v něm nespojité (c, g);
- vlastní limitu v nevlastním bodě ($+\infty$);
- nevlastní limitu ve vlastním bodě (d);
- nevlastní limitu v nevlastním bodě ($-\infty$);
- jednostrannou vlastní limitu zleva (c^-, g^-);
- jednostrannou vlastní limitu zprava (b^+, g^+);
- jednostrannou nevlastní limitu zleva (b^-, d^-, e^-);
- jednostrannou nevlastní limitu zprava (d^+, e^+)



Druhy limit:

Vlastní limita ve vlastním bodě: $\boxed{\lim\limits_{x\to c} f(x)=9\ , \qquad \lim\limits_{x\to g} f(x)=-4}$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\neq a: |x-a|<\delta)(|f(x)-L|<\varepsilon)}$$

Vlastní limita v nevlastním bodě: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-7}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists x_0)(\forall x>x_0: |f(x)-L|<\varepsilon)}$ Analogicky: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Nevlastní limita ve vlastním bodě: $\boxed{\lim\limits_{x\to d} f(x)=\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall K\in R)(\exists\delta>0)(\forall x\neq a: |x-a|<\delta)(f(x)>K)}$ Analogicky: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

Nevlastní limita v nevlastním bodě: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$

$\boxed{f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall K\in R)(\exists x_0)(\forall x<x_0)(f(x)>K)}$ Analogicky: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Jednostranné limity: a) vlastní limita zleva: $\boxed{\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=9,\ \lim\limits_{x\to g^-} f(x)=-4}$

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon\rangle 0)(\exists\delta\rangle 0)(\forall x\in(a-\delta;a))(|f(x)-L|\langle\varepsilon)}$$

b) vlastní limita zprava: $\boxed{\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=6,\ \lim\limits_{x\to g^+} f(x)=-4}$

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon\rangle 0)(\exists\delta\rangle 0)(\forall x\in(a;a+\delta))(|f(x)-L|\langle\varepsilon)}$$

c) nevlastní limita zleva: $\boxed{\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=-\infty,\ \ \lim\limits_{x\to d^-} f(x)=\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty \Leftrightarrow (\forall K)(\exists\delta\rangle 0)(\forall x\in(a-\delta;a))(f(x)\rangle K)}$ Analogicky: ostatní nevlastní jednostranné limity

Věty o limitách:

- Funkce $f: y = f(x)$ má v každém bodě a nejvýš jednu limitu.

- Jestliže je funkce $f: y = f(x)$ v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá, pak platí: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

  Př.: $\lim_{x \to 4} (3x - 5) = 7$

- Nechť jsou dány funkce $f(x)$ a $g(x)$ a nechť pro všechna $x \neq a$ z jistého δ-okolí bodu a platí: $f(x) = g(x)$. Má-li funkce $g(x)$ v bodě a limitu L, tedy $\lim_{x \to a} g(x) = L$, pak má v bodě a limitu i funkce $f(x)$ a platí: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$.

  Př.: $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+4x-21}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+7).(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+7) = 10$

- Jestliže pro každé $x \neq a$ jistého δ-okolí bodu a platí: $g(x) < f(x) < h(x)$ a jestliže existují limity $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, pak existuje také limita $f(x)$ a platí: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

  (Pozn. Tuto větu lze použít např. pro důkaz, že $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$*)*

- Nechť jsou dány funkce $f(x)$ a $g(x)$, které mají limitu v tomtéž bodě a.
  Nechť platí: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ a $\lim_{x \to a} g(x) = M$.
  Pak mají v tomto bodě limitu i funkce představující jejich součet, rozdíl, součin a pro M ≠ 0 i podíl a platí:
  1. $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$
  2. $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M$
  3. $\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.M$
  4. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

- **L´Hospitalovo pravidlo:** Pokud je splněna jedna z podmínek a) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$
  b) $\lim_{x \to a} |f(x)| = \lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$,

  a jestliže existuje $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

  Př.:
  1) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x-2}{2x-4} = \frac{2.3-2}{2.3-4} = \frac{4}{2} = 2 \; \ldots \left(typ\ \frac{0}{0}\right)$
  2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{4x^3}{1} = 4 \ldots \left(typ\ \frac{0}{0}\right)$
  3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \ldots \left(typ\ \frac{0}{0}\right)$
  4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{4\cos 4x}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x \to 0} [8.\sqrt{x+1}.\cos 4x] = 8.1.1 = 8 \; \ldots \left(typ\ \frac{0}{0}\right)$
  5) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+1}{x^2+x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{2x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{2} = 3 \; \ldots \left(typ\ \frac{\infty}{\infty}\right)$
  6) $\lim_{x \to \infty} \frac{2^{x+3}+4}{2^{x-1}+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2^{x+3}.\ln 2}{2^{x-1}.\ln 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{8.2^x}{\frac{2^x}{2}} = 16 \ldots \left(typ\ \frac{\infty}{\infty}\right)$.

  Před používáním L´Hospitalova pravidla musí být ovšem probrána derivace funkce. Tedy, lépe řečeno, výpočty limit užitím L´Hospitalova pravidla lze provádět až po probrání derivace funkce.

Některé důležité limity – učitel by měl většinu z nich doplnit drobnými náčrty grafů příslušných funkcí. Jednak si tak studenti grafy některých funkcí zopakují, jednak tím budou limity dobře vizualizovány:

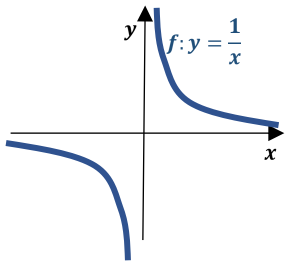
1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty;$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty;$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0;$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0;$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ... neexistuje;



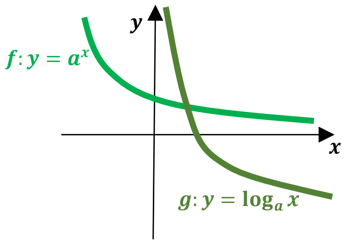
Pro $a \in (0; 1)$:

6. $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = +\infty;$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0;$

8. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty;$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty;$



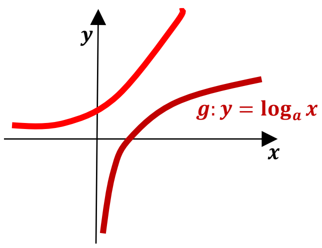
Pro $a \in (1; +\infty)$:

10. $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0;$

11. $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty;$

12. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty;$

13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty;$



14. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty;$

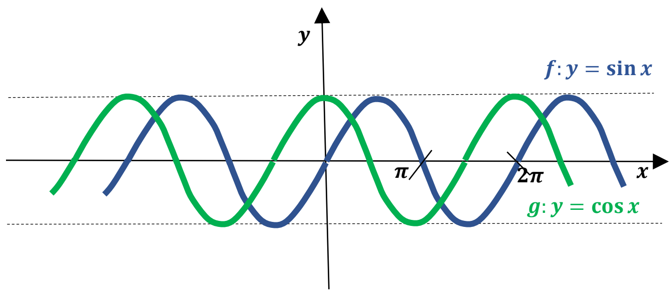
15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty;$

16. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin x$ ... neexistuje;

17. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin x$ ... neexistuje;

18. $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos x$ ... neexistuje;

19. $\lim\limits_{x\to -\infty} \cos x$ ... neexistuje;



20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \mathrm{tg}x = +\infty;$

21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \mathrm{tg}x = -\infty;$

22. $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{cotg}x = -\infty;$

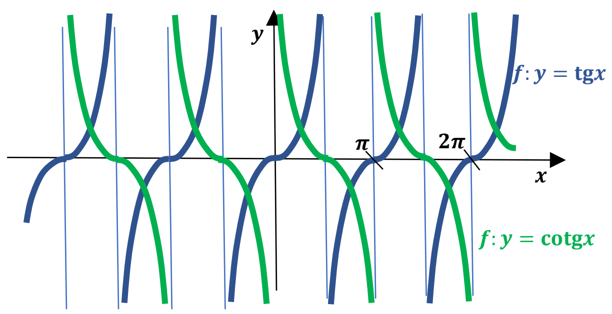
23. $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{cotg}x = +\infty;$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} = 1;$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$



Rady, doporučení, metody, „finty“, … používané při výpočtech limit:

Limita funkce ve vlastním bodě:

Funkce spojitá v daném bodě a:

Nechť počítáme $\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}$, kde $f_{(x)}$ je spojitá v bodě a. Pak $\lim\limits_{x\to a} f_{(x)} = f_{(a)}$.

Př.1: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{x+1} = \left[\frac{0^2+2.0-1}{0+1}\right] = -1$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\cos x} = \left[\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2.(\sqrt{2}-1)}{2}\right] = \sqrt{2}-1$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}(\log 10x - \ln x) = [\log 10 - \ln 1 = 1 - 0] = 1$;

Př.2: Vypočítejte $\lim\limits_{x\to 2}(7x-11)$ a na základě definice limity funkce v daném bodě dokažte správnost svého výpočtu.

Řeš.: Funkce $f: y = 7x - 11$ je lineární, a tedy spojitá v každém bodě R.

Proto $\lim\limits_{x\to 2}(7x-11) = 7.2 - 11 = 3$.

$\lim\limits_{x\to 2}(7x-11) = 3 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\big(\forall x: 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |7x - 11 - 3| < \varepsilon\big)$.

Nechť $\varepsilon > 0$ … libovolné. Kdy $|7x - 11 - 3| < \varepsilon$?

Když $|7x - 14| < \varepsilon$,

$7.|x-2| < \varepsilon$,

tedy když $|x-2| < \frac{\varepsilon}{7}$. Našli jsme $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$

Funkce v daném bodě a nespojitá:

Nechť počítáme $\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}$, kde $f_{(x)}$ je nespojitá v bodě a, $f_{(x)} = \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$ a $P_{(x)} = Q_{(x)} = 0$.
Pak a je kořen $P_{(x)}$ i $Q_{(x)}$ a lze rozložit $P_{(x)} = (x-a).P_{1(x)}$ a $Q_{(x)} = (x-a).Q_{1(x)}$.
Pak $\lim\limits_{x\to a} f_{(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} = \lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a).P_{1(x)}}{(x-a).Q_{1(x)}} = \lim\limits_{x\to a}\frac{P_{1(x)}}{Q_{1(x)}}$.
Zmíněné rozklady provádíme vytýkáním, užitím vhodných vzorců, dělením mnohočlenu mnohočlenem, užitím „umělých“ úprav, …

Př.2: a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1} = \left[\frac{(x-1).(x+1)}{(x-1).(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1+1}{1^2+1+1}\right] = \frac{2}{3}$;

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x^3+8} = \left[\frac{(x+2).(x-2).(x^2+4)}{(x+2).(x^2-2x+4)} = \frac{(x-2).(x^2+4)}{x^2-2x+4} = \frac{(-2-2).((-2)^2+4)}{(-2)^2-2.(-2)+4} = \frac{-4.8}{4+4+4} = \frac{-32}{12}\right] = -\frac{8}{3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{81-x^4} = \left[\frac{(x-3)^2}{(3-x).(3+x).(9+x^2)} = \frac{(3-x)^2}{(3-x).(3+x).(9+x^2)} = \frac{3-x}{(3+x).(9+x^2)} = \frac{3-3}{(3+3).(9+9)}\right] = 0$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2+5x-2}{27x^3-1} = \left[\frac{(3x-1).(x+2)}{(3x-1).(9x^2+3x+1)} = \frac{x+2}{9x^2+3x+1} = \frac{\frac{7}{3}}{3}\right] = \frac{7}{9}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \left[\frac{(x-1).(x^2+x+2)}{(x-1).(x+1)} = \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{1^2+1+2}{1+1}\right] = 2$;

f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \left[\frac{(x-1).(x^2+x-2)}{(x-1).(x^3+x^2+x-3)} = \frac{(x+2).(x-1)}{(x^2+2x+3).(x-1)} = \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1^2+2.1+3}\right] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;

Př.3: a) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-5\sin x+2}=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{2y^2+y-1}{2y^2-5y+2}=\left[\frac{(2y+1).(y+1)}{(2y+1).(y-2)}=\frac{y+1}{y-2}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-2}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}\right]=-1;$$

Subst.: $y=\sin x$; ... $x\to\frac{\pi}{6}\implies y\to\frac{1}{2}$

b) $$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{4+2\mathrm{cotg}x-2\mathrm{cotg}^2x}{\mathrm{cotg}^2x-1}=\lim_{y\to-1}\frac{4+2y-2y^2}{y^2-1}=\left[\frac{2(2-y).(1+y)}{(y-1).(y+1)}=\frac{4-2y}{y-1}=\frac{4+2}{-1-1}\right]=-3;$$

Subst.: $y=\mathrm{cotg}x$; ... $x\to-\frac{\pi}{4}\implies y\to-1$

Př.4: a) $$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\left[\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}.\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{(x-3).(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=\sqrt{3+1}+2\right]=4;$$

b) $$\lim_{x\to-2}\frac{2-\sqrt{6+x}}{x+2}=\left[\frac{2-\sqrt{6+x}}{x+2}.\frac{2+\sqrt{6+x}}{2+\sqrt{6+x}}=\frac{4-(6+x)}{(x+2).(2+\sqrt{6+x})}=\frac{-2-x}{(x+2).(2+\sqrt{6+x})}=\frac{-1}{2+\sqrt{6+x}}=\frac{-1}{2+\sqrt{6-2}}\right]=-\frac{1}{4};$$

c) $$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}.\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{(1+2x-9).(\sqrt{x}+2)}{(x-4).(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{2.(x-4).(\sqrt{x}+2)}{(x-4).(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{2.(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{1+8}+3}\right]=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};$$

Př.5: a) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\mathrm{tg}x}=\left[\frac{\sin x-\cos x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=-\cos x=-\cos\frac{\pi}{4}\right]=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

b) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2x}{\sin^2x}=\left[\frac{1-(\cos^2x-\sin^2x)+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{\sin^2x}=\frac{\sin^2x+\sin^2x+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{\sin^2x}=\frac{\sin^2x\left(1+1+\frac{1}{\cos^2x}\right)}{\sin^2x}\right]=1+1+1=3;$$

c) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}.\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2x}{\sin x.(1+\cos x)}=\frac{\sin^2x}{\sin x.(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{0}{1+1}=0;$$

Př.6: a) $$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}^2x}{1-\sqrt{\cos 2x}}=\left[\frac{\mathrm{tg}^2x}{1-\sqrt{\cos 2x}}.\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos 2x}}=\frac{\frac{\sin^2x}{\cos^2x}.(1+\sqrt{\cos 2x})}{1-\cos 2x}=\frac{\sin^2x.(1+\sqrt{\cos 2x})}{\cos^2x.[1-(\cos^2x-\sin^2x)]}=\right.$$

$$\left.\frac{\sin^2x.(1+\sqrt{\cos 2x})}{\cos^2x.2\sin^2x}=\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{2\cos^2x}=\frac{1+\sqrt{\cos.0}}{2\cos^20}=\frac{1+1}{2.1}\right]=1;$$

b) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\left[\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}.\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{(\cos^2x-\sin^2x).(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x})}{\sin x-\cos x}=\right.$$

$$\frac{(\cos x-\sin x).(\cos x+\sin x).(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x})}{-(\cos x-\sin x)}=-\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right).\left(\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}+\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$\left.-2.\frac{\sqrt{2}}{2}.2.\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]=-2.\sqrt[4]{2};$$

c) $$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sqrt{\cos x+2}}{\sin^22x}=\left[\frac{1-\sqrt{\cos x+2}}{\sin^22x}.\frac{1+\sqrt{\cos x+2}}{1+\sqrt{\cos x+2}}=\frac{1-\cos x-2}{4.\sin^2x.\cos^2x.(1+\sqrt{\cos x+2})}=\right.$$

$$\frac{-(1+\cos x)}{4.\sin^2x.\cos^2x.(1+\sqrt{\cos x+2})}.\frac{(1-\cos x)}{(1-\cos x)}=\frac{-\sin^2x}{4.\sin^2x.\cos^2x.(1+\sqrt{\cos x+2}).(1-\cos x)}=$$

$$\frac{-1}{4\cos^2x.(1+\sqrt{\cos x+2}).(1-\cos x)}=\frac{-1}{4\cos^2\pi.(1+\sqrt{\cos\pi+2}).(1-\cos\pi)}=\frac{-1}{4.(-1)^2.(1+\sqrt{-1+2}).(1-(-1))}=$$

$$\left.\frac{-1}{4.1.2.2}\right]=-\frac{1}{16};$$

Př.7: a) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin 8x}{x}=\lim_{x\to0}8.\frac{\sin 8x}{8x}=8.\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=8.1=8;$$

Subst.: $y=8x$ ... $x\to0\ \Rightarrow\ y\to0$

b) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{4x^2}=\frac{1}{4}.\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{4}.1.1=\frac{1}{4};$$

c) $$\lim_{x\to0}\frac{5x^3+x.\sin 7x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{5x}{2}+\frac{\sin 7x}{2x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{5x}{2}+\frac{7}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{7x}=0+\frac{7}{2}.1=\frac{7}{2};$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1+\sin 2x}{x} = \left[\frac{-\sin^2 x+2.\sin x\cos x}{x} = \frac{\sin x}{x}(2\cos x-\sin x) = 1.(2.1-0)\right] = 2$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{\sin x} = \left[\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{\sin x}.\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}} = \frac{x}{\sin x}.\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}.\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}} = \frac{1}{1}.\frac{1}{2\sqrt{5}}\right] = \frac{\sqrt{5}}{10}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|} = \left[\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{x^2}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 x}{x^2}} = \sqrt{2.\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2.1.1}\right] = \sqrt{2}$;

Pozn.: Všechny příklady z úloh 2 – 7 lze řešit snadno L'Hospitalovým pravidlem. To však může učitel ukázat studentům až později, po probrání derivace funkce.

Limita funkce v nevlastním bodě:

Př.8:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^5-2x^3}{8x^6+15} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5.\left(7-\frac{2}{x^2}\right)}{x^6.\left(8+\frac{15}{x^6}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-\frac{2}{x^2}}{8+\frac{15}{x^6}} = 0.\frac{7}{8} = 0$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^5-2x^3}{8x^5+15} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5.\left(7-\frac{2}{x^2}\right)}{x^5.\left(8+\frac{15}{x^5}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-\frac{2}{x^2}}{8+\frac{15}{x^6}} = \frac{7}{8}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7x^8-2x^3}{8x^5+15} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^8.\left(-7-\frac{2}{x^5}\right)}{x^5.\left(8+\frac{15}{x^5}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}x^3.\frac{-7}{8} = \infty.\left(-\frac{7}{8}\right) = -\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4+3x^2+5}{3-x} = \left[\frac{x^4.\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4}\right)}{x.\left(\frac{3}{x}-1\right)} = \frac{x^3.(1+0+0)}{0-1} = (-\infty)^3.(-1)\right] = +\infty$

Při výpočtu limity polynomické lomené funkce se využívá vytýkání nejvyšší mocniny proměnné v čitateli i ve jmenovateli. Běžně se ale nemusí vždy postupovat takto podrobně. Lze využít následujícího postupu:

– je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, je limita rovna nule (viz zadání a));
– je-li stupeň čitatele stejný jako stupeň jmenovatele, je limita rovna podílu koeficientů při nejvyšších mocninách proměnné (viz zadání b));
– je-li stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, měl by být dodržen postup jako v zadáních c), d).

Př.9:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}} = \left[\sqrt{\frac{(2x+3).\frac{1}{x}}{(x-1).\frac{1}{x}}} = \sqrt{\frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}} = \sqrt{\frac{2+0}{1-0}}\right] = \sqrt{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}+3.\sqrt{x^2-6}}{2x+1} = \left[\frac{\left(\sqrt{x+2}+3.\sqrt{x^2-6}\right).\frac{1}{x}}{(2x+1).\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}.\sqrt{x+2}+3.\frac{1}{x}.\sqrt{x^2-6}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x^2}}+3.\sqrt{\frac{x^2-6}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3\sqrt{1-\frac{6}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{0+0}+3\sqrt{1-0}}{2+0}\right] = \frac{3}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x-1}-x\right) = \left[\frac{\left(\sqrt{x^2+7x-1}-x\right).\left(\sqrt{x^2+7x-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+7x-1}+x\right)} = \frac{x^2+7x-1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+7x-1}+x\right)} = \frac{(7x-1).\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{x^2+7x-1}+x\right).\frac{1}{x}} = \frac{7-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}.\sqrt{x^2+7x-1}+1} = \frac{7-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{7-0}{\sqrt{1+0-0}+1}\right] = \frac{7}{2}$;

Jednostranné limity:

Př.10: a₁) $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{2x+1}{x-5} = ?$

Zápis $x \to 5^+$ znamená, že x se neomezeně blízko blíží k 5 zprava. Proto pro výpočet limity dosadíme do zlomku za x pomocnou hodnotu, která je na číselné ose těsně vedle obrazu čísla 5 zprava … např. 5,1. Rozdíl ve jmenovateli bude tedy velmi malé kladné číslo ($5{,}1 - 5 = 0{,}1 = 0^+$). Analogicky pracujeme s limitou zleva.

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{2x+1}{x-5} = \left[\frac{2.5+1}{5{,}1-5} = \frac{11}{0^+}\right] = +\infty;$$

a₂) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{2x+1}{x-5} = \left[\frac{2.5+1}{4{,}9-5} = \frac{11}{0^-}\right] = -\infty;$

a₃) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2x+1}{x-5}$ – neexistuje, protože $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{2x+1}{x-5} \neq \lim\limits_{x\to 5^-} \frac{2x+1}{x-5};$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+3}{x} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty;$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2-5}{x^2} = \left[\frac{0-5}{(-0{,}1)^2} = \frac{-5}{+0{,}01} = \frac{-5}{0^+}\right] = -\infty;$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{7}{(2-x)^3} = \left[\frac{7}{(2-2{,}1)^3} = \frac{7}{(-0{,}1)^3} = \frac{7}{-0{,}001} = \frac{7}{0^-}\right] = -\infty;$

e) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1} = \left[\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} = \frac{1+1+1}{(0{,}9-1)^2} = \frac{3}{(-0{,}1)^2} = \frac{3}{+0{,}01} = \frac{3}{0^+}\right] = +\infty;$

f) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{2x^2+6}{x^2-9} = \left[\frac{2.3^2+6}{2{,}9^2-9} = \frac{24}{0^-}\right] = -\infty;$

Základní poznatky:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x-5}{x^2-2x+3}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x-5}{2x+3}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-4x^3 - x^2 + 2)$ $[+\infty]$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{x^2}$ $[+\infty]$

Typové příklady standardní náročnosti

1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{3x^2-5x-2}$ $\left[\frac{8}{7}\right]$

2) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{\sqrt{x+8}-2}{3x+12}$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1-\mathrm{tg}x}$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{3x} - \frac{\mathrm{tg}\, x}{2x}\right)$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

5) a) $\lim\limits_{x\to -2^-} \left(\frac{1}{x^2-4}\right)$ $[+\infty]$

b) $\lim\limits_{x\to -2^+} \left(\frac{1}{x^2-4}\right)$ $[-\infty]$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{1}{x^2-4}\right)$ [neexistuje]

6) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ $[-1]$

7) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$ $[2]$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x - \sin x}{\sin^3 x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

9) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4x^3-x+2}{3x^3-2x+3}$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

10) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^3-x^2+5}{x^2+x-2}$ $[+\infty]$

11) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ $\left[\frac{4}{7}\right]$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$