Kolektivní a kooperativní jevy – 1. sada příkladů

1. Landauova teorie pro feromagnet

S pomocí Landauovy teorie popište kritické chování anisotropního feromagnetu s tzv. magneticky měkkou osou, v němž může magnetizace zaujímat pouze dvě orientace – po směru osy z a proti směru osy z. V ose z dále působí magnetické pole B. Landauovu volnou energii zapíšeme ve tvaru mocninného rozvoje vhodného pro případy s malou magnetizací M

$$L(T,B,M)=\sum_{n=0}^{\infty} l_n(T,B)M^n \approx l_0(T,B)+l_1(T,B)M+l_2(T,B)M^2+l_3(T,B)M^3+l_4(T,B)M^4 \ .$$

Předpokládáme, že velikosti B a $T-T_c$ jsou malé (slabé pole, blízkost fázového přechodu), a máme proto

$$l_n(T,B)\approx a_n+b_nB+c_n(T-T_c) \ .$$

(a) Zjednodušte uvedený rozvoj do čtvrtého řádu s využitím symetrie $L(T,-B,-M)=L(T,B,M)$.
(b) Rozvažte, jaké podmínky musí splňovat zbylé koeficienty rozvoje, abychom při nulovém poli dostali řešení $M=0$ pro $T>T_c$ a $\pm M(T)$ při $T<T_c$.
(c) Zanedbáme koeficienty, které nehrají při fázovém přechodu významou roli. Dále určíme hodnotu koeficientu b_1 s využitím termodynamického vztahu $M=-\partial F/\partial B$. Výsledný tvar Landauovy volné energie

$$L(T,B,M)\approx -BM+c_2(T-T_c)M^2+a_4M^4$$

použijte k výpočtu následujících veličin

- magnetizace $M(T)$ při nulovém poli $B=0$
- susceptibility pro slabé pole $\chi=(\partial M/\partial B)_{B=0}$
- magnetizace na T_c vyvolané vnějším polem, $M(B)$ pro $T=T_c$
- specifického tepla $c=-T(\partial^2F/\partial T^2)_{B=0}$ v okolí fázového přechodu

2. Numerické řešení Grossovy-Pitaevského rovnice pro harmonickou past

Pro přibližný popis kondenzátu slabě interagujících atomů v pasti lze použít Grossovu-Pitaevského rovnici

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})+g|\phi(\boldsymbol{r})|^2\right]\phi(\boldsymbol{r})=\mu\,\phi(\boldsymbol{r}) \ ,$$

která byla odvozena zahrnutím kontaktní interakce $V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=g\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ na úrovni přiblížení středního pole. Interakční parametr g se obvykle vyjadřuje pomocí rozptylové délky a jako

$$g=\frac{4\pi\hbar^2a}{m} \ .$$

Vlnová funkce kondenzátu $\phi(\boldsymbol{r})$ splňuje normovací podmínku

$$\int|\phi(\boldsymbol{r})|^2\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=N \ ,$$

kde N je počet atomů v pasti a potenciál pasti V_{ext} nabývá pro izotropní harmonickou past tvaru

$$V_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}m\omega_{\mathrm{HO}}^2\boldsymbol{r}^2 \ .$$

Zavedeme charakteristickou délku $a_{\mathrm{HO}} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\mathrm{HO}}}$ a převedeme GP rovnici do bezrozměrných veličin $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{r}/a_{\mathrm{HO}}$, $\tilde{\phi} = \phi/\sqrt{Na_{\mathrm{HO}}^3}$, $\tilde{\mu} = \mu/\frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathrm{HO}}$:

$$\left[-\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^2 + \xi^2 + 8\pi\frac{Na}{a_{\mathrm{HO}}}\,|\tilde{\phi}(\boldsymbol{\xi})|^2\right]\tilde{\phi}(\boldsymbol{\xi}) = \tilde{\mu}\,\tilde{\phi}(\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{s normováním} \qquad \int|\tilde{\phi}(\boldsymbol{\xi})|^2\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{\xi} = 1\ .$$

Parametr $A = 8\pi(Na/a_{\mathrm{HO}})$ má význam poměru interakční energie odhadnuté jako $E_{\mathrm{int}} \propto gN(N/a_{\mathrm{HO}}^3)$ a kinetické energie neinteragujících bosonů odhadnuté jako $E_{\mathrm{kin}} \propto N\frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathrm{HO}}$. Řešení GP rovnice odpovídá vlnové funkci základního stavu a je tedy sféricky symetrické. Můžeme položit $\tilde{\phi}(\boldsymbol{\xi}) = u(\xi)/\xi$ a obdržet finální rovnici

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi^2 + A\,|\tilde{\phi}(\xi)|^2\right]u(\xi) = \tilde{\mu}\,u(\xi) \qquad \text{s okrajovými podmínkami} \quad u(0) = 0,\ u(\infty) = 0\ ,$$

jejíž řešení je třeba nalézt numericky. Vyřešte tuto rovnici pro parametr $Na/a_{\mathrm{HO}} = 0$, 1, 10 a 100 a graficky znázorněte odpovídající $\tilde{\phi}$ v závislosti na ξ.

3. Jednočásticová matice hustoty systému neinteragujících bosonů a fermionů

Vypočtěte jednočásticovou matici hustoty $\rho_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ danou vztahem

$$\rho_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \langle\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\psi}(\boldsymbol{r}')\rangle$$

pro systém volných neinteragujících bosonů s disperzní relací $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar^2k^2/2m$. Přitom uvažujte i o případu, kdy je přítomen kondenzát, a oddělte příspěvek s $\boldsymbol{k} = 0$. Získaný výraz bude obsahovat integrál, který není možno analyticky vyjádřit. Rozviňte proto $\mathrm{e}^{\beta\varepsilon_{\boldsymbol{k}}}$ pro malé $\boldsymbol{k}$ do druhého řádu v k a integrál spočtěte.

(a) Ukažte, že pro $T > T_c$ má jednočásticová matice hustoty přibližný tvar

$$\rho_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \sim \frac{\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/d}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\ ,$$

a určete korelační délku d. Tato korelační délka diverguje pro $T \to T_c$.

(b) Ukažte, že pro $T < T_c$ má jednočásticová matice hustoty přibližný tvar

$$\rho_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = n_0 + \frac{\mathrm{const.}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\ .$$

(c) Porovnejte chování jednočásticové matice hustoty systému neinteragujících bosonů s odpovídající veličinou pro systém neinteragujících fermionů.

4. Bogoliubovova transformace

Systém interagujících bosonů je popsán kvadratickým hamiltoniánem

$$\mathcal{H} = \sum_{\boldsymbol{k}}\left[A_{\boldsymbol{k}}\,a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}} - \frac{1}{2}B_{\boldsymbol{k}}\left(a_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger\right)\right]\ ,$$

kde $A_{\boldsymbol{k}}$ a $B_{\boldsymbol{k}}$ jsou reálná čísla, která splňují $A_{-\boldsymbol{k}} = A_{\boldsymbol{k}}$ a $B_{-\boldsymbol{k}} = B_{\boldsymbol{k}}$. Ukažte, že přechod k novým bosonovým operátorům $\alpha_{\boldsymbol{k}}$ daný předpisem $a_{\boldsymbol{k}} = u_{\boldsymbol{k}}\alpha_{\boldsymbol{k}} + v_{\boldsymbol{k}}\alpha_{-\boldsymbol{k}}^\dagger$ (Bogoliubovova transformace) převádí při vhodné volbě koeficientů $u_{\boldsymbol{k}}$, $v_{\boldsymbol{k}}$ hamiltonián na diagonální tvar

$$\mathcal{H} = \sum_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}}\,\alpha_{\boldsymbol{k}}^\dagger\alpha_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}(\omega_{\boldsymbol{k}} - A_{\boldsymbol{k}})\ .$$

Najděte explicitní vyjádření koeficientů $u_{\boldsymbol{k}}$, $v_{\boldsymbol{k}}$ a energií $\omega_{\boldsymbol{k}}$ elementárních excitací. Kromě splnění požadavku diagonálnosti výsledného hamiltoniánu je také třeba při transformaci zachovat bosonové komutační relace pro operátory $\alpha_{\boldsymbol{k}}$, $\alpha_{\boldsymbol{k}}^\dagger$.