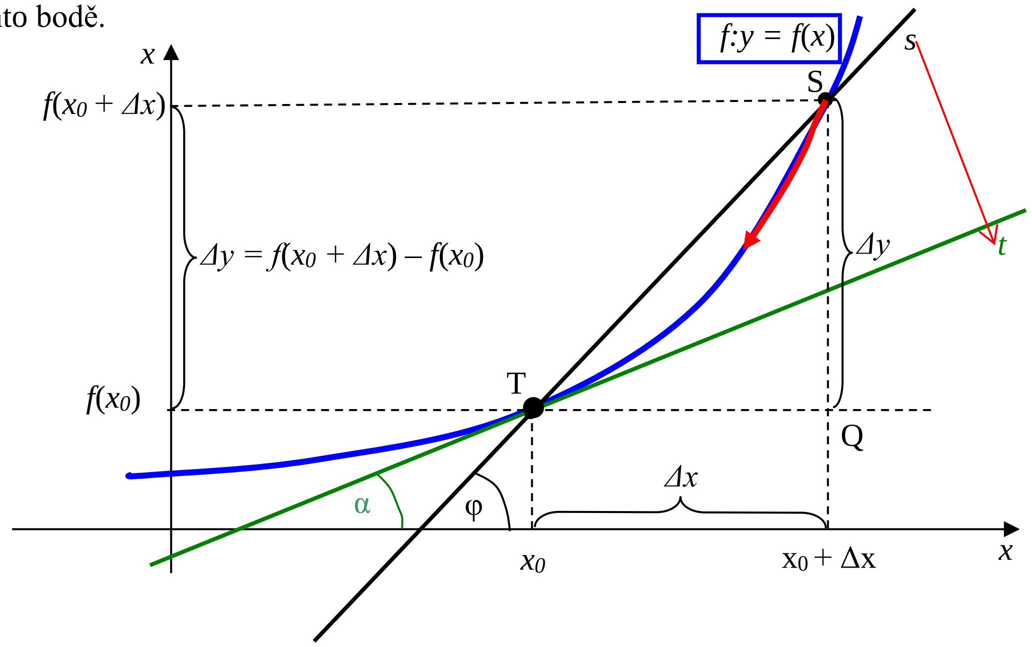
35 Derivace funkce a její užití – met.

Stručný přehled teorie – uváděn průběžně – spolu s metodickými radami a vzorovými výpočty úloh

Met.: Derivace funkce představuje jeden ze základních pojmů diferenciálního počtu. Byl vytvořen ve druhé polovině 17. století při řešení konkrétních fyzikálních a geometrických problémů.
Většina času, který je ve středoškolské matematice věnován diferenciálnímu počtu, je určena pro geometrický význam derivace funkce a jeho využití při vyšetřování průběhu funkcí a při řešení praktických úloh.

Geometrický význam derivace funkce v daném bodě x_0 je směrnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě.



Obrázek lze využít k vysvětlení způsobu určení směrnice tečny grafu funkce *f* (tedy způsobu určení derivace funkce *f*).

Na obrázku:

- část grafu funkce $\boxed{f: y = f(x)}$
- sečna $s = \leftrightarrow TS$ se směrovým úhlem φ
- tečna t se směrovým úhlem α vedená ke grafu funkce f bodem T.

Je zřejmé, že směrnici k_s sečny s určíme z pravoúhlého trojúhelníku STQ takto:

$$k_s = tg\ \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ze sečny se stane tečna v okamžiku, kdy bod *S* přejde po části grafu funkce *f* do bodu *T*. Pohyb bodu *S* do *T* a přechod sečny do tečny jsou na obrázku naznačeny červenými šipkami.
Přitom se zároveň zmenšují rozměry ΔSTQ (např. $\Delta x \to 0$).

Směrnice tečny: $$k_t = \lim_{S \to T} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Směrnicová rovnice tečny *t* je pak $t: y = k_t x + q$

Derivace funkce *f* v bodě x_0 je tedy $\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$ *(čteme: limita podílu přírůstku funkční hodnoty a přírůstku argumentu za předpokladu, že se přírůstek argumentu blíží k nule).*

Derivace funkce v intervalu: Má-li funkce f: $y = f(x)$ v každém bodě x jisté množiny M derivaci $f'(x)$, pak funkci f': $y = f'(x)$ nazýváme derivací funkce f na množině M.

Derivace některých elementárních funkcí:

funkce	její derivace v bodě x	x z intervalu
$y = x^n,\quad n \in \mathbf{N}$	$y = n.x^{n-1}$	$(-\infty;\infty)$
$y = x^k,\quad k \in \mathbf{Z}$	$y = k.x^{k-1}$	$(-\infty;0)\cup(0;\infty)$
$y = x^r,\quad r \in \mathbf{R}$	$y = r.x^{r-1}$	$(0;\infty)$
$y = c$	$y = 0$	$(-\infty;\infty)$
$y = \sin x$	$y = \cos x$	$(-\infty;\infty)$
$y = \cos x$	$y = -\sin x$	$(-\infty;\infty)$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
$y = \mathrm{cotg}\, x$	$y = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(k\pi;(k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
$y = e^x$	$y = e^x$	$(-\infty;\infty)$
$y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$y = a^x.\ln a$	$(-\infty;\infty)$
$y = \ln x$	$y = \dfrac{1}{x}$	$(0;\infty)$
$y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$y = \dfrac{1}{x.\ln a}$	$(0;\infty)$

Základní pravidla pro derivování:

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ … derivace součtu (rozdílu) se rovná součtu (rozdílu) derivací
2. $(cf)'(x) = c.\,f'(x)$ …… konstanta se „vynáší“ před znak derivace
3. $(fg)'(x) = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)$ ….. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ ….. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$
5. derivace složené funkce: $[f(g(x))]' = f'(g(x))\,.\,g'(x)$

Zvládnutí derivování elementárních funkcí a funkcí složených, a také zvládnutí používání základních pravidel pro derivování, představuje „abecedu“ celého diferenciálního počtu. Tomuto cíli musí učitel přizpůsobit obsah vyučovacích hodin, během nichž důkladným procvičováním dosáhne u studentů dostatečné obratnosti a jistoty ve výpočtech derivací.
Jako první úlohu může zařadit ukázku výpočtu derivace některé elementární funkce na základě definice:

Př.1: Nechť je dána funkce $\boxed{f: y = x^2}$. Vypočítejte její derivaci v libovolném bodě x.

Řeš.: $\boxed{f'(x)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \boxed{2x}$;

Př.2: Nechť je dána funkce $\boxed{f: y = \sin x}$. Vypočítejte její derivaci v libovolném bodě x.

Řeš.: $\boxed{f'(x)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin x.\cos \Delta x + \sin \Delta x.\cos x - \sin x}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x}.\cos x = \boxed{\cos x}$

Příklad prověrky, kterou by studenti měli bez větších problémů zvládnout po zmíněném důkladném procvičení, než se přejde k dalším typům úloh na využití derivací:

A

Derivujte:

1. $y = \frac{sin(-x)}{log\,7}$
2. $y = x^5.e^3 + \text{cotg}2$
3. $y = \frac{1}{cos(-5x^3+x^2)}$
4. $y = x^{cot\,g\frac{\pi}{6}}$
5. $y = x.\ln 2 + \log 20$
6. $y = 2^x.cotg(8x)$
7. $y = \frac{tg^5(2x^3+x^7)}{\ln 3x}$
8. $y = e^{\log^3 x^5}$

B

Derivujte:

1. $y = \frac{cos(-3x)}{sin\frac{\pi}{6}}$
2. $y = \ln^5 x^4 + \log \pi$
3. $y = \sqrt{x^5 + 9x^3}$
4. $y = x^{tg\frac{\pi}{15}}$
5. $y = x^2.tg\frac{\pi}{6} + \log x^5$
6. $y = e^x.\sin^4 x^5$
7. $y = \frac{tg(4x^5 + \cot gx)}{\sqrt{x^3}}$
8. $y = 5^{ln\,x^7}.(x^4-3)$

Znalost derivování si studenti mohou procvičit a souvislost derivace funkce a směrnice tečny upevnit na příkladech zabývajících se tečnami grafů funkcí:

Př.3: Napište obecnou rovnici tečny ke grafu funkce $f: y = f(x)$ v bodě T.

a) $\boxed{f: y = x^2 - 2x\,,\ \ T[4;?];}$

b) $\boxed{f: y = \frac{\sin 2x+1}{\cos x+\sin x}\,,\ \ T\left[\frac{\pi}{2};?\right]}$

Řeš.:

a) Tečna obecně … $t: y = kx + q$, kde $k = y' = f'(x) = 2x - 2$.

Směrnice tečny v bodě T … $k_T = f'(4) = 2.4 - 2 = 6$.

Pro určení q musíme vypočítat y-ovou souřadnici T: $y_T = 4^2 - 2.4 = 8 \Longrightarrow T[4;8]$.

$T \in t$ … $8 = 6.4 + q \quad \Longrightarrow q = 8 - 24 = -16$.

Směrnicová rovnice tečny … $t: y = 6x - 16$.

Obecná rovnice tečny … $t: 6x - y - 16 = 0$.

b) Tečna obecně … $t: y = kx + q, kde\ k = y' = \frac{2.\cos 2x.(\cos x+\sin x)-(\sin 2x+1)(-\sin x+\cos x)}{(\cos x+\sin x)^2}$

$= \frac{2.(\cos^2 x-\sin^2 x).(\cos x+\sin x)-(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x).(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2} =$

$\frac{2.(\cos x+\sin x)^2.(\cos x-\sin x)-(\cos x+\sin x)^2.(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2} = \frac{(\cos x+\sin x)^2.(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2} = \cos x - \sin x$.

Směrnice tečny v bodě T … $k_T = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$.

Pro určení q musíme vypočítat y-ovou souřadnici T: $y_T = \frac{\sin 2.\frac{\pi}{2}+1}{\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}} = 1 \Longrightarrow T\left[\frac{\pi}{2};1\right]$.

$T \in t$ … $1 = -\frac{\pi}{2} + q \quad \Longrightarrow q = 1 + \frac{\pi}{2}$.

Směrnicová rovnice tečny … $t: y = -x + 1 + \frac{\pi}{2}$.

Obecná rovnice tečny … $t: 2x + 2y - \pi - 2 = 0$.

Př.4: Vypočítejte směrový úhel tečny vedené ke grafu funkce průsečíkem grafu s osou x.
a) $f: y = -x^2 + 2x$; b) $f: y = \ln x$;

Průsečíky s osou x jsou dva: $P_{x1}[0; 0], P_{x2}[2; 0]$. Každým z nich lze vést jednu tečnu, jejíž směrnice $k = y' = -2x + 2$.

$t_1: y = k_1 x + q_1, kde\ k_1 = tg\varphi_1 = y'(0) = -2.0 + 2 = 2 \Rightarrow \varphi_1 = 63°26'$;

$t_2: y = k_2 x + q_2, kde\ k_2 = tg\varphi_2 = y'(2) = -2.2 + 2 = -2 \Rightarrow \varphi_2 = 116°34'$.

b) $P_x - ?$ $y = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P_x[1; 0]$ je jediný průsečík s osou x. Tímto průsečíkem lze vést jedinou tečnu, jejíž směrnice $k = y' = \frac{1}{x}$.

$t: y = kx + q, kde\ k = tg\varphi = y'(1) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$.

Př.5: Na grafu funkce $f: y = 2x^2 + x - 1$ určete bod T tak, aby tečna vedená tímto bodem byla a) rovnoběžná s přímkou $p: x - y + 10 = 0$;
b) kolmá k přímce $q: 3x + y - 1 = 0$.

Řeš.: a) tečna $t \parallel p \Rightarrow k_t = f'(x) = \underbrace{4x + 1 = k_p = 1}_{x_T = 0}$ $(p: y = x + 10)$

$\Rightarrow y_T = 2.0^2 + 0 - 1 = -1.$

$T[0; -1]$;

b) tečna $t \perp q \Rightarrow t \parallel q': x - 3y + m = 0 \Rightarrow k_t = f'(x) = \underbrace{4x + 1 = k_{q'} = \frac{1}{3}}_{x_T = -\frac{1}{6}}$ $\Rightarrow$

$\left(q': y = \frac{1}{3}x + \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow y_T = 2.\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} - 1 = -\frac{10}{9}.$ $T\left[-\frac{1}{6}; -\frac{10}{9}\right]$.

Souvislost derivace funkce a některých základních vlastností funkce:

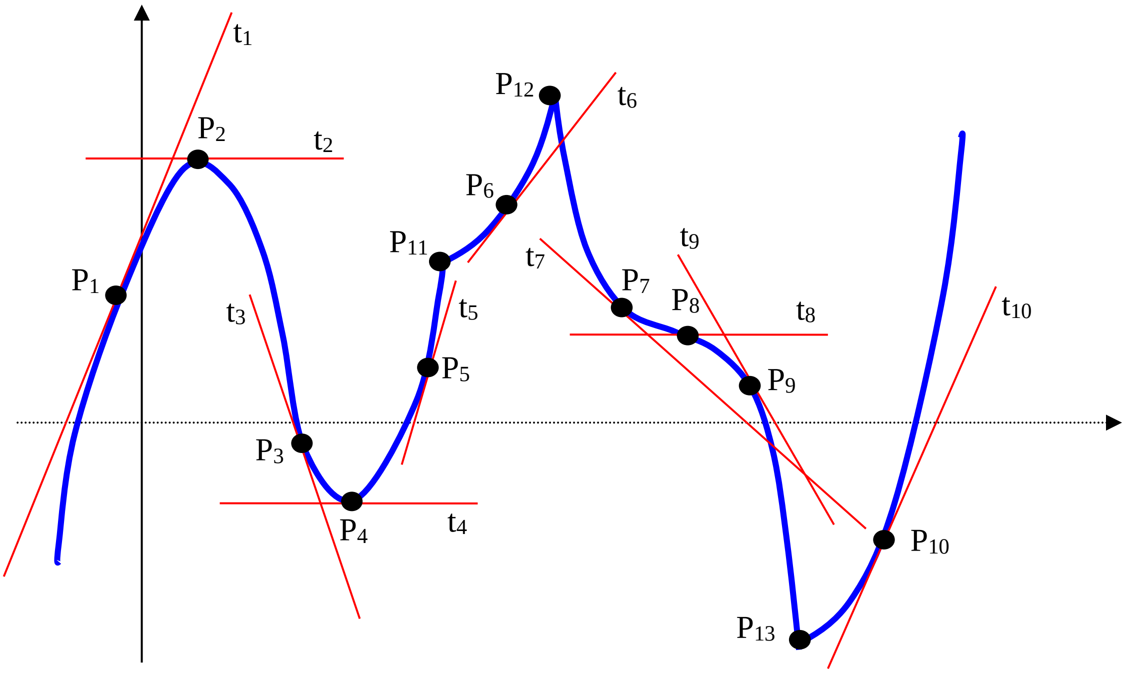
(Stále je třeba si uvědomovat, že derivace funkce je vlastně směrnice tečny grafu funkce a učitel může využít následující obrázek, aby upozornil studenty na to, jak informace o polohách tečen grafu v konkrétních bodech určuje (napovídá) průběh grafu funkce!!!)

- ***Spojitost*** funkce: Má-li funkce *f* v bodě *a* derivaci, pak je v tomto bodě spojitá. Obrácená věta ale neplatí! Funkce může být v bodě *a* spojitá a nemusí tam mít derivaci. (viz např. P_{11}, P_{12}, P_{13})

- ***Monotónnost*** funkce: Má-li funkce *f* v bodě *a* kladnou (zápornou) první derivaci, pak je v tomto bodě rostoucí (klesající). (viz např. P_1, P_5, P_6, P_{10}, (P_3, P_7, P_9)). Obrácená věta ale neplatí! Funkce může být v bodě *a* rostoucí (klesající) a derivace v bodě *a* se může rovnat nule (viz. např. P_8) nebo dokonce vůbec nemusí existovat. (viz např., P_{11}, P_{12}, P_{13})

- ***Extrémy*** funkce: Funkce *f* může (ale nemusí!!) mít v bodě *a* lokální extrém pouze tehdy, když $f'(a) = 0$ (pak *a* je stacionární bod) (viz např. P_2, P_4) nebo když derivace v bodě *a* neexistuje (viz např. P_{12}, P_{13}). Uvedené podmínky pro existenci extrému v bodě *a* jsou nutné, nikoliv však postačující. Tozn., že podmínka může být splněna a funkce v bodě *a* přesto extrém nemá (viz např. P_8, P_{11}). Ověření existence extrému funkce v daném bodě je třeba provést buď za pomoci intervalů monotónnosti nebo za pomoci vyšších derivací funkce.

- ***Konvexnost a konkávnost*** funkce: Má-li funkce *f* v bodě *a* druhou derivaci $f''(a) > 0$, pak je funkce v bodě *a* konvexní (dutá). Je-li $f''(a) < 0$, pak je funkce v bodě *a* konkávní (vypuklá). Body, ve kterých $f''(a) = 0$ a ve kterých se zároveň mění konvexní charakter funkce na konkávní či naopak, jsou inflexní body.



Než učitel naučí studenty vyšetřovat celý a kompletní průběh funkce, měli by se studenti na několika příkladech naučit zpracovávat jednotlivé fáze této náročné úlohy:

1. *Monotónnost a extrémy funkce:*

Př.6: Rozhodněte o typu monotónnosti funkce *f* v daném bodě *x*:

a) $f: y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x, \quad x = -2;$

b) $f: y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \quad x = \frac{\pi}{4};$

Řeš.: a) $y' = x^2 + x - 3,\ y'(-2) = (-2)^2 + (-2) - 3 = -1 < 0 \Rightarrow f$ je $v\ x = -2\ KLESAJÍCÍ$;

b) $y' = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\left(2.\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} > 0 \Rightarrow$

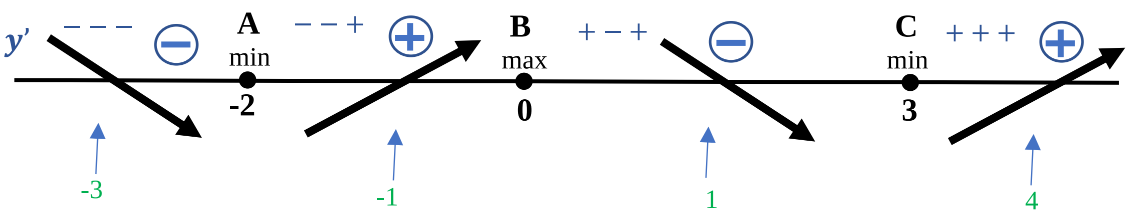
$\Rightarrow f$ je $v\ x = \frac{\pi}{4}\ ROSTOUCÍ$;

Př.7: Určete intervaly monotónnosti a extrémy dané funkce:

a) $f: y = \frac{1}{40}.(3x^4 - 4x^3 - 36x^2);$

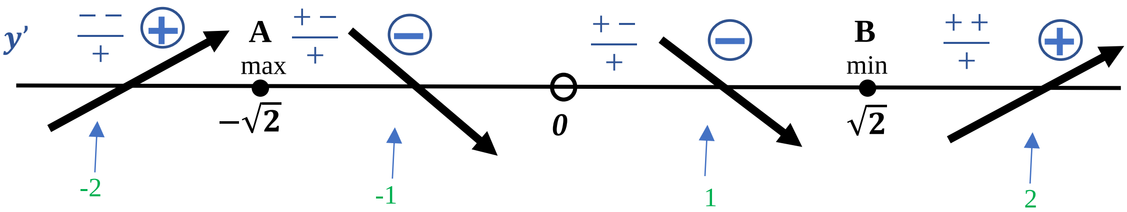
b) $f: y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x};$

Řeš.: a) $y' = \frac{1}{40}.(12x^3 - 12x^2 - 72x) = \frac{12}{40}.x(x^2 - x - 6) = \frac{3}{10}x.(x+2)(x-3)$



Funkce *f* je klesající v intervalech $(-\infty; -2\rangle$ a $\langle 0; 3\rangle$.
Funkce *f* je rostoucí v intervalech $\langle -2; 0\rangle$ a $\langle 3; \infty)$.
V bodě $x = -2$ má funkce lokální minimum … $A\left[-2; -\frac{8}{5}\right]$.
V bodě $x = 0$ má funkce lokální maximum … $B[0; 0]$.
V bodě $x = 3$ má funkce lokální minimum … $C\left[3; -\frac{189}{40}\right]$.

b) $y' = \frac{(2x-3).x-(x^2+3x-2)}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2} = \frac{(x+\sqrt{2}).(x-\sqrt{2})}{x^2}$



Funkce f je rostoucí v intervalech $(-\infty; -\sqrt{2}\rangle$ a $\langle\sqrt{2}; \infty)$.
Funkce f je klesající v intervalech $\langle-\sqrt{2}; 0)$ a $(0; \sqrt{2}\rangle$.
V bodě $x = -\sqrt{2}$ má funkce lokální maximum … $A[-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}+3]$.
V bodě $x = \sqrt{2}$ má funkce lokální minimum …$B[\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}-3]$.

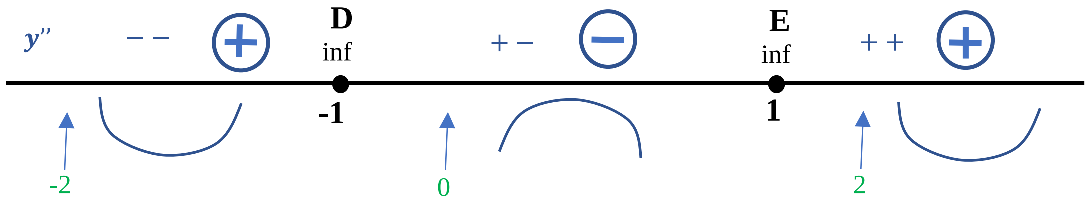
---

2. *Konvexnost a konkávnost funkce:*

Př.8: Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce: $f: y = x^4 - 6x^2 + 8$.

Řeš.: 1. první derivace: $y' = 4x^3 - 12x$;

2. druhá derivace: $y'' = 12x^2 - 12 = 12.(x+1).(x-1)$;



Funkce f je konvexní v intervalech $(-\infty; -1\rangle$ a $\langle 1;\infty)$.
Funkce f je konkávní v intervalu $\langle -1; 1\rangle$.
Funkce f má v bodech $x = -1$ a $x = 1$ dva inflexní body … $D[-1; 3]$ a $E[1; 3]$.

---

3. *Asymptoty grafu funkce:*

Př.9: Je dána funkce $f: y = \frac{1}{(1-x)^3}$. Určete všechny asymptoty jejího grafu.

Řeš.: 1. Asymptoty bez směrnice: Jediným bodem nespojitosti funkce f je $x = 1$.

Asymptota bez směrnice existuje v bodě nespojitosti právě tehdy, jeli alespoň jedna z jednostranných limit v tomto bodě nevlastní.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty;$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty;$$

Asymptota bez směrnice: $a_b:\ x = 1$

2. Asymptoty se směrnicí: $a_s: y = kx + q$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(1-x)^3.x} = 0;$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 0.x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(1-x)^3} = 0;$$

Asymptota se směrnicí: $a_s:\ y = 0$

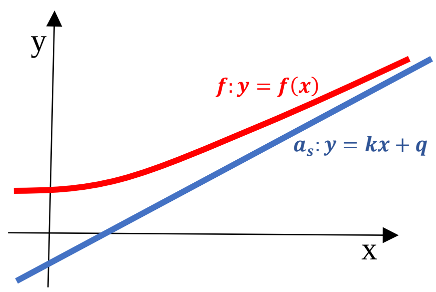
Osnova pro vyšetření průběhu funkce f: y = f(x):

1. **1.** D(f), sudost, lichost, periodičnost, průsečíky s osami, intervaly kladných a záporných funkčních hodnot
2. **2.** Chování funkce f v nevlastních bodech (určení $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$),

   určení asymptot (pokud existují)

   - bez směrnice … … asymptota a_b bez směrnice může existovat pouze v bodě nespojitosti b, a to tehdy, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit v b je nevlastní. Pak a_b: $x = b$.
   - se směrnicí ……. a_s: $y = k.x + q$, kde $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$
3. **3.** Určení intervalů monotónnosti a extrémů funkce (užití první derivace funkce)
4. **4.** Určení intervalů konvexnosti a konkávnosti a inflexních bodů funkce (užití druhé derivace funkce)
5. **5.** Graf funkce

Pozn. k asymptotám se směrnicí:



Je-li a_s asymptota, pak se pro $x \to \infty$ přímka $\boldsymbol{a_s}$ a křivka $\boldsymbol{f}$, (tedy $\boldsymbol{kx + q}$ a $\boldsymbol{f(x)}$) neomezeně přibližují. Proto:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{kx+q} = 1 \implies \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{k + \underbrace{\frac{q}{x}}_{=0}} = \frac{1}{k} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$

Tozn., že $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k.}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (kx + q) = \lim\limits_{x\to\infty} kx + q.$

Tozn., že $\boxed{q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} kx = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx).}$

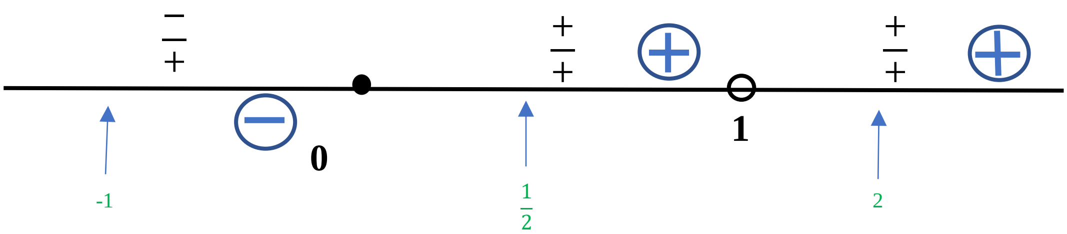
Analogicky pro asymptotu při $x \to -\infty$.

Př.10: Vyšetřete průběh funkce: $f: y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

Řeš.: 1 a) $D(f) = R - \{1\}$; b) Funkce f není ani sudá ani lichá … $\cancel{S}$, $\cancel{L}$;

c) Průsečíky s osami souřadnic: $P_x = P_y[0; 0]$;

d) Intervaly kladných a záporných funkčních hodnot:



② a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{x^3}{x^2.\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty;$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{x^3}{x^2.\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x=+\infty;$

b) Asymptoty:

1. bez směrnice … bod nespojitosti: $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty;\\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty;\end{array}\right\}\quad\boxed{a_b\ldots x=1}$$

2. se směrnicí … $y=kx+q$;

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\left[\frac{x^3}{x^3-2x^2+x}\right]=1;$$

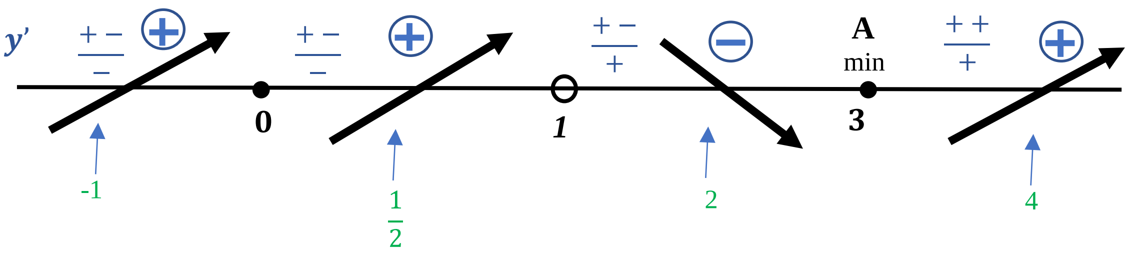
$$\underbrace{q=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-x=\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}\right]=2;}$$

$$\boxed{a_s\ldots y=x+2}$$

---

③ $y'=\frac{3x^2.(x-1)^2-x^3.2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1).(3x^3-3x^2-2x^3)}{(x-1)^4}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^2.(x-3)}{(x-1)^3};$

- y' neexistuje pro $x=1$, ale $1\notin D(f)$;
- $y'=0\iff\boxed{x=0\ \vee\ x=3\ \ldots.\ \text{stacionární body}}$

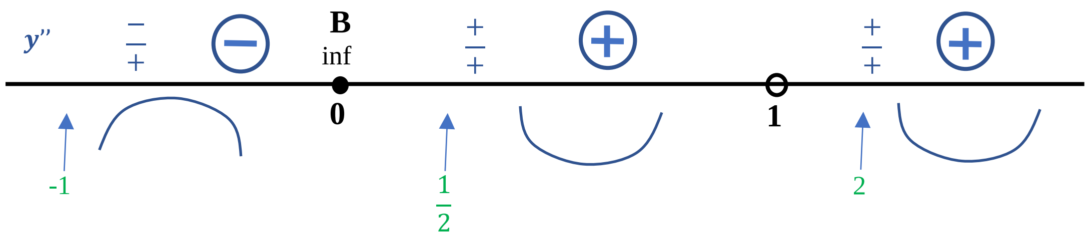


V bodě $x=3$ má funkce lokální minimum … $A\left[3;\frac{27}{4}\right]$;

---

④ $y''=\left[\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}\right]'=\frac{(3x^2-6x).(x-1)^3-(x^3-3x^2).3.(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{(x-1)^2.6x}{(x-1)^6}=\frac{6x}{(x-1)^4};$

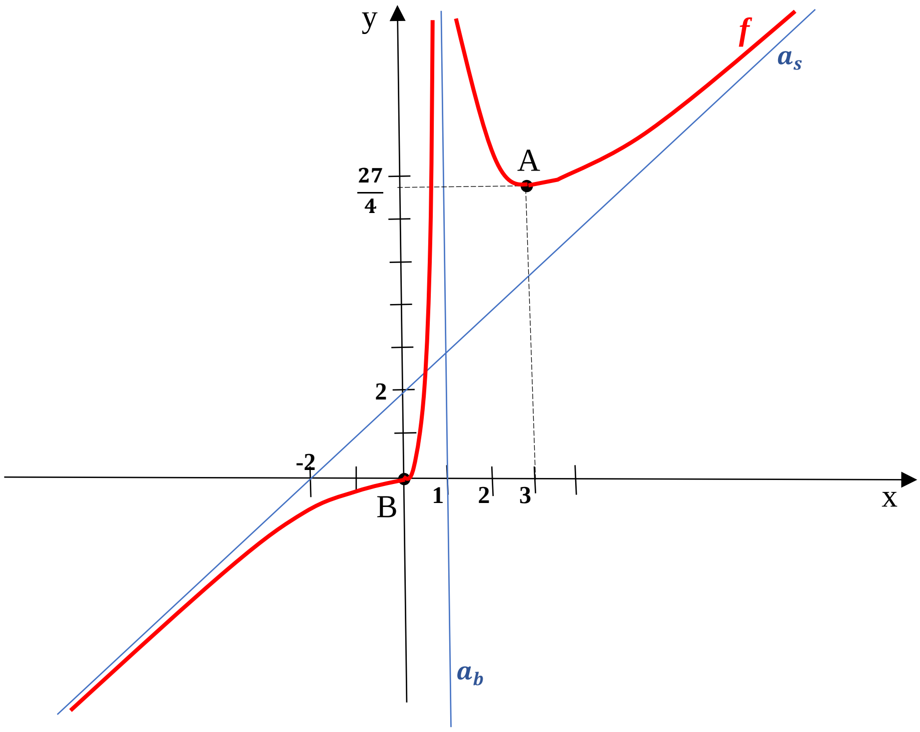
- $y''=0\iff\boxed{x=0\ \ldots.\ \text{kritický bod}}$



V bodě $x=0$ je inflexní bod … $B[0;0]$.

---

⑤ Graf:



Slovní úlohy řešené užitím derivací:

U slovních úloh jde o to, abychom na základě zadaných parametrů vztahujících se k nějakému ději, který musíme pro účely řešení matematizovat do podoby vhodné funkce ***f***, nalezli hodnotu veličiny, případně několika veličin, pro které uvedená funkce ***f*** nabude extrémní, tedy buď maximální nebo minimální, hodnoty.

Abychom byli v řešení slovní úlohy úspěšní, musíme provést přehledný zápis, ve kterém jasně určíme: **Zadané veličiny: ……**

Hledané veličiny: je-li jich více, musíme všechny vyjádřit pomocí jedné z nich a pomocí veličin zadaných ……

Funkci, u které budeme hledat extrém: ……

Pozn. 1: V zadání každé úlohy je vždy naprosto jasně řečeno, jaká veličina má být maximální nebo minimální –

– např.: 1) „…určete rozměry … tak, aby objem byl maximální …“,
2) „…určete rozměry … tak, aby povrch byl minimální …“,
3) „… určete čísla … tak, aby jejich součin byl maximální …“, …

Učitel by měl na začátku projít se studenty v některé sbírce úloh pár zadání příkladů a vyzvat studenty, aby rychle v textu našli funkci, u níž budou hledat extrém. Zbaví je tím obav, že pro ně bude obtížné správnou funkci najít.

Pozn. 2: Hledání extrémů funkce ***f*** se samozřejmě provádí za pomoci určení první derivace funkce, určení bodů, ve kterých první derivace neexistuje a především určení stacionárních bodů, ve kterých je první derivace rovna nule. Protože nás však u těchto praktických úloh vůbec nezajímá průběh funkce ***f***, nýbrž pouze body, v nichž má extrém, můžeme místo intervalů monotónnosti použít následující tvrzení:

Nechť $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0$,
ale $f^n(x_0) \neq 0$.

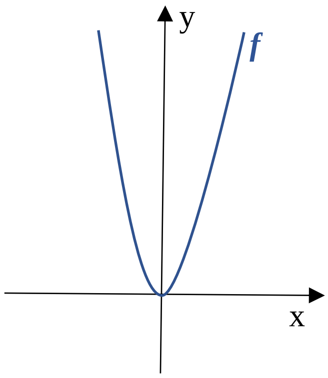
Je-li n – sudé číslo, pak má *f* v x_0 lokální extrém, a to:

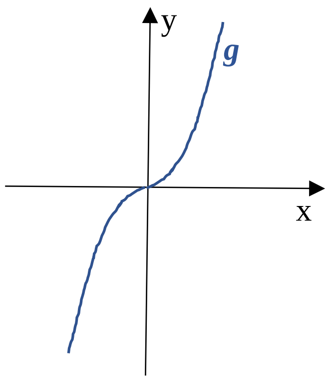
- **maximum, když $f^n(x_0) < 0$;**
- **minimum, když $f^n(x_0) > 0$.**

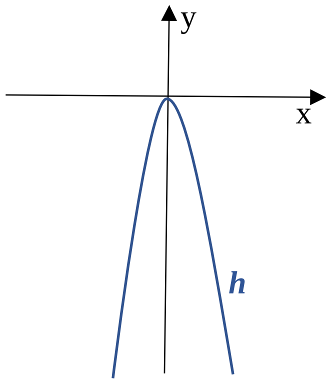
Je-li n – liché číslo, pak *f* v x_0 lokální extrém nemá.

Studenti si nepochybně použití posledního tvrzení k určení extrémů funkce lépe zapamatují, jestliže jim učitel ukáže, jak tvrzení funguje na následujících třech jednoduchých funkcích:

$\boldsymbol{f: y = x^4}$	$\boldsymbol{g: y = x^3}$	$\boldsymbol{h: y = -x^2}$
$y' = 4x^3$ stac. bod …0 $y'' = 12x^2$, $\quad y''(0) = 0$ $y''' = 24x$, $\quad y'''(0) = 0$ $y^{IV} = 24 > 0$ **První od nuly různá derivace je čtvrtá, tedy sudá, pro bod $x = 0$ je kladná, proto má funkce f v tomto bodě minimum.**	$y' = 3x^2$ stac. bod …0 $y'' = 6x$, $\quad y''(0) = 0$ $y''' = 6$ **První od nuly různá derivace je třetí, tedy lichá, proto funkce g v tomto bodě extrém nemá.**	$y' = -2x$ stac. bod …0 $y'' = -2 < 0$ **První od nuly různá derivace je druhá, tedy sudá, pro bod $x = 0$ je záporná, proto má funkce h v tomto bodě maximum.**





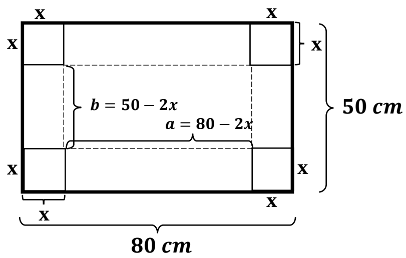


Př.11: Určete stranu čtverců, které musíme vyříznout ve všech rozích obdélníkového kartonu o rozměrech *80 cm* a *50 cm* tak, aby po složení vznikla krabice maximálního objemu.

Řeš.: **Dáno:** rozměry obdélníku: $\boldsymbol{m = 80\ cm, n = 50\ cm}$;

Hledáme: $\boldsymbol{x}$ ... strana čtverce ;

Funkce, u níž určujeme extrém: **Objem kvádru $\boldsymbol{V = abc}$;**



$V = abc = (80 - 2x).(50 - 2x).x$

$\boldsymbol{f}: y = V = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$

$y' = 12x^2 - 520x + 4000 = 4.(3x^2 - 130x + 1000)$

$y' = 0 \Leftrightarrow\ 3x^2 - 130x + 1000 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 10} \vee \boxed{x = \frac{100}{3} = 33,\overline{3}}$

Kořen $33,\overline{3}$ nepřichází v úvahu vzhledem k zadaným rozměrům kartonu. Proto budeme dál pracovat pouze s kořenem $x = 10$.

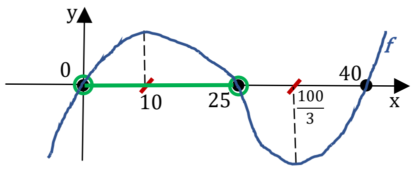
Ověříme pomocí vyšších derivací, že pro $x = 10$ nabude funkce $\boldsymbol{f}$ maxima:

$y'' = 24x - 520,\ \ y''(10) = 240 - 520 = -280 < 0 \Rightarrow$ v bodě $x = 10$ je maximum.

Pozn.: Ve zvídavé třídě může učitel očekávat dotaz (nebo jej může v případě dostatku času položit sám): Jak s řešením úlohy souvisí druhý kořen $x = \frac{100}{3} = 33,\overline{3}$?

Aby neztrácel příliš mnoho času, měl by být učitel na tuto situaci připraven:

1) Graf funkce $f: y = 4x^3 - 260x^2 + 4000x = 4x.(x^2 - 65x + 1000) =$
$= 4x.(x - 25)(x - 40)$

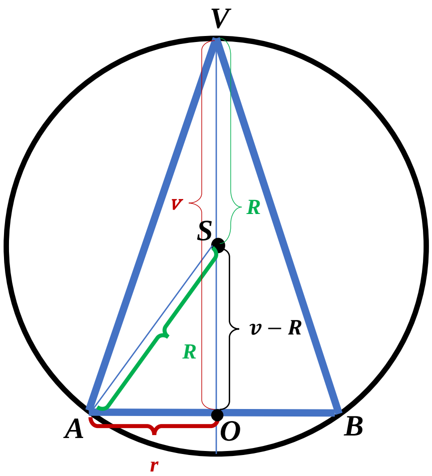


2) Hledaná délka strany čtverce $\boldsymbol{x}$ evidentně musí ležet v $(0; 25)$. Stacionární bod $x = \frac{100}{3}$ leží mimo tento interval, ale kubická funkce f v něm má minimum.

Př.12: Do koule daného poloměru ($R = 30\ cm$) vepište kužel maximálního objemu. Určete poloměr podstavy a výšku kužele.

Řeš.: **Dáno:** **koule s poloměrem R** ;

Hledáme: poloměr podstavy **r** a výšku **v** vepsaného kužele (dvě neznámé – jednu musíme vyjádřit pomocí druhé, případně pomocí zadané veličiny ***R***;



$$\boldsymbol{\Delta AOS: r^2 + (v - R)^2 = R^2}$$
$$\boldsymbol{r^2 + v^2 - 2Rv + R^2 = R^2}$$
$$\boldsymbol{r^2 = 2Rv - v^2}$$

Funkce, u níž určujeme extrém: **Objem kužele** $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 v}$;

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi(2Rv - v^2)v$

$f: y = V = \frac{2\pi R v^2}{3} - \frac{\pi v^3}{3}$

$y' = \frac{4\pi R v}{3} - \pi v^2 = \pi v.\left(\frac{4R}{3} - v\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \boxed{v = 0} \vee \boxed{v = \frac{4R}{3}}$

Pro řešení úlohy má evidentně význam pouze druhý kořen.

Ověříme pomocí vyšších derivací, že pro $v = \frac{4R}{3}$ nabude funkce $\boldsymbol{f}$ maxima.

$y'' = \frac{4\pi R}{3} - 2\pi v,\ y''\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{4\pi R}{3} - 2\pi.\frac{4R}{3} = -\frac{5R}{3} < 0 \ \Rightarrow$ pro $v = \frac{4R}{3}$ má $\boldsymbol{f}$ maximum.

Nakonec dopočítáme druhý požadovaný rozměr:

$r^2 = 2Rv - v^2 = 2R.\frac{4R}{3} - \frac{16R^2}{9} = \frac{8R^2}{9} \ \Rightarrow r = +\frac{2R\sqrt{2}}{3}$;

Poloměr podstavy kužele je $r = +\frac{2R\sqrt{2}}{3}$ $(r = 20\sqrt{2}cm)$, výška kužele $v = \frac{4R}{3}$ $(v = 40\ cm)$.

Derivace funkce zadané implicitně:

Funkce může být zadaná - explicitně (přímo, tedy rovnicí f: $y = f(x)$)

- implicitně (nepřímo, zastřeně, zprostředkovaně) – např. pomocí analytického vyjádření křivky $F(x, y) = 0$, která sama nemusí být grafem funkce, ale může představovat sjednocení grafů několika funkcí f_i (viz např. kuželosečky).

Derivování implicitní funkce:

x … známým způsobem

y … jako složenou funkci závisící na x

(např.: $(y^3 + x^2 + 7)' = 3y^2.\ y' + 2x$)

Př.13: Napište rovnici tečny křivky k: $x^2 + y^2 - 6x + 24y + 53 = 0$ v jejím bodě $T[9; -4]$.

Řeš.: $t: y = kx + q\,, \quad k = y'$

$2x + 2yy' - 6 + 24y' = 0 \; /:2$

$yy' + 12y' = 3 - x$

$y' = \frac{3-x}{y+12}$

$y'(T) = \frac{3-9}{-4+12} = -\frac{3}{4}$

$t: y = -\frac{3}{4}x + q$

$T \in t \Rightarrow \; -4 = -\frac{3}{4}.9 + q \;\Rightarrow q = -4 + \frac{27}{4} = \frac{11}{4}$

$t: y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$

$t: 3x + 4y - 11 = 0$

Př.14: Kterým bodem elipsy $E: 4(x-1)^2 + y^2 = 1$ je vedena tečna, která svírá s kladnou poloosou x úhel $\varphi = 45°$?

Řeš.: $t: y = kx + q, \quad k = y' = \mathrm{tg}\,\varphi$

$8(x-1) + 2yy' = 0$

$y' = \frac{y}{4(x-1)} = \mathrm{tg}45° = 1$

$y = 4(x-1)$

$E: 4(x-1)^2 + [4(x-1)]^2 = 1$

$20x^2 - 40x + 19 = 0$

$x_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600-1520}}{40} = \frac{10 \pm \sqrt{5}}{10}$

$x_1 = \frac{10-\sqrt{5}}{10} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow T_1\left[\frac{10-\sqrt{5}}{10}; -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$;

$x_2 = \frac{10+\sqrt{5}}{10} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow T_2\left[\frac{10+\sqrt{5}}{10}; \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$.

Fyzikální význam derivace:

Jednou z nejdůležitějších oblastí použití derivace ve fyzice je derivace podle časové proměnné vyjadřující rychlost změny nějaké proměnné v čase.

Např. rychlost je derivace dráhy podle času;
zrychlení je derivace rychlosti podle času; …

Př.15: Kámen vyhozený z výšky $h = 10\,m$ svisle vzhůru má počáteční rychlost $v_0 = 20\,\frac{m}{s}$.

a) Jakou rychlost bude mít kámen v čase 1,5 s?
b) Za jaký čas dosáhne maximální výšku?
c) Jakou výšku kámen dosáhne?

Řeš.: a) $s = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

$s = 10 + 20t - 5t^2$

$v = s' = \frac{ds}{dt} = 20 - 10t$

$v(1{,}5) = (20 - 10.1{,}5)\,\frac{m}{s} = 5\,\frac{m}{s}$;

b)výška bude maximální $\Leftrightarrow v = 0\,\frac{m}{s} \;\Rightarrow\; 20 - 10t = 0 \;\Rightarrow t = 2\,s$;

c) $H = s(2) = (10 + 20.2 - 5.2^2)m = 30\,m$.

Rychlost kamene v čase 1,5 s je $5\,\frac{m}{s}$. Maximální výšku $30\,m$ dosáhne za $2\,s$.

Př.16: Těleso sjede po nakloněné rovině 50 m dlouhé za 10 s. Jaká je jeho konečná rychlost, pokud předpokládáme, že dráha je kvadratickou funkcí času a že počáteční rychlost je nulová?

Řeš.: $s = at^2 + bt + c$

$v = s' = \frac{ds}{dt} = 2at + b$

$s(0) = 0m \ \Rightarrow c = 0$

$v(0) = 0 \ \Rightarrow b = 0$

$s \ldots 50 = a.10^2 + 0.10 + 0 \ \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Závislost dráhy na čase: $s = \frac{1}{2}t^2$;

Konečná rychlost: $v = 2.\frac{1}{2}.t = 2.0{,}5.10\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$.

Konečná rychlost tělesa je $10\frac{m}{s}$.

Př.17: Rychlík jedoucí rychlostí $90\frac{km}{h}$ má zabrzdit tak, aby se rovnoměrně zpomaleným pohybem zastavil na vzdálenost $1\ km$. Po jakém čase zastaví?

Řeš.: $v_0 = 90\frac{km}{h} = 25\frac{m}{s}$; $\quad s = 1\ km = 1000\ m$;

$s = v_0 t - \frac{a}{2}t^2 = 25t - \frac{a}{2}t^2$; $\qquad v = s' = 25 - at = 0 \ \Rightarrow a = \frac{25}{t}$;

$s = 25t - \frac{25}{2t}t^2 = 12{,}5t \ \Rightarrow \ 1000 = 12{,}5t \ \Rightarrow \ t = \frac{1000}{12{,}5}s = 80\ s$;

Rychlík zastaví za $80\ s$.

Př.18: Množství elektrického náboje Q, který prochází vodičem, se mění s časem podle vztahu: $Q = 3t^2 + 2t + 2$. a) Vypočítejte okamžitou hodnotu proudu i v době $t = 1\ s$.

b) Vypočítejte, kdy bude hodnota okamžitého proudu $i = 20\ A$.

Řeš.: $Q = 3t^2 + 2t + 2$

$i = Q' = \frac{dQ}{dt} = 6t + 2$

a) $i(1) = (6.1 + 2)\ A = 8\ A$;

b) $20 = 6t + 2$

$6t = 18$

$t = 3\ s$.

V čase $1\ s$ je okamžitá hodnota proudu $8\ A$. Hodnoty $20\ A$ bude dosaženo za $3\ s$.

Př.19: V indukční cívce s indukčností $L = 0{,}03\ H$ protéká proud $i = 15sin^5(3t)$. Vypočtěte indukované napětí v čase $t = \frac{2\pi}{9}\ s$.

Řeš.: $u = -L.\frac{di}{dt}$;

$\frac{di}{dt} = 15.5.sin^4(3t).\cos(3t).3 = 225.sin^4(3t).\cos(3t)$;

$u\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \left[-0{,}03.225.sin^4\left(3.\frac{2\pi}{9}\right).\cos\left(3.\frac{2\pi}{9}\right)\right]V = \left[-0{,}03.225.sin^4\frac{2\pi}{3}.\cos\frac{2\pi}{3}\right]V =$

$= \left[-6{,}75.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4.\left(-\frac{1}{2}\right)\right]V = 1{,}9\ V$.

Okamžitá hodnota indukovaného napětí je $1{,}9\ V$.

Př.20 Těleso koná harmonický kmitavý pohyb a pro jeho výchylku z rovnovážné polohy platí $y = y_m . \sin(\omega t)$, kde y_m je amplituda výchylky a ω je úhlová frekvence pohybu. Odvoďte vzorec pro výpočet rychlosti a zrychlení harmonického kmitavého pohybu.

Řeš.: $y = y_m . \sin(\omega t)$;

$v = y' = \frac{dy}{dt} = y_m . \omega . \cos(\omega t)$;

$a = v' = \frac{dv}{dt} = -y_m . \omega^2 . \sin(\omega t) = -\omega^2 . y$.

Základní poznatky:

1. Určete derivace funkce (Realisticky.cz – 10.2.7):

a) $y' = \left(\frac{3}{3x-1}\right)'$; b) $y' = [\cos(3x+\pi)]'$; c) $y' = \left[\frac{1}{(x^2+2x-3)^6}\right]'$; d) $y' = \left(\sqrt[3]{x^2+\cos x}\right)'$;

$\left[-\frac{9}{(3x-1)^2};\ -3.\sin(3x+\pi);\ -\frac{12.(x+1)}{(x^2+2x-3)^7};\ \frac{1}{3}.\frac{2x-\sin x}{\sqrt[3]{(x^2+\cos x)^2}}\right]$

2. Určete rovnici tečny a normály grafu funkce $y = \frac{1}{x}$ v bodě $[-1, -1]$.

[Realisticky.cz – 10.2.14, $y = -x - 2,\ y = x$]

Typové příklady standardní náročnosti

3. Vypočítejte derivace funkcí:

$a)\ y = \sqrt[3]{x}\,.(2x^2+1)$ $\left[y' = \frac{(14x^2+1).\sqrt[3]{x}}{3x}\right]$

$b)\ y = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{1+x^2}$ $\left[y' = \frac{-\sin x}{2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$

$c)\ y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ $\left[y' = \frac{-1}{\cos x}\right]$

$d)\ y = \sqrt{x.\sqrt{x.\sqrt{x}}}$ $\left[y' = \frac{7.\sqrt[8]{x^7}}{8x}\right]$

4. Vypočítejte derivace (Realisticky.cz – 10.2.8):

a) $[\sin(e^{5x})]'$ b) $\left[2^{\cos(x^2+2x)}\right]'$ c) $\left[e^{\sin^2 x}\right]'$

$\left[y' = 5.e^{5x}.\cos e^{5x};\ \ y' = -(2x+2).\sin(x^2+2x).2^{\cos(x^2+2x)}.\ln 2;\ y' = e^{\sin^2 x}.\sin 2x\right]$

5. Určete rovnici tečny grafu funkce $f: y = x^2 - 2x + 3$, která je rovnoběžná s přímkou $p: 3x - y + 5 = 0$. $\left[t: 12x - 4y - 13 = 0,\quad T\left[\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]\right]$

6. Určete rovnici tečny ke křivce $y^2 + 3x + 4y - 7 = 0$, v bodě T[-8, 4].

$[\ t: x + 4y - 8 = 0]$

7. Do koule o poloměru ***R*** vepište kužel maximálního objemu. Určete výšku tohoto kužele.

$$\left[v = \frac{4}{3}r\right]$$

8. Ze čtvrtky kartonu formátu A4 (210 x 297 mm) vystřihněte v rozích čtyři stejné čtverečky tak, aby složením vzniklého obrazce vznikla krabička maximálního objemu.

[Realisticky.cz – 10.2.15: Je nutné vystřihnout čtverce o straně *40,4 mm*.]

9. Určete ideální rozměry válcové pivní plechovky, která při objemu *0,5 l* bude mít minimální povrch (minimální spotřeba plechu). $\left[Realisticky.cz - \text{ 10.2.15:} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}, r = v\right]$

10. Vyšetřete průběh funkce: a) $f: y = x^4 - 2x^2$; b) $f: y = \frac{x-1}{(x-2)^2}$

Rozšiřující cvičení

11. Určete rovnice tečen křivky *k:* $x^3y + x^2y^2 = 1 + x$ v jejích průsečících s přímkou $p: x = -1$. $[t_1: x + y + 1 = 0\,;\ t_2: y - 1 = 0]$

12. Určete rovnici tečny křivky $k: x.\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$ v jejím bodě $T\left[1; \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\left[t: 2.\left(\sqrt{2} + 1\right).x - 4y + \pi - 2.\left(\sqrt{2} + 1\right) = 0\right]$$

13. Trosečníka na voru unáší mořský proud rychlostí 7 km/h. Kolmo na směr proudu pluje obchodní loď rychlostí 30 km/h (vzhledem k povrchu Země). V jeden okamžik je námořní loď vzdálena od místa, kde se protínají jejich trajektorie 100 km a trosečník 10 km. V jaké nejmenší vzdálenosti se minou? Zachrání loď trosečníka, když předměty jeho velikosti vidí na vzdálenost 20 km?

[Realisticky.cz – 10.2.15: Minou se v minimální vzdálenosti 13 km, asi ho loď zachrání.]