Křovákovo zobrazení a souřadnicový systém S-JTSK

Matematická kartografie

Obsah

1. Základní charakteristiky zobrazení
2. Postup transformace zeměpisných souřadnic do zobrazovací roviny
3. Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím
4. Meridiánová konvergence
5. Zákony zkreslení

1

ZÁKLADNÍ CHARAKTERISTIKY ZOBRAZENÍ

Základní charakteristiky zobrazení

- Po vzniku ČSR budovány základy nového státního mapového díla – zejména pro katastrální účely.

- Ing. Josef Křovák (1884 - 1951)
- V roce 1922 navrhl **konformní kuželové zobrazení v obecné poloze** jako součást geodetického referenčního **systému jednotné trigonometrické sítě katastrální (S-JTSK)**.

Další soutěžní návrhy:
http://old.gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni_texty/index_soubory/hlavni_soubory/cechy.html#navrhy

Základní charakteristiky zobrazení

- Od roku 1922 používáno jako prozatímní.
- Od roku 1933 do roku 1938 používáno jako definitivní.
- Znovu zavedeno po druhé světové válce.
- V padesátých a šedesátých letech 20. století se státní mapy velkých měřítek vyhotovovaly v Gaussově zobrazení s třístupňovými poledníkovými pásy.
- Od roku 1968 začaly probíhat práce na Základní mapě středního měřítka. Opět použito Křovákovo zobrazení.

Základní charakteristiky zobrazení

- Zobrazení definováno s ohledem na tvar území bývalé ČSR tak, aby minimalizovalo na tomto území délkové zkreslení. Dnes je používáno pouze v České a Slovenské republice.
- V současné době jsou v tomto zobrazení vydávána státní mapová díla určená pro státní správu a samosprávu (viz Nařízení vlády ČR 430/2006). Jedná se zejména o:
  - Katastrální mapy v měřítku 1:1000 (DKM a KMD)
  - Státní mapu v měřítku 1 : 5 000
  - Základní mapy ČR
  - …

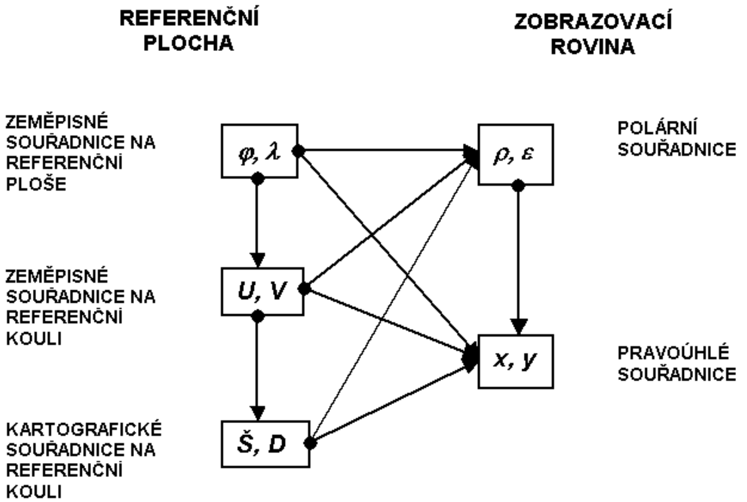
Základní charakteristiky zobrazení

Gaussovo zobrazení šlo nejkratší cestou, Křovákovo nejdelší.

Křovákovo zobrazení je **dvojité zobrazení**. Co to znamená?

$$\varphi,\lambda \rightarrow U,V \rightarrow \check{S},D \rightarrow \underset{\downarrow}{R,D'(\rho,\varepsilon)} \rightarrow X,Y$$

polární souřadnice v rovině



Postup transformace:

1. Zobrazení Besselova elipsoidu na kouli
2. Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické
3. Zobrazení do roviny konformního kuželového zobrazení
4. Transformace polárních souřadnic na rovinné pravoúhlé

2

POSTUP TRANSFORMACE ZEMĚPISNÝCH SOUŘADNIC DO ZOBRAZOVACÍ ROVINY

Zobrazení Besselova elipsoidu na kouli

- Besselův elipsoid je zobrazen na kouli s jednou nezkreslenou rovnoběžkou φ_0 = 49°30´, která probíhá přibližně středem území ČSR.
- Použito Gaussovo konformní zobrazení z elipsoidu na kouli.

$$r = \sqrt{M_0 N_0}$$

$$tg\left(\frac{U}{2} + 45°\right) = k\left[tg^{\alpha}\left(\frac{\varphi}{2} + 45°\right)\left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}\right]$$

$$V = \alpha\lambda$$

r = 6 380 703,6105 m
k = 1,0034191640
α = 1,000597498372

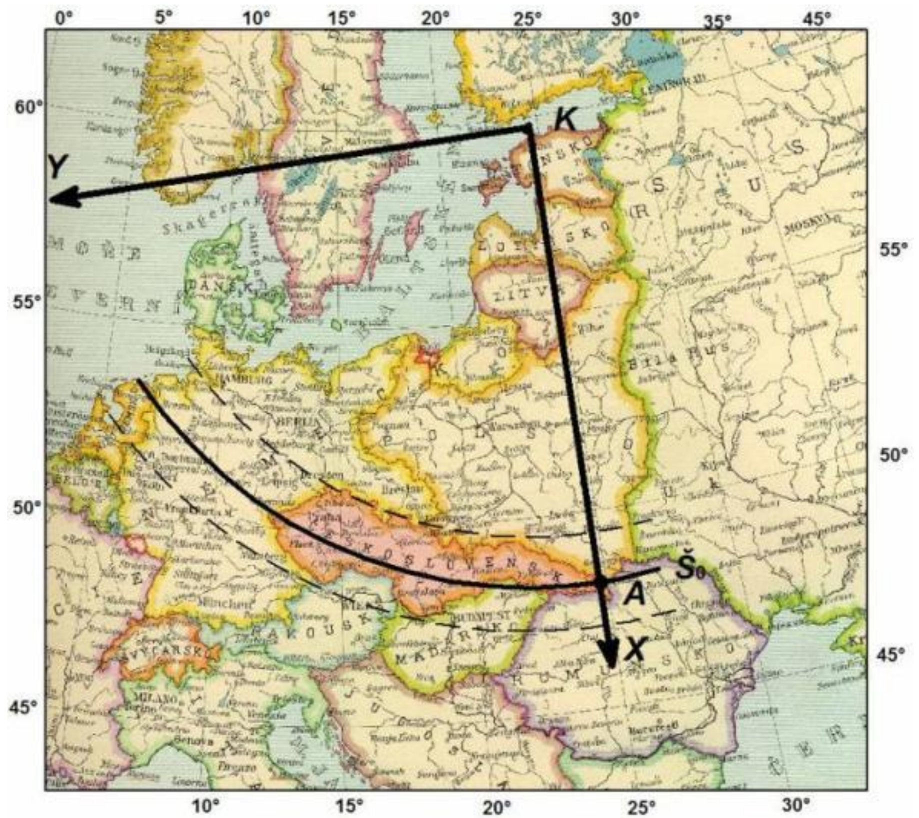
Vysvětlení konstant a odvození vzorců viz kap. 5.

Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

- Na kouli jsou definovány kartografické souřadnice Š, D - kvůli protáhlému a mírně stočenému tvaru ČSR.
- Osa území - základní kartografická rovnoběžka $Š_0$.
- Na ní zvolen bod A za nejvýchodnějším bodem státu.
- Následně je určena poloha kartografického pólu K.
- Základní kartografická rovnoběžka $Š_0 = 78°30'$.
- Celé území ČSR leží v úzkém pásu mezi dvěma kartografickými rovnoběžkami v relativně malé vzdálenosti $\Delta Š = 2°31'$, což je asi 280 km.

$$\begin{aligned}\varphi_A &= 48°15' \\ \lambda_A &= 42°30'\end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned}U_A &= 48°12'42{,}69689'' \\ V_A &= 42°31'31{,}41725''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_K &= 59°42'42{,}69689'' \\ V_K &= 42°31'31{,}41725''\end{aligned}$$



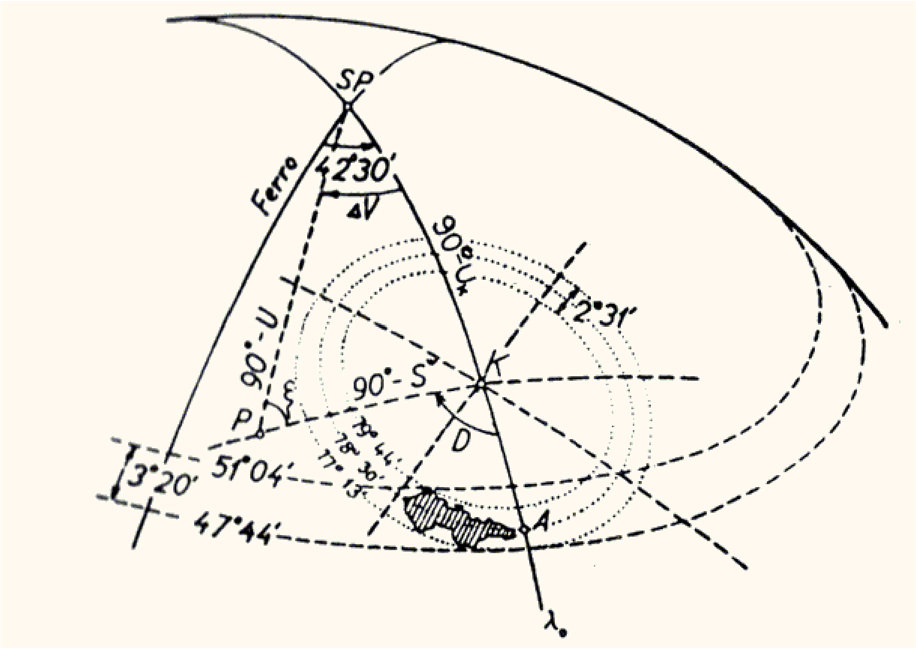
Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

- Máme bod A na kartografické rovnoběžce Š0, jak z něj spočítat pól K?
- V prezentaci máme vzorce ze 2 nebo ze 3 bodů…

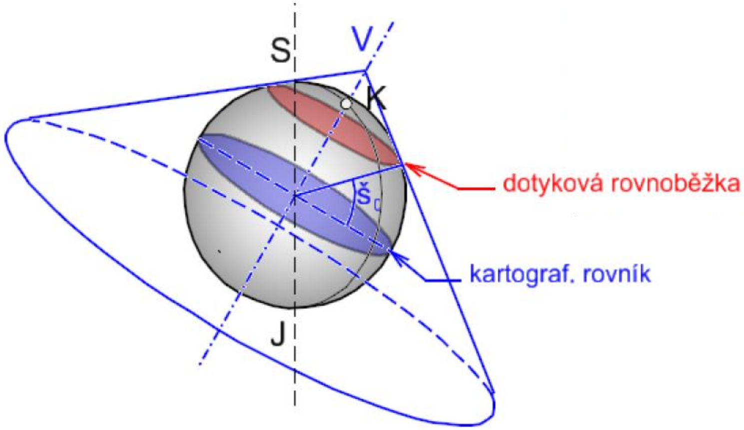
$$Š_0 = 78°30'$$
$$U_A = 48°12'42'',69689$$
$$V_A = 42°31'31'',41725$$

$$U_K = 59°42'42'',69689$$
$$V_K = 42°31'31'',41725$$

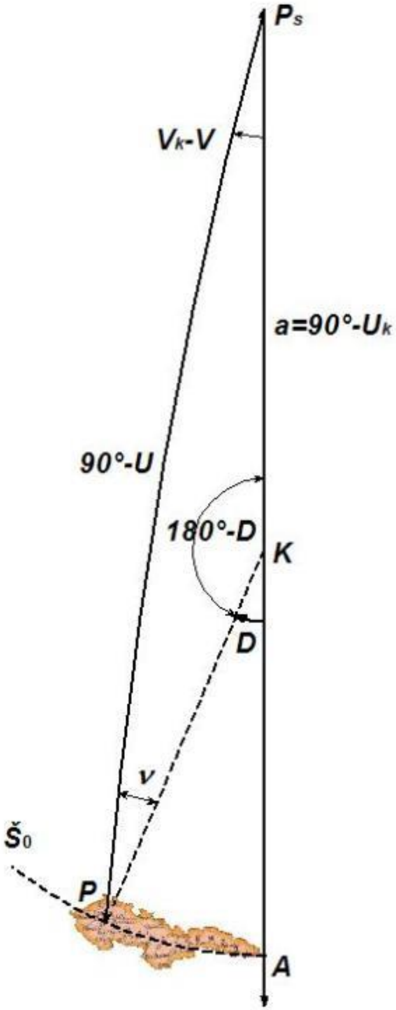
Ing. Křovák ho určil „empiricky“ – kružítkem.



Kartografický pól K je obraz vrcholu kužele V.
Vrchol kužele je relativně nízko nad terénem, asi 130 km.



Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické



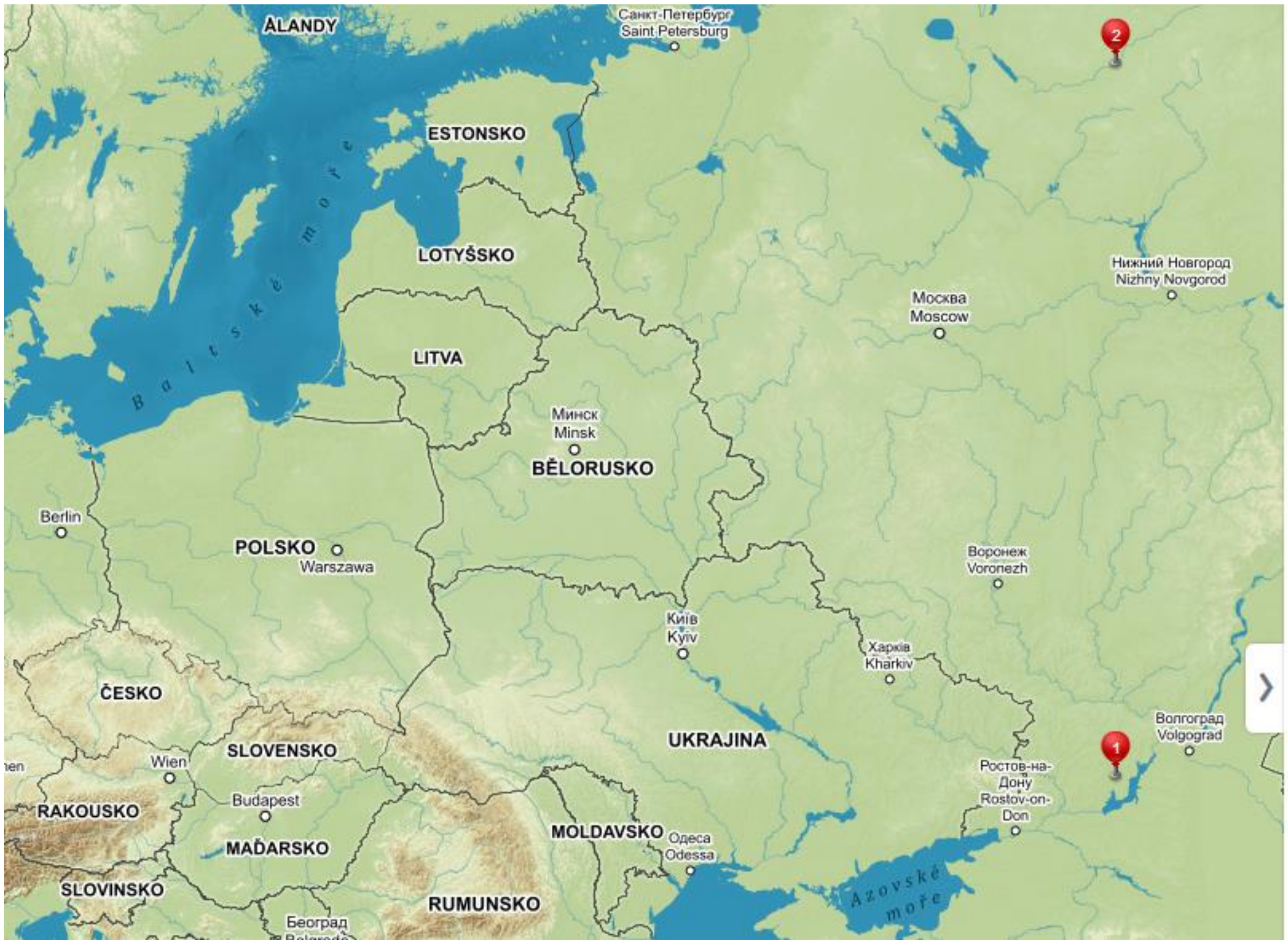
Převod zeměpisných souřadnic na kartografické – rovnice viz kap. 1:

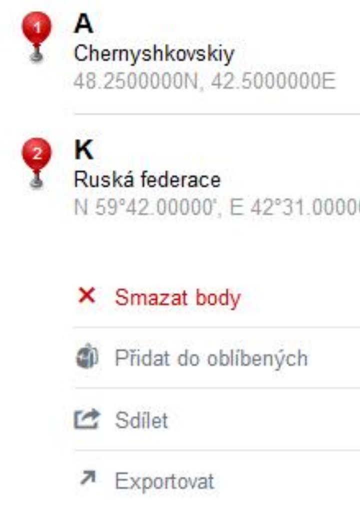
$$\sin \check{S} = \sin U \cos a + \cos U \sin a \cos(V - V_k)$$

$$\sin D = \frac{\cos U}{\cos \check{S}} \sin(V - V_k)$$

Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

Máme definovány body A a K: $\varphi_A = 48°15'$ $\lambda_A = 42°30'$ $U_A = 48°12'42'',69689$ $V_A = 42°31'31'',41725$ $U_K = 59°42'42'',69689$ $V_K = 42°31'31'',41725$





Kde je chyba?

Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

$\varphi_A = 48°15'$
$\lambda_A = 42°30'$

Souřadnice jsou měřeny od ferrského poledníku.

$\varphi_A = 48°15'$
$\lambda_A = 24°50'$

od greenwichského poledníku

Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

Ferrský poledník
El Hierro [el'jero] – nejzápadnější ostrov Kanárských ostrovů
Od antiky západní konec známého světa.
1634 – odsouhlasen jako základní poledník většinou Evropy

Jeho souřadnice podle greenwichského poledníku?

$42°30' - 24°50' = 17°40'$

Proč Ing. Křovák použil ferrský poledník?

Ing. Křovák byl zeměměřič. Zobrazení mělo být hlavně pro katastr.

V jakém zobrazení byly katastrální mapy Rakousko-Uherska?

Cassini-Soldnerovo zobrazení
Transverzální válcové zobrazení – není konformní!
Zeměpisné délky λ jsou počítány k poledníku Ferra.

Zobrazení do roviny konformního kuželového zobrazení

- Pro zobrazení referenční koule do roviny je použito Lambertovo jednoduché konformní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou.

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{tg\left(\frac{U_0}{2} + 45°\right)}{tg\left(\frac{U}{2} + 45°\right)} \right]^n$$

$$\varepsilon = nV$$

$$\rho_0 = m_0 R \operatorname{cotg} U_0$$

$$n = \sin U_0$$

vzorce kuželového konformního zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

- Z důvodů zmenšení absolutní hodnoty zkreslení se dodatečně zkresluje pomocí měřítkového faktoru m_0 = 0,9999. Zmenší se tak poloměr kužele.
- Vzniknou tak dvě nezkreslené rovnoběžky:

  $Š_1$ = 79°18'03"

  $Š_2$ = 77°40'50"

  Základní rovnoběžka $Š_0$ = 78°30'

  Není tedy uprostřed.

Zobrazení do roviny konformního kuželového zobrazení

zobrazovací rovnice: $R, D'(\rho, \varepsilon)$

$$R = R_0 \left[\frac{tg\left(\frac{\check{S}_0}{2} + 45°\right)}{tg\left(\frac{\check{S}}{2} + 45°\right)} \right]^n$$

$$D' = nD$$

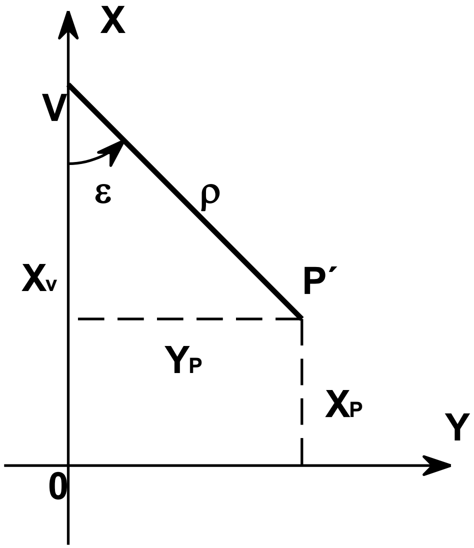
$$R_0 = m_0 r \operatorname{cotg} \check{S}_0$$

$$n = \sin \check{S}_0$$

R_0 = 1 298 039,0046 n = 0,9799247046 m_0 = 0,9999

Transformace polárních souřadnic na rovinné pravoúhlé

Lambertovo konformní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou kartografickou rovnoběžkou $Š_0$.



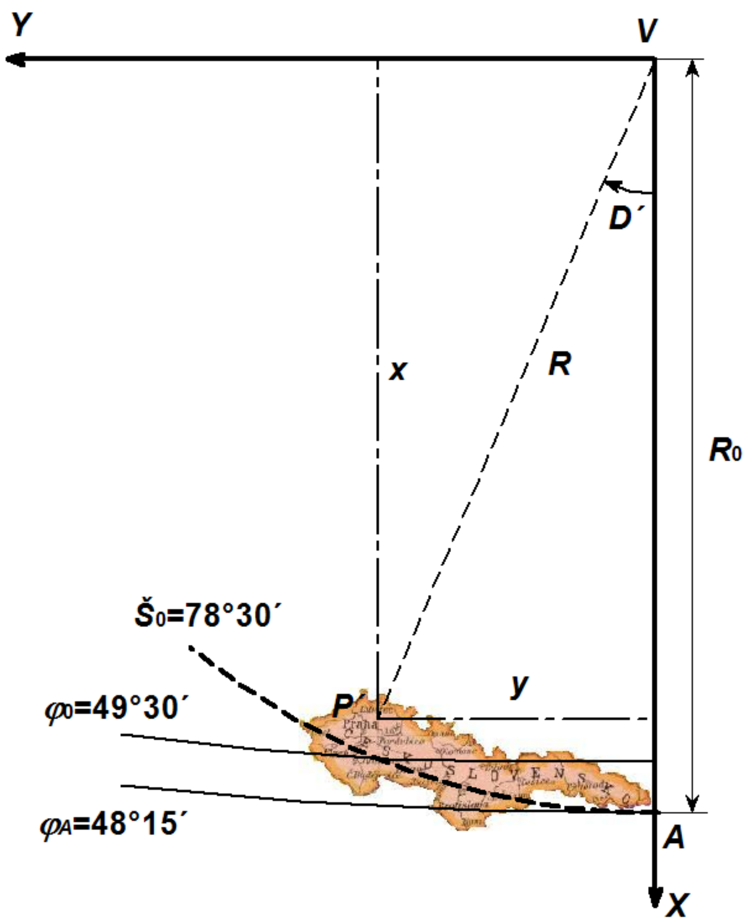
Obecný tvar výpočtu rovinných souřadnic pro kuželová zobrazení:

$$x = x_v - \rho \cos \varepsilon$$

$$y = \rho \sin \varepsilon$$

Jenže Ing. Křovák sloučil počátky polární a pravoúhlé soustavy.

Transformace polárních souřadnic na rovinné pravoúhlé



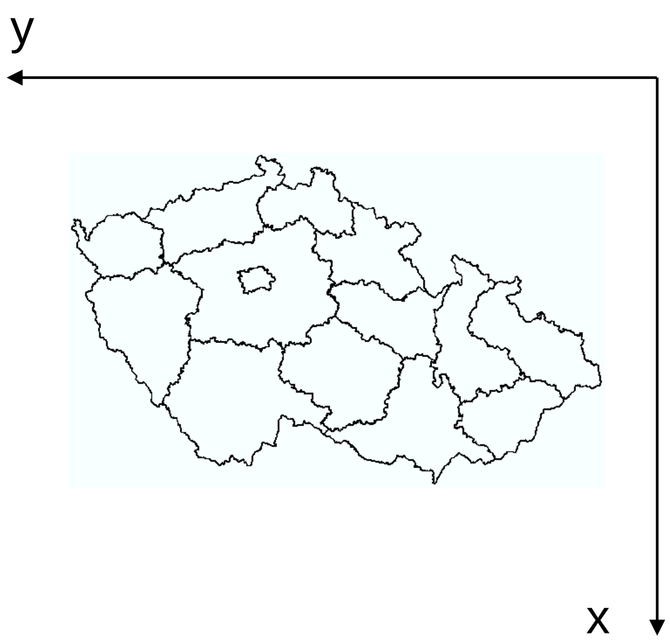
$$x = R\cos D'$$

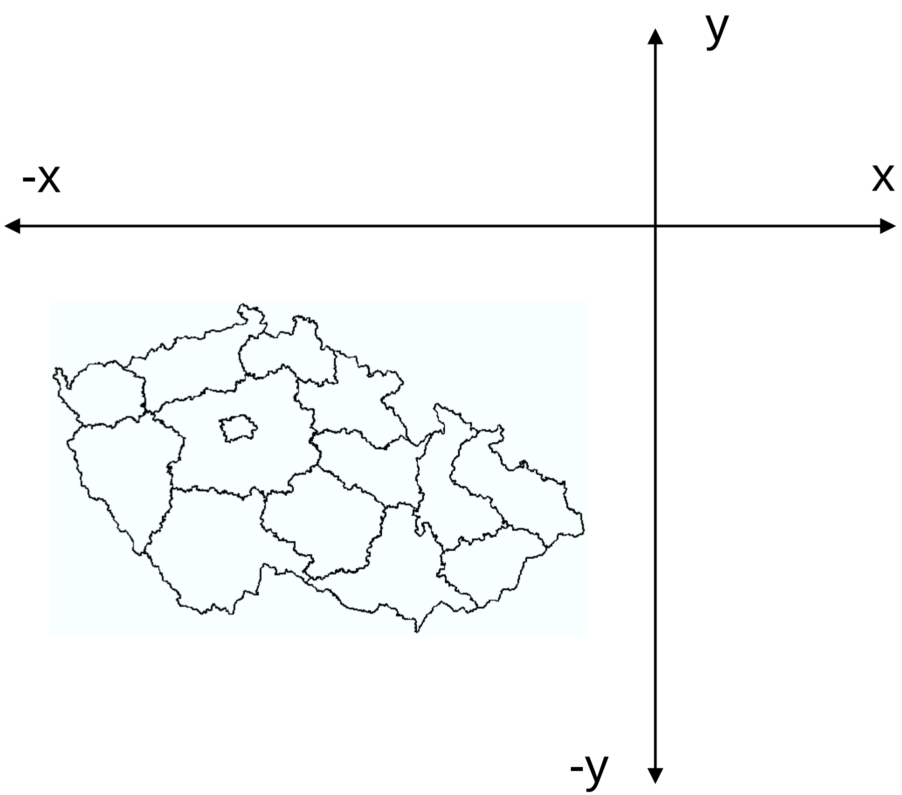
$$y = R\sin D'$$

Kontrola správného pořadí souřadnic:
y<x

Směry os - programátoři GIS a databází jsou zoufalí.

S-JTSK Krovak x S-JTSK Krovak EastNorth





S-JTSK Krovak x S-JTSK Krovak EastNorth

S-JTSK EastNorth má v definici (v souboru PRJ), že otáčí původní systém Křováka o 90° a osu x násobí -1.

S-JTSK_Krovak	**S-JTSK_Krovak_East_North**
Projection: Krovak	Projection: Krovak
False_Easting: 0,00000000	False_Easting: 0,000000
False_Northing: 0,00000000	False_Northing: 0,000000
Pseudo_Standard_Parallel_1:78,50000000	Pseudo_Standard_Parallel_1: 78,500000
Scale_Factor: 0,99990000	Scale_Factor: 0,999900
Azimuth: 30,28813975	Azimuth: 30,288140
Longitude_Of_Center: 24,83333333	Longitude_Of_Center: 24,833333
Latitude_Of_Center: 49,50000000	Latitude_Of_Center: 49,500000
X_Scale: 1,00000000	X_Scale: -1,000000
Y_Scale: 1,00000000	Y_Scale: 1,000000
XY_Plane_Rotation: 0,00000000	XY_Plane_Rotation: 90,000000
Linear Unit: Meter	Linear Unit: Meter

3

INVERZNÍ FUNKCE K ZOBRAZOVACÍM ROVNICÍM

Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím

Zpětná transformace se řeší podle postupu: X, Y $\rightarrow$ R, D´ $\rightarrow$ Š, D $\rightarrow$ U, V $\rightarrow$ φ, λ

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D' = arctg\frac{y}{x}$$

$$\check{S} = 2\left\{\arctan\left[tg\left(\frac{\check{S}_0}{2} + 45°\right)\sqrt[n]{\frac{R_0}{R}}\right] - 45°\right\}$$

$$D = \frac{D'}{\sin \check{S}_0}$$

$$U = \arcsin\left(\cos a \sin \check{S} - \sin a \cos \check{S} \cos D\right)$$

$$V = V_k - \arcsin\left(\frac{\cos \check{S}}{\cos U}\sin D\right)$$

Výpočet zeměpisné šířky se provádí v iteracích – φ je na obou stranách rovnice:

$$\varphi^{(0)} = 2\left\{\arctan\left[\frac{1}{k}\left(\tan\left(\frac{U}{2} + 45°\right)\right)\left(\frac{1 + e\sin U}{1 - e\sin U}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha}} - 45°\right\}$$

$$\varphi^{(i)} = 2\left\{\arctan\left[\frac{1}{k}\left(\tan\left(\frac{U}{2} + 45°\right)\right)\left(\frac{1 + e\sin \varphi^{(i-1)}}{1 - e\sin \varphi^{(i-1)}}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}\right]^{\frac{1}{\alpha}} - 45°\right\}$$

$$\lambda = \frac{V}{\alpha}$$

Vypočítaná zeměpisná délka je od poledníku Ferra.

kde i = 1, 2…
Tři iterace většinou stačí.

4

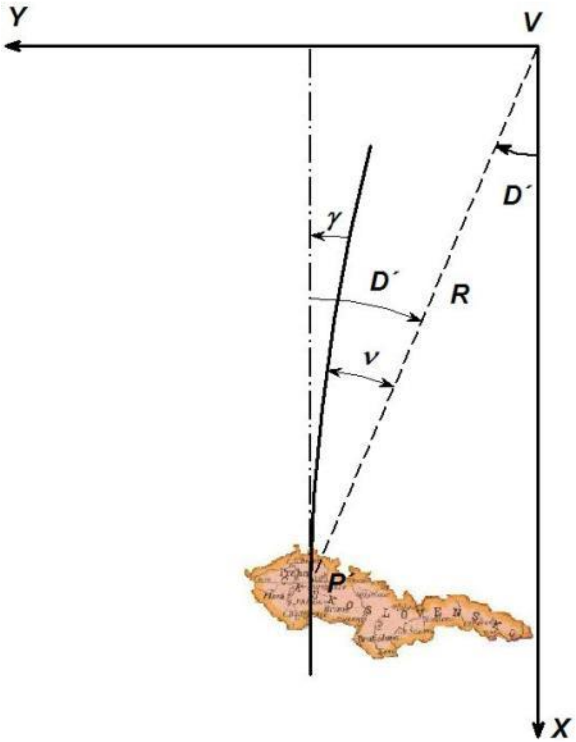
MERIDIÁNOVÁ KONVERGENCE

Meridiánová konvergence

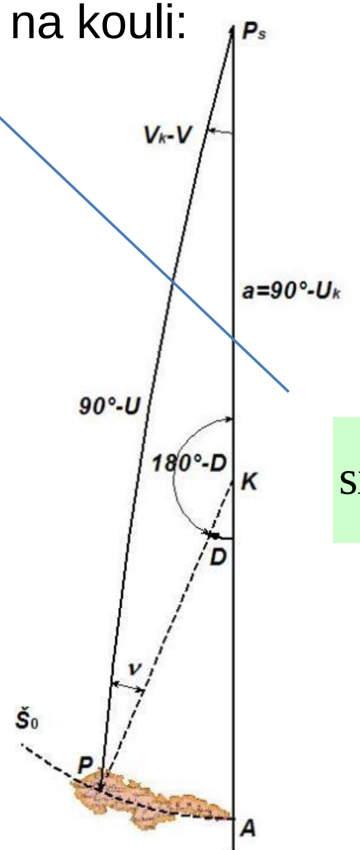
Úhel mezi rovnoběžkou s osou x a obrazem místního zeměpisného poledníku.
Směr osy x na mapě není totožný se směrem sever-jih.

$$D' = arctg\,\frac{y}{x}$$

v rovině: $\gamma = D' - \nu$



na kouli:



D´ - polární souřadnice bodu (směrník) viz dříve – vzorce pro inverzní funkce

ν - úhel mezi obrazem zeměpisného a kartografického poledníku (azimut) - v konformním zobrazení se nezmění. Lze ho tedy spočítat na kouli:

$$\sin\nu = \frac{\sin a}{\cos U}\sin D = \frac{\sin a}{\cos \check{S}}\sin\left(V_k - V\right)$$

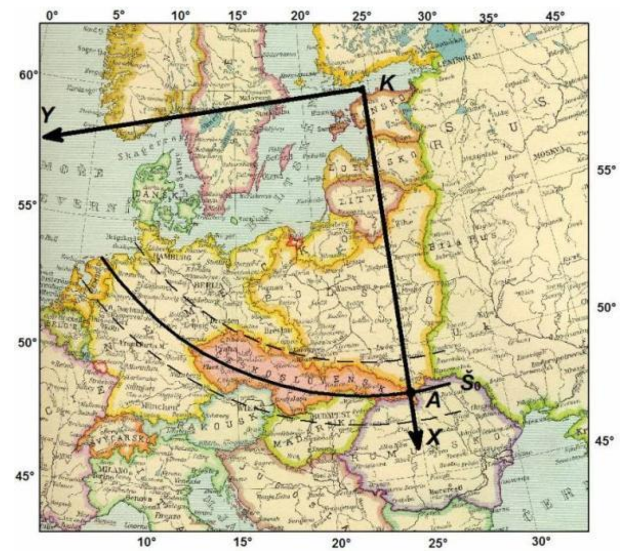
A dosadit do rovnice v rovině.

Meridiánová konvergence

Varianta, když není nutná vysoká přesnost (jako i u Gaussova zobrazení):

$\gamma = \sin \varphi \lambda$

λ je odečítána od poledníku λ_k = 42°30′ východně Ferra, na kterém leží bod A a kart. pól K.

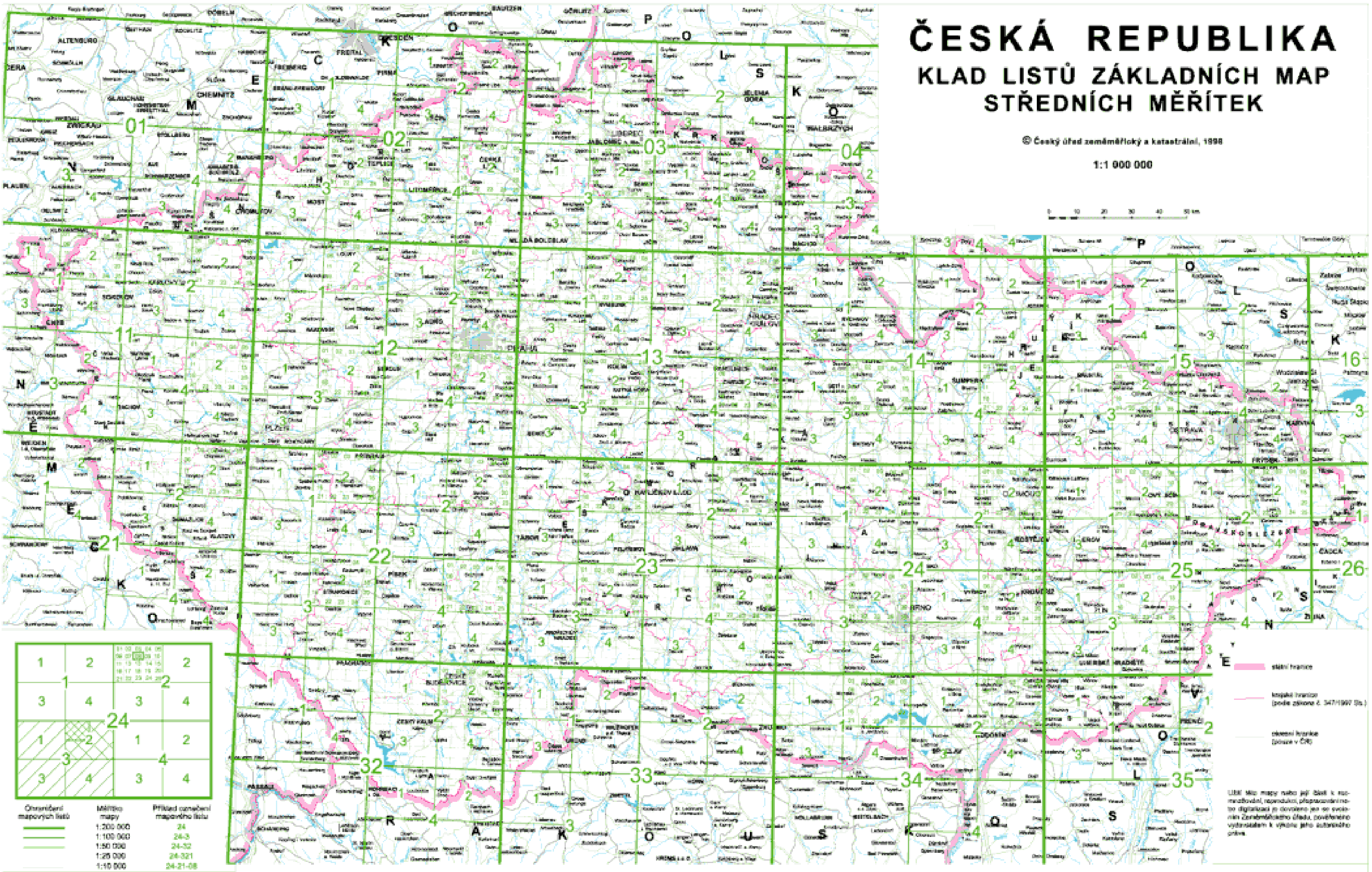


výpočet z rovinných pravoúhlých souřadnic:

$$\gamma = 0,008257\, Y + 2,373\, \frac{Y}{X}\, [km]$$ souřadnice x, y v km

- Na celém území bývalého Československa konvergence má pouze záporné znaménko.
- Tato skutečnost je obecně známá, hodnota konvergence se proto často uvádí bez znaménka.
- Na území ČR konvergence dosahuje hodnot od -4°33′ na východě území do -9°35′ na západě.

Klad mapových listů ZM



Klad mapových listů ZM

- Klad listů vychází ze základního měřítka 1:200 000.
- Pole map ZM200 jsou v rovině S-JTSK vymezena umělou konstrukcí pravidelně se sbíhajících čar, které velmi zhruba sledují obraz poledníků.
- Klad je tedy vytvořen uměle – neodpovídá poledníkům a rovnoběžkám.
    - Aby mapy nešly snadno využít vojensky.

- Listy ZM jsou pravidelné lichoběžníky.
- Délka základny listu kolísá od 47,03 cm (horní strana nejsevernějšího listu) do 49,22 cm (dolní strana nejjižnějšího listu).
- Výška libovolného listu je 38 cm.

5

ZÁKONY ZKRESLENÍ

Zákony zkreslení

- V Křovákově zobrazení stačí vypočítat pouze délkové zkreslení m. Proč?
- Plošné zkreslení bude jeho kvadrátem a úhlové zkreslení je zde nulové.
- Délkové zkreslení:
  - při zobrazení referenčního elipsoidu na kouli
  - při zobrazení koule do roviny
- Zkreslení při zobrazení referenčního elipsoidu na referenční kouli v rozsahu území bývalého Československa je zanedbatelné.
  - Činí maximálně 0,07 mm/km v absolutní hodnotě.
  - V běžných výpočtech se neuvažuje.
- Zkreslení při zobrazení referenční koule do zobrazovací roviny kuželového zobrazení má v případě Křovákova zobrazení tvar:

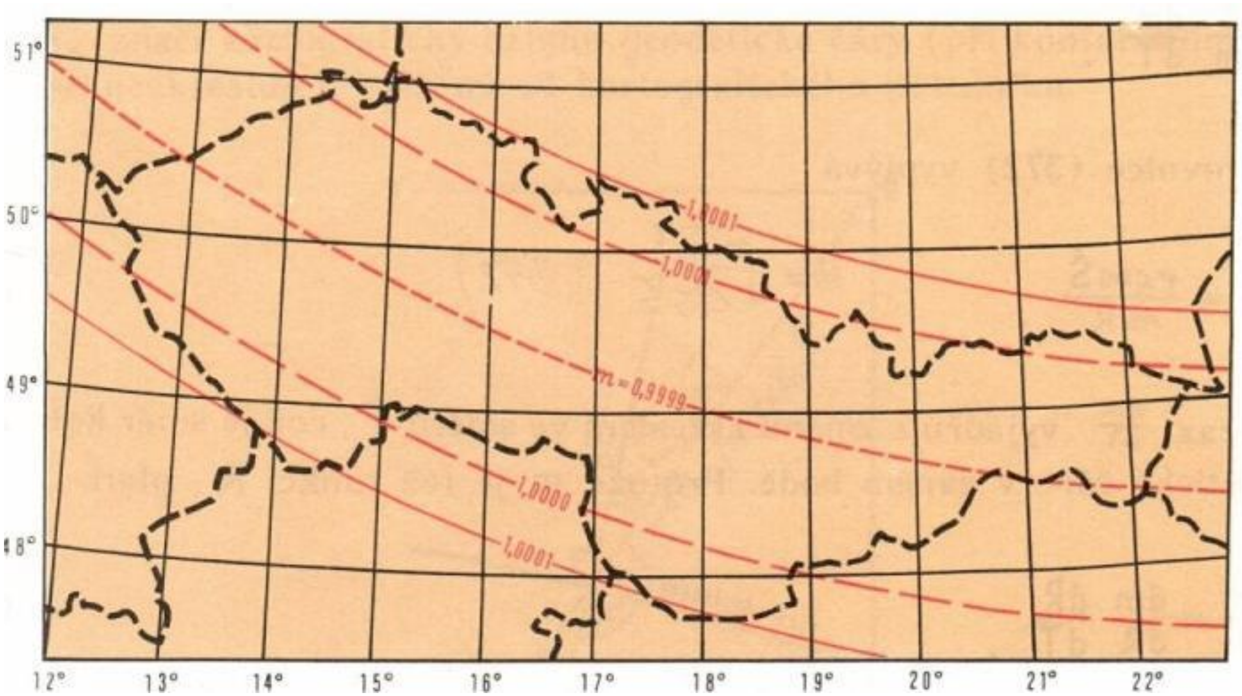
$$m = \frac{nR}{r \sin \check{S}}$$

Zákony zkreslení

Šikmé zobrazení, kartografické rovnoběžky a poledníky…

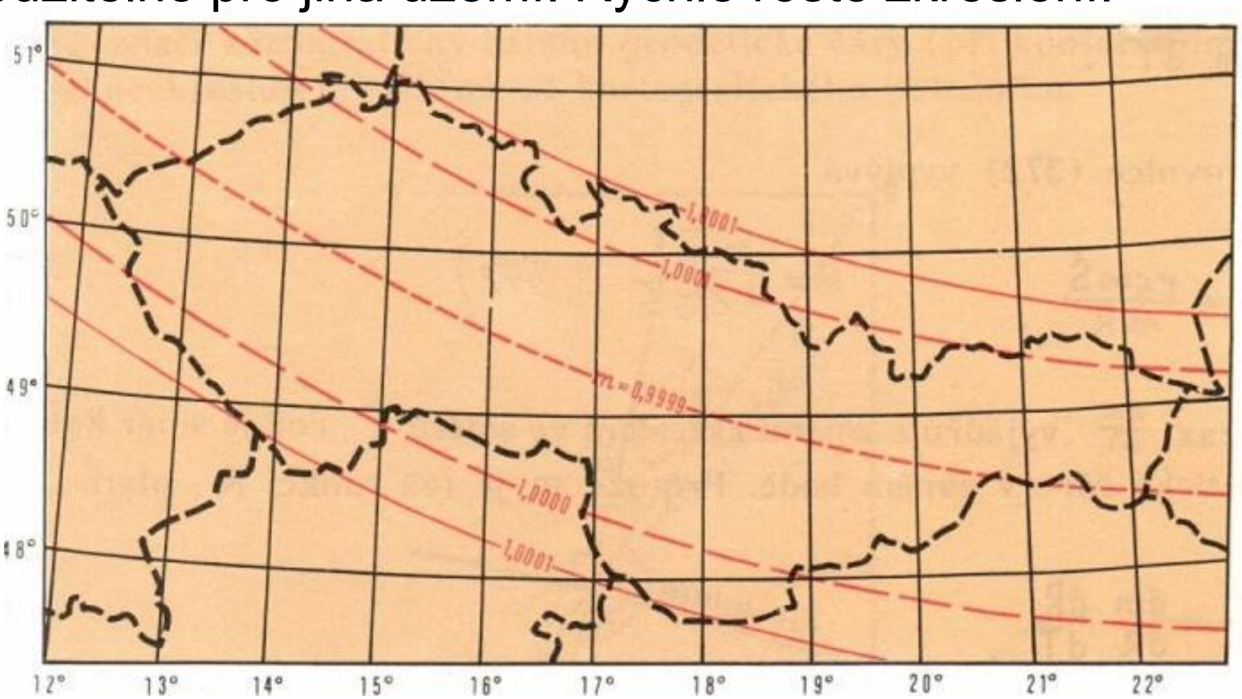
Jaký tvar mají zeměpisné poledníky a rovnoběžky?

- Složité křivky.
- Na území ČSR je však možné je nahradit přímkami a soustřednými kružnicemi.



Zákony zkreslení

- Nezkreslené rovnoběžky jsou vzdálené od základní rovnoběžky 89 km na sever a 91 km na jih.
- Základní kartografická rovnoběžka tedy není uprostřed mezi nimi.
- Ekvideformáty mají tvar kartografických rovnoběžek.
- Na základní kartografické rovnoběžce je zkreslení -10 cm/km, na severních a jižních výběžcích republiky je dosaženo hodnot 14 cm/km.
- Nepoužitelné pro jiná území. Rychle roste zkreslení.



Zákony zkreslení

Snaha minimalizovat délkové zkreslení:

- kužel v normální poloze: pás široký 3°20′, 400 km, zkreslení 40 cm/km
- kužel v obecné poloze: užší pás 2°30′, 280 km, zkreslení 24 cm/km
- použití multiplikační konstanty k=0,9999: snížení délkového zkreslení na 14 cm/km u okraje pásu, -10 cm/km na rovnoběžce $š_0$.