



Astrofyzika I.

**Základní hvězdné charakteristiky,
určování vzdáleností**

Vladimír Štefl

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Astrofyzika

ukončení:

písemná zkouška - 4 úlohy průměrné obtížnosti , doba zpracování 1 hod.,

ústní zkouška - 1 otázka z tematických okruhů

Vanýsek, V.: Základy astronomie a astrofyziky. Academia, Praha 1980.

Štefl, V.: Vybrané kapitoly z astrofyziky. UJEP, Brno 1985.

Mikulášek, Z., Krtička, J.: Úvod do fyziky hvězd MU, Brno 2005.

Široký, J., Široká, M.: Základy astronomie v příkladech. SPN, Praha 1966.

Šolc, M., Švestka, J., Vanýsek, V.: Fyzika hvězd a vesmíru. SPN, Praha 1987.

www.physics.muni.cz/astroulohy/

cvičení: kalkulačka, fyzikální a astronomické konstanty, převody jednotek

PROČ vyučovat ASTRONOMII aneb úvodní motivace

- *studenti projevují zájem o astronomickou problematiku, často se s ní setkávají v denním tisku, v časopisech, na internetu, v televizi*
- *ne vždy jsou uváděné informace správné, ve výuce je třeba provádět jejich korekci*
- *astronomické poznatky jsou součástí znalostí středoškolsky vzdělaného člověka*

Tematické okruhy - Astrofyzika

Základní hvězdné charakteristiky a metody jejich určování

Metody určování vzdáleností

Povrchové teploty hvězd, Boltzmannova a Sahaova rovnice, spektrální klasifikace hvězd

Stavová interpretace H - R diagramu

Stavba nitra hvězd hlavní posloupnosti, hydrostatická a zářivá rovnováha, základní rovnice stavby hvězd

Zdroje energie hvězd. Vztah hmotnost - zářivý výkon, Russellův - Vogtův teorém

Vývojová interpretace H - R diagramu

Dvojhvězdy

Bílí trpaslíci, neutronové hvězdy, černé díry

Hvězdokupy a asociace

Stavební struktura Galaxie. Hvězdné populace, jejich znaky. Rotace Galaxie.

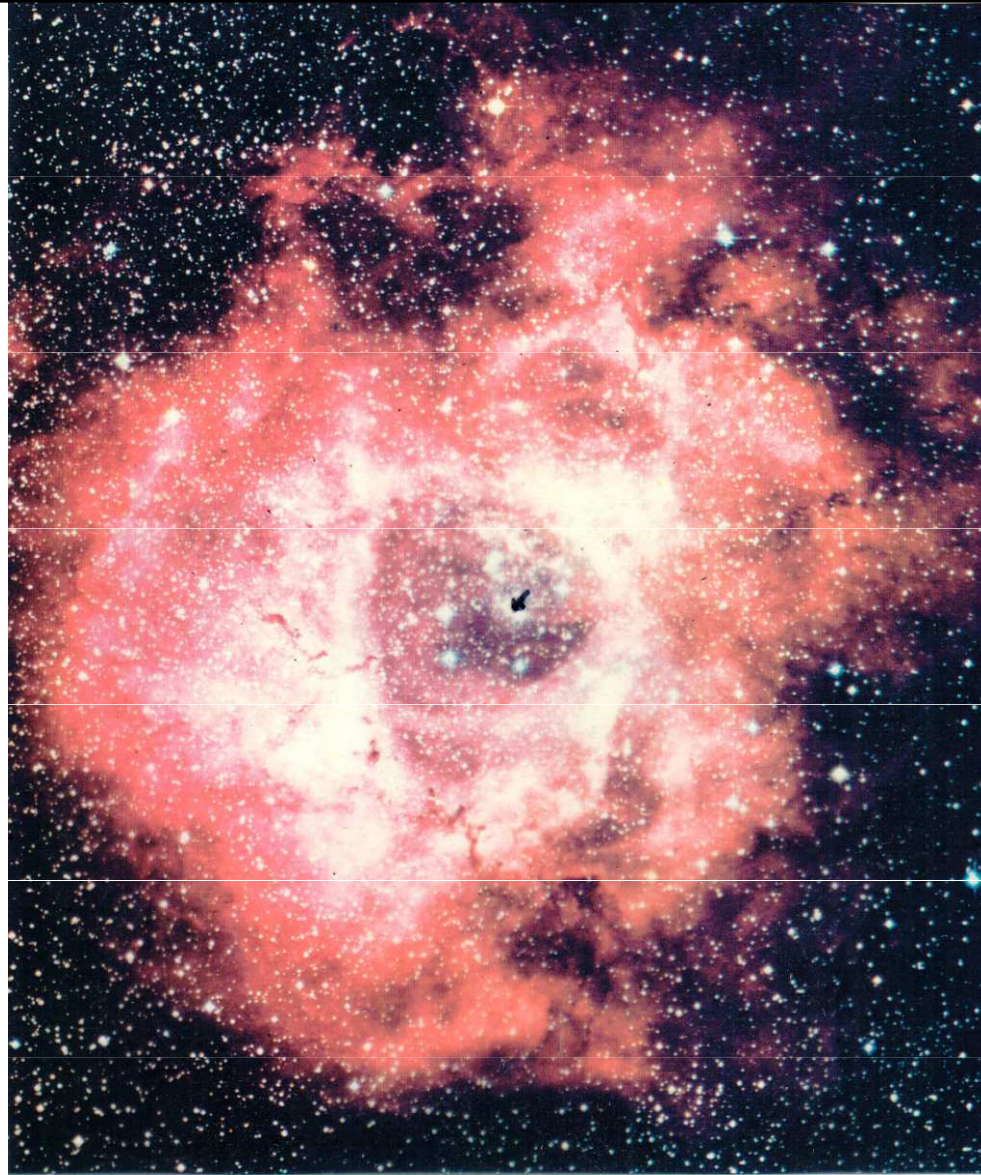
Oortovy konstanty

Vnější galaxie, jejich klasifikace, aktivita. Kosmologické modely vesmíru

Sluneční soustava, rozdělení planet, Země, Měsíc, kosmogonie

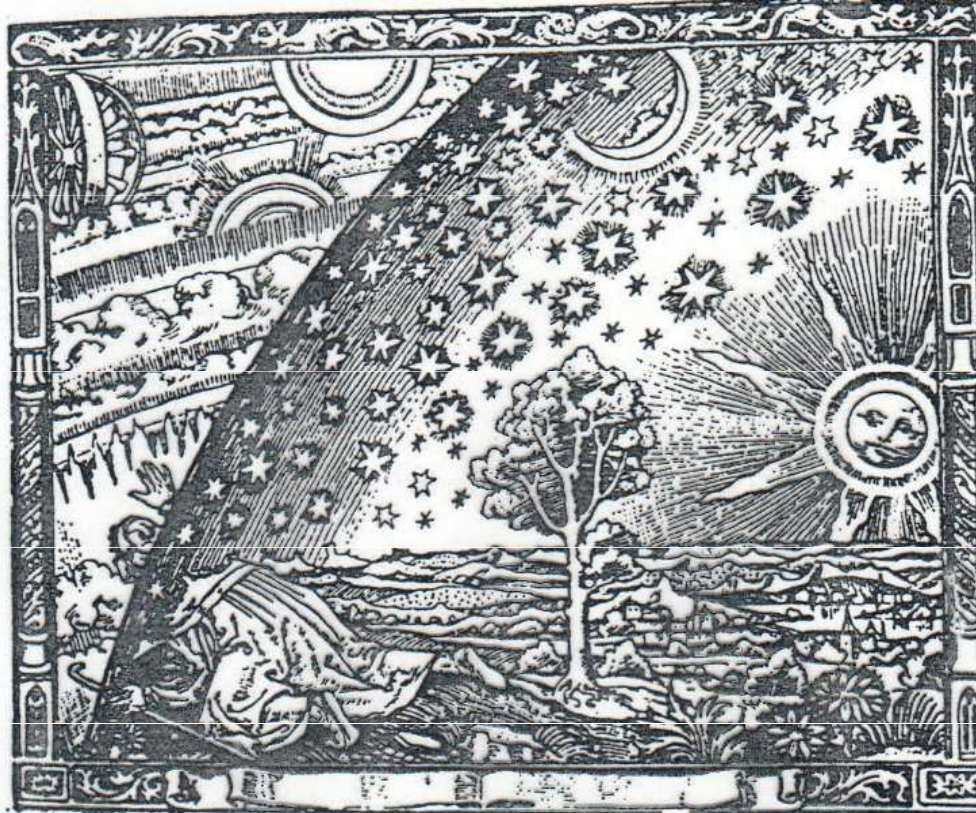
Pozorování, atmosférická refrakce, roční období, jejich obloha

mlhovina
Rozetta



$r = 3\ 300$ sv. r. l. y.
 $d = 60$ sv. r. $\theta = 1^\circ$
 ≈ 0.4 45 000 K nejduleňi křem
H II 10 000 K, 14 000 M_\odot
 $n = 10^6 - 10^7$ částic m^{-3}

Astrofyzika



Skeptic na kraji Země - rytina na dřevě z počátku 16. století pocházející z Německa. Stala se známou až později v 19. století, po převzetí do knihy „Historie nebe” Camilla Flammariona (1842 - 1925). Zachycuje nedůvěřivého a zvědavého člověka, který se snaží odhalit záhady hvězd a vesmíru. Právě pochybnosti byly v dějinách astronomie často motivem dalšího poznávání a pokroku.

Hvězdy - jejich vlastnosti - charakteristiky

pozorujeme asi 5 000 hvězd

jsou všechny stejné?

jaké mají vlastnosti – charakteristiky?

poloměr

hmotnost

teplota

zářivý výkon

spektrum

Základní hvězdné charakteristiky

Základní hvězdné charakteristiky a jejich význam pro vývoj hvězd

H. N. Russell (1877 - 1957)

„ Charakteristiky hvězd závisí na jednoduchých a nejpodstatnějších zákonech přírody a s našimi současnými znalostmi by mohly být dokonce předpovídány pouze na základě fyzikálních principů i kdybychom hvězdy vůbec nepozorovali “.

Hvězdy jsou tělesa zpravidla sférického tvaru, z nich vychází elektromagnetické záření i tok částic (tzv. korpuskulární záření). Jde o jediné zdroje informací o hvězdách, které studujeme jako kosmická tělesa vyznačující se geometrickými, fyzikálními a chemickými parametry, tzv. charakteristikami.

Základní hvězdné charakteristiky

Vnitřní

centrální teplota T_c

centrální tlak p_c

Vnější

hmotnost

M

poloměr R

chemické složení ChC

povrchová teplota T

spektrum Sp

zářivý výkon L

vzdálenost r

pozorovaná hvězdná velikost m

Hmotnost hvězd

Hvězdy jsou největší jednoduchá tělesa, reprezentují základní strukturální stavební jednotku ve vesmírné hierarchii. Jde o plazmatická kosmická tělesa, složená z 10^{56} - 10^{59} částic, především elektronů, protonů a jader hélia. Příkladně počet částic v Slunci je zachycen v tabulce:

- elektronů	$1,0 \cdot 10^{57}$	
- protonů	$8,2 \cdot 10^{56}$	
- jader hélia	$8,7 \cdot 10^{55}$	
- ostatních jader	$1,4 \cdot 10^{55}$	
- fotonů	$1,1 \cdot 10^{54}$	
celkem	$1,9 \cdot 10^{57}$	částic.

$$\langle W_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle W_p \rangle$$

$$N \frac{3}{2} k T = -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} \right)$$

$$\varrho = \text{konst.}$$

Viriálová věta

R. Clausius r. 1870:

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \right\rangle = 2 \langle W_k \rangle + \langle W_p \rangle$$

omezený prostor, periodický
pohyb, změna momentu
hybnosti $\rightarrow 0$.

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \right\rangle = 0$$

tzv. jednoduchý tvar, střední
časové hodnoty, částice hvězd,
hvězdy v hvězdokupách, galaxie
v kupách galaxií

$$\langle W_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle W_p \rangle$$

střední hodnota celkové
energie =

$$\langle W \rangle = \langle W_k \rangle + \langle W_p \rangle = \frac{1}{2} \langle W_p \rangle = -\langle W_k \rangle$$

centrální teplota

$$\left\langle \frac{3}{2} NkT_{sc} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{GM_S^2}{R_S} \right\rangle$$

Určování hmotnosti

a) III. Keplerův zákon v přesném tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2)$$

a ... a_j resp. AU $\frac{1}{3}$ adu
 T ... roky
 M ... M_\odot

$$\frac{a^3}{T^2} = M_1 + M_2$$

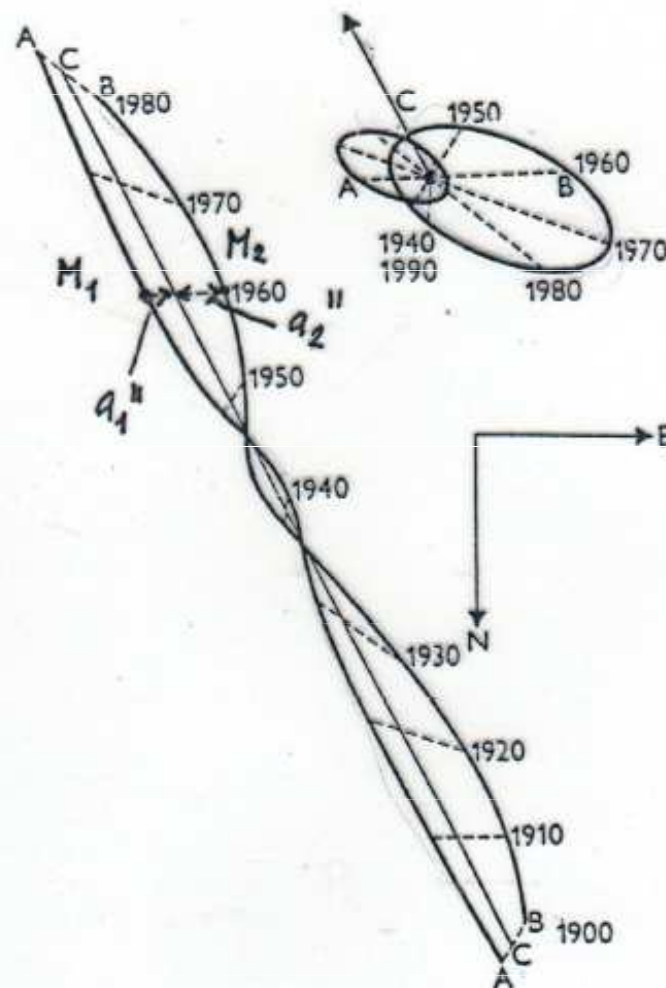
$$\frac{a^3}{\pi^3 T^2} = M_1 + M_2$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

III. Keplerův zákon v přesném tvaru - dvojhvězda Síríus

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1}, \quad a = a_1 + a_2, \quad a = \frac{a''}{\pi''}$$

roční paralaxa $\pi = \frac{1}{r}$ $\pi \dots''$, $r \dots pc$

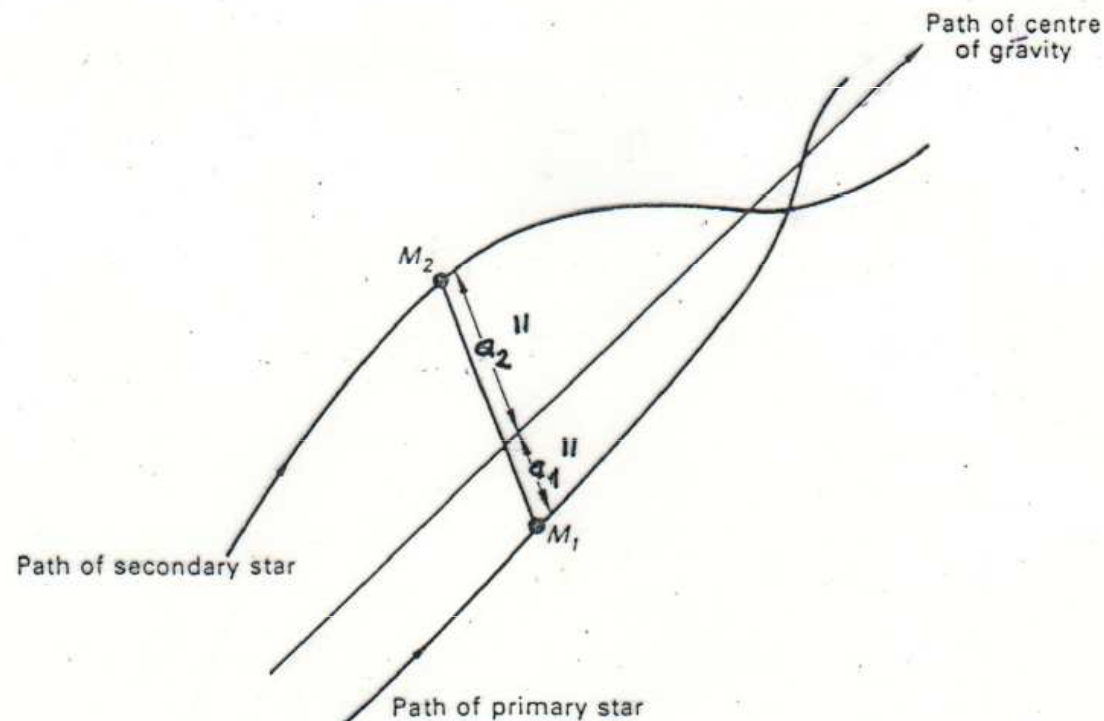


III. Keplerův zákon v přesném tvaru – cvičení

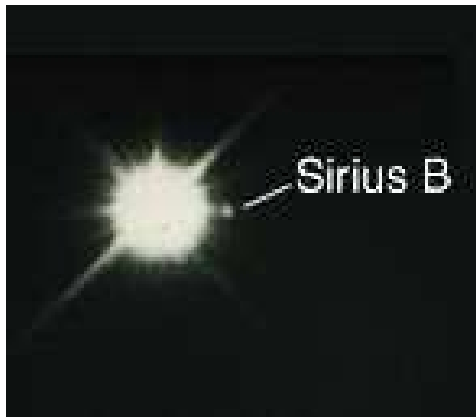
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2)$$

$$\frac{a^3}{T^2} = (M_1 + M_2)$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1}, \quad a = a_1 + a_2, \quad a = \frac{a''}{\pi''}$$



Fyzická dvojhvězda Sirius

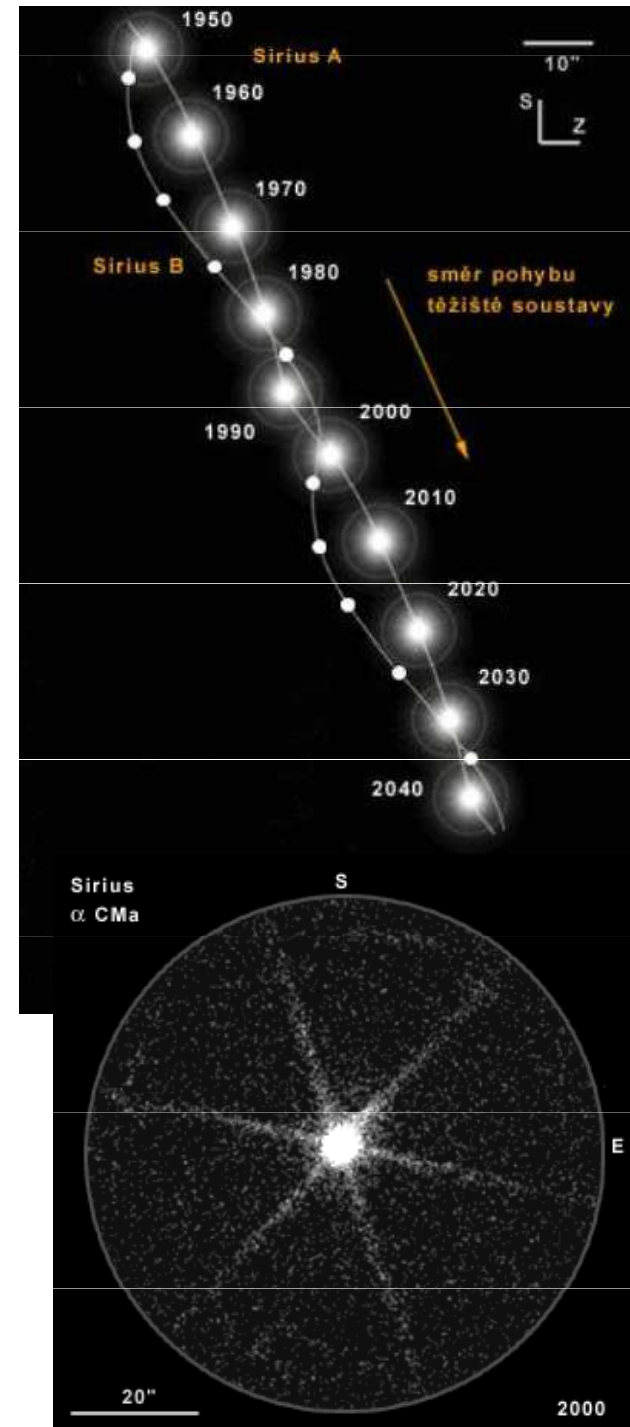


$$9 \cdot 10^{-3} R_S \approx 9 \cdot 10^{-1} R_Z$$

$$1 M_S$$

$$25\,200 \text{ K}$$

$$2 \cdot 10^{-3} L_S$$



III. Keplerův zákon v přesném tvaru - cvičení

III. Keplerův zákon

1. Stanovte hmotnost Jupiteru, je-li známo, že měsíc Io obíhá ve vzdálenosti 422 000 km a má oběžnou dobu 1,77 dne.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} (M_J + M_{Io})$$

2. Určete hmotnost Marsu, známe-li, že měsíc Phobos obíhá ve vzdálenosti 9 380 km a má oběžnou dobu 0,32 dne.

3. U dvojhvězdy byly stanoveny: paralaxa $\pi = 0,05''$ a velké poloosa pozorované dráhy $a'' = 2''$, oběžná doba složek 100 roků. Nalezněte hmotnosti jednotlivých složek, je-li známo, že se nacházejí od hmotného středu dvojhvězdy ve vzdálenostech, které jsou v poměru 4 : 1.

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2}$$

4. Stanovte vzdálenost dvojhvězdy, znáte-li oběžnou dobu složek 27 roků, hmotnosti $3 M_S$ a $5 M_S$ a hlavní poloosu pozorované dráhy $a'' = 0,45''$.

$$M_1 + M_2 = \left(\frac{a''}{\pi''}\right)^3 T^{-2} .$$

Cvičení – fyzikální konstanty

Planckova konst. $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

Rychlost světla ve vakuu $c = 2,99 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Gravitační konst. $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Boltzmannova konst. $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

Stefanova-Boltzmannova konst. $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Konstanta Wienova posunovacího zákona $b = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$

Plynová konstanta $\mathcal{R} = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Hmotnost elektronu $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Hmotnost protonu $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Hmotnost neutronu $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Atomová hmotnostní jednotka $u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Hubbleova konstanta $H = 75 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$

$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$

$1 \text{ Pa} = 10 \text{ dyn}\cdot\text{cm}^{-2}$

$m_H = 1,67352 \cdot 10^{-24} \text{ g}$

$\sigma_T = 6,6524 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^{-2}$

Cvičení - astronomické konstanty

Většina konstant je zaokrouhlena na 3 platná místa.

Základní charakteristiky Slunce:

Hmotnost M_{\odot}	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg
Poloměr R_{\odot}	$6,96 \cdot 10^8$ m
Zářivý výkon L_{\odot}	$3,86 \cdot 10^{26}$ W
M_{bol}	4,75 mag
m_{bol}	-26,85 mag
Solární konstanta K	$1,37 \cdot 10^3$ W · m ⁻²
Střední vzdálenost od Země AU	$1,496 \cdot 10^{11}$ m

$$1 \text{ pc} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

$$1 \text{ rad} = 206\,265''$$

$$1 \text{ rok} = 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$$

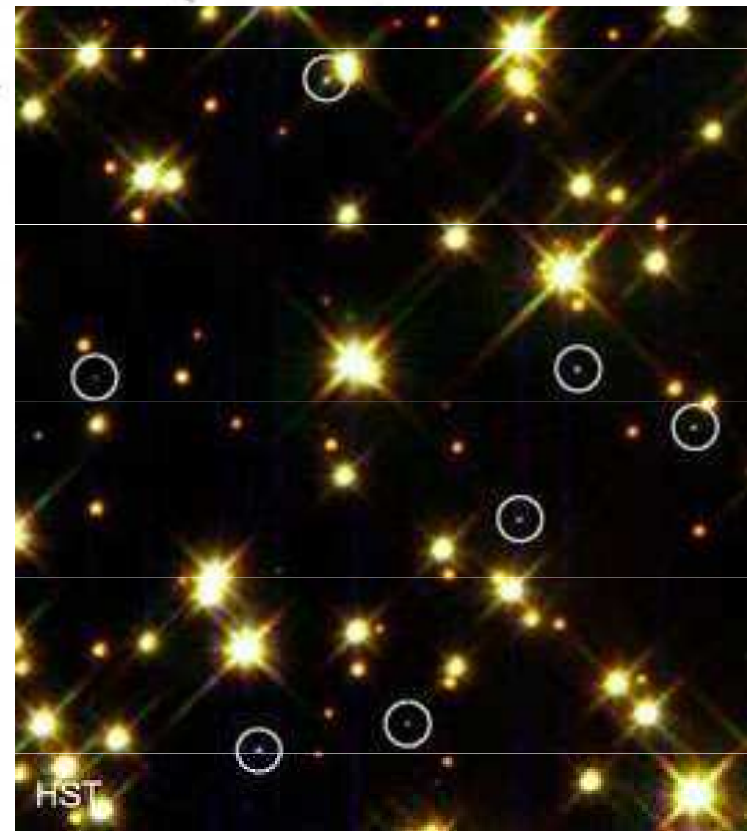
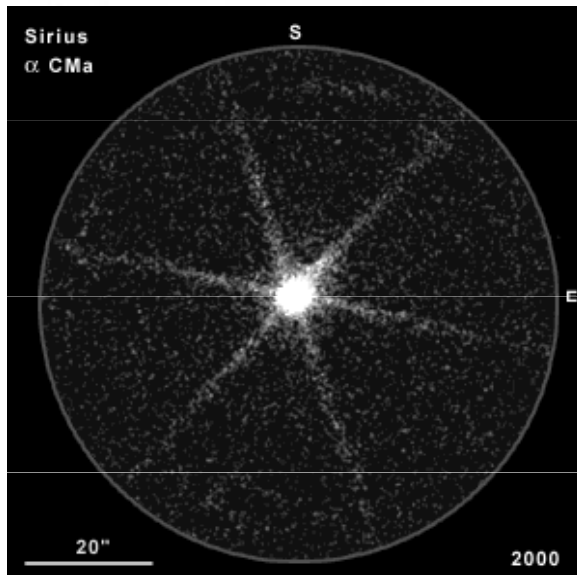
Určování hmotnosti - gravitační rudý posuv

b) Gravitační rudý posuv (bílé trpaslíci)

$$M = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \frac{c^2 R}{G}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx 10^{-4}, \text{ pro obor viditelného}$$

záření $\Delta\lambda \approx 10^{-11} \text{ m}$

Slunce - $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$



Určování poloměru hvězd

Poloměr R

Stefanův - Boltzmannův zákon $L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4$

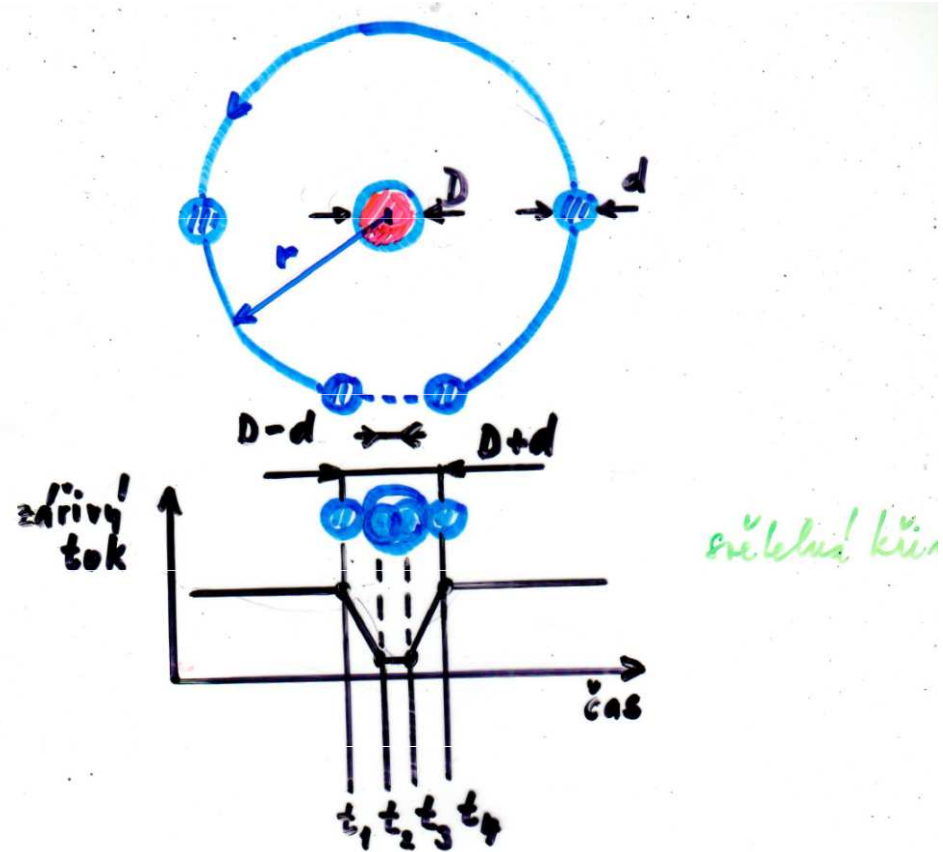
jiné metody

$$L = 4 \pi r^2 F_{bol}$$

Slunce - $7 \cdot 10^8$ m

$$R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_{ef}^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Určování poloměru hvězd - zákrytové dvojhvězdy



světelná křivka

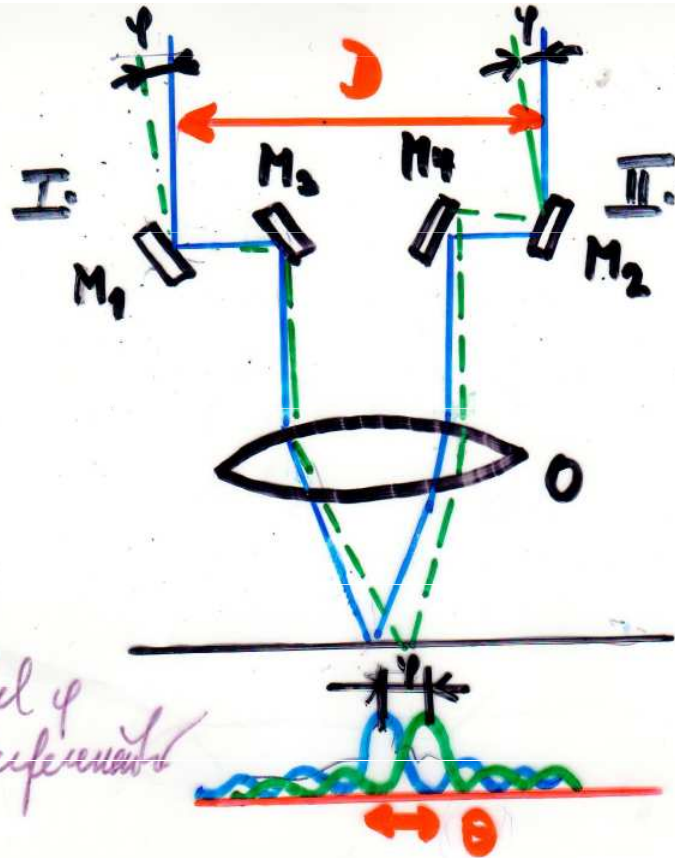
$$\frac{t_4 - t_1}{P} = \frac{D+d}{2\pi r}$$

$$\frac{t_3 - t_2}{P} = \frac{D-d}{2\pi r}$$

$\Rightarrow \frac{D}{r}, \frac{d}{r}$; v slavné spektroskopii

$$2\pi r = P \cdot v \quad r \dots \text{máme}$$

Určování poloměru hvězd – interferometricky



Mt. Wilson
 I, II. štěrbin
 fázový
 interferometr
 λ ... konst. - filtry

stejný úhel φ
 max interferenční
 brna

prvky vyviné
 zde je rovněž
 jasné při!

úhlová vzdálenost $\Theta = \frac{\lambda}{2D}$

max. a min.

max. vzd. Θ ; $\varphi = \Theta = \frac{\lambda}{2D}$ nejmenší vzdálenost

vzdálenost $\lambda, D \rightarrow \varphi$; $2R = 1,22 \frac{\lambda}{D_{min}}$

Poloměry hvězd - typické

Typ hvězdy	Rozměr
Veleobří	až $500 R_{\text{Slunce}}$
Obří	až $80 R_{\text{Slunce}}$
Hlavní posloupnost	0,5 až $20 R_{\text{Slunce}}$
Bílí trpaslíci	1000 až 10 000 km
Neutronové hvězdy	10 až 100 km



Hustota:

Veleobr	Slunce	Bílý trpaslík	Neutronová hvězda
10^{-6} g/cm^3	$1,4 \text{ g/cm}^3$	10^6 g/cm^3	10^{14} g/cm^3

Charakteristiky hvězd, hvězda LBV 1806-20

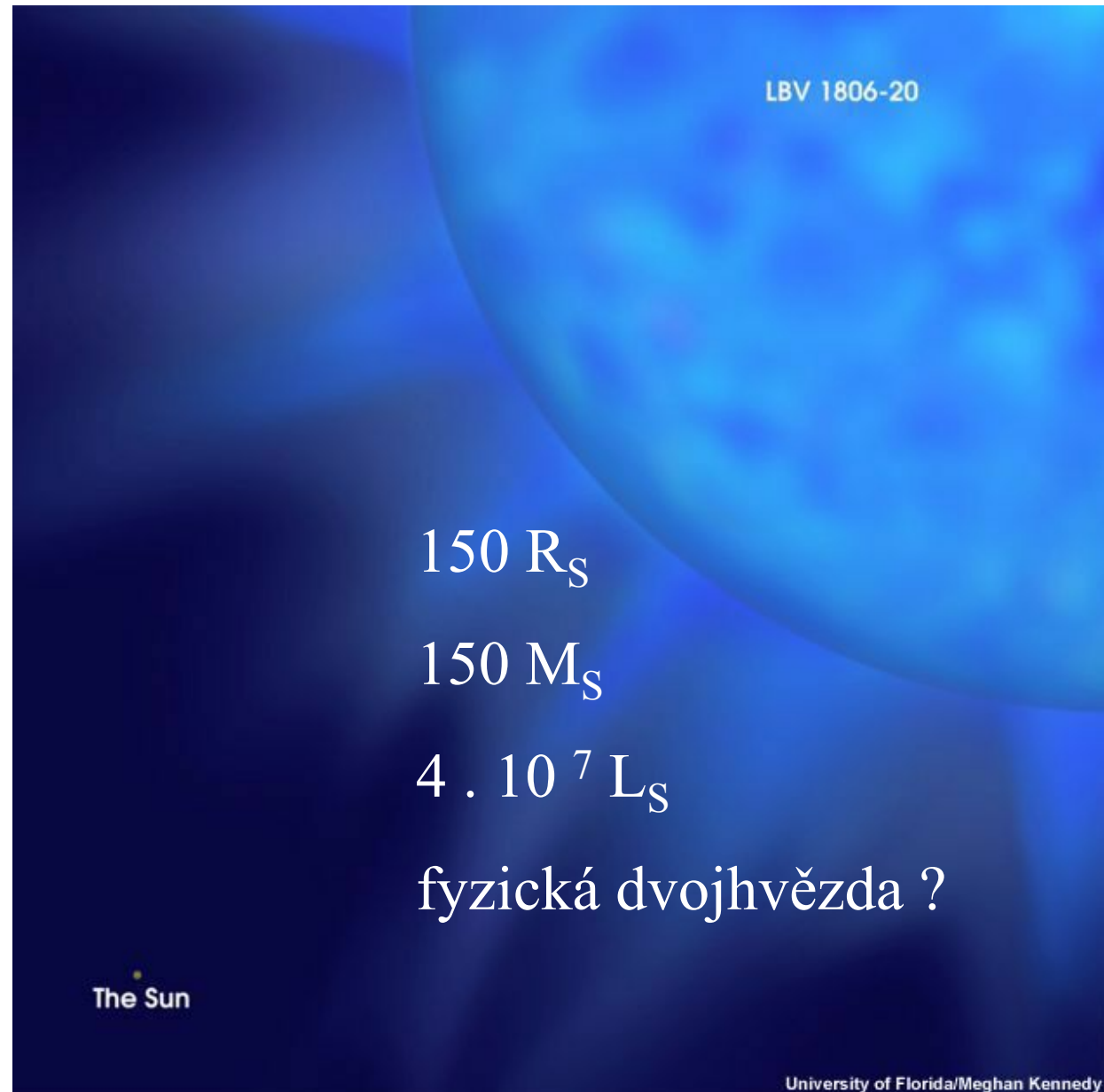
Slunce:

$$R_S \quad 7 \cdot 10^8 \text{ m}$$

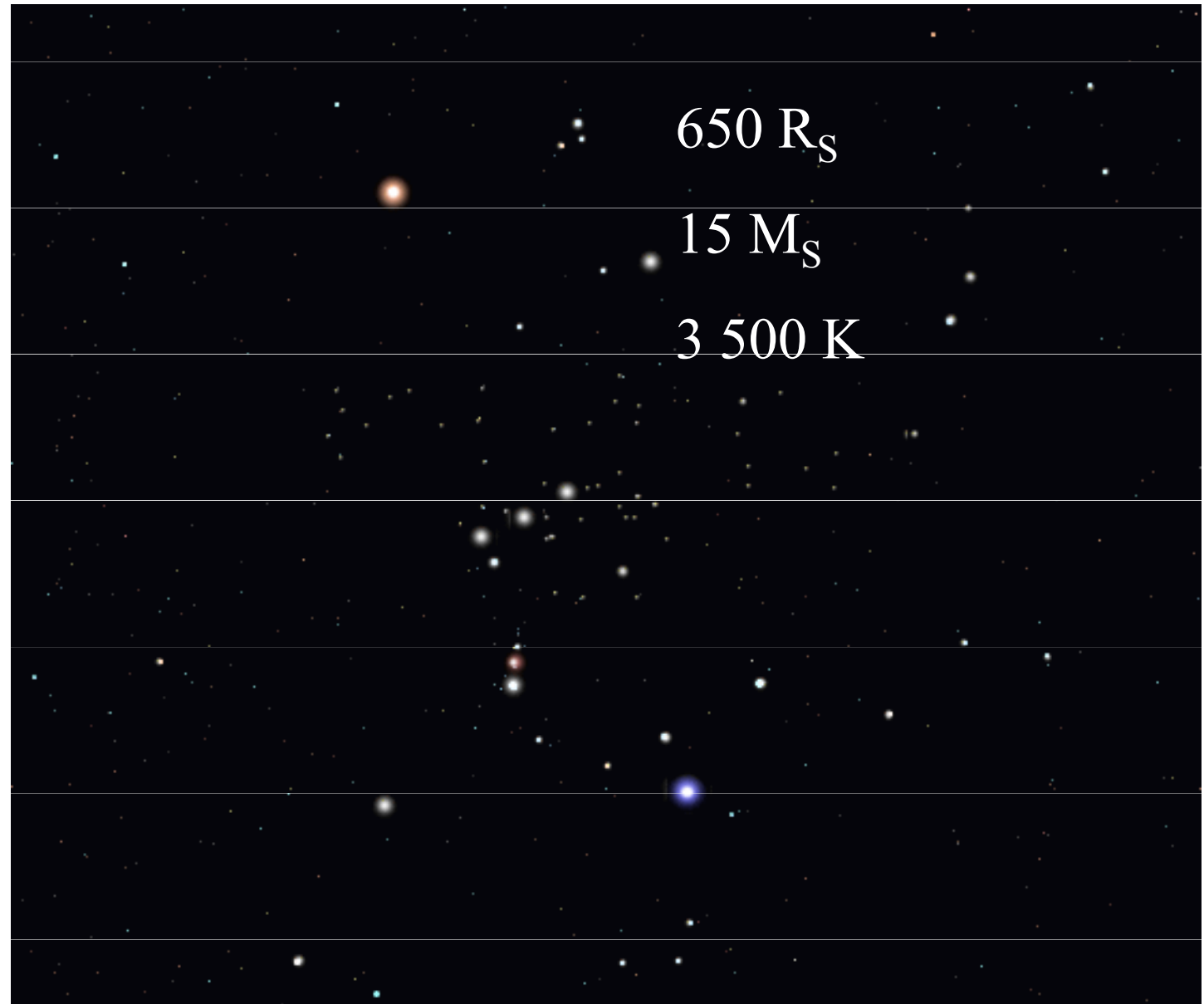
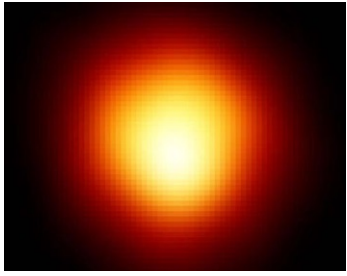
$$M_S \quad 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$T_S \quad 5\,780 \text{ K}$$

$$L_S \quad 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$$



Betelgeuse – červený veleobr



Chemické složení ChC

procentuální hmotnostní zastoupení jednotlivých prvků
v hvězdách

Slunce vodík 71,6 %, helium 27 %, ostatní tzv. těžké prvky 1,4 %
jednotlivých prvků je názornější - na každý milion atomů
vodíku připadá 63 tisíc atomů helia, 690 atomů kyslíku, 420
atomů uhlíku, 87 atomů dusíku, 45 atomů křemíku atd.
Prakticky u všech hvězd je chemické složení přibližně stejné.

Zářivý výkon L

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

u Slunce ze solární konstanty

$$\log L = \log 4 \pi \sigma + 2 \log R + 4 \log T_{ef}$$

měření toku záření u blízkých hvězd, u vzdálenějších
spektroskopicky

Slunce - $3,8 \cdot 10^{26}$ W

$$L = 4 \pi r^2 K$$

$$L = 4 \pi r^2 F_{bol}$$

Povrchové teploty hvězd

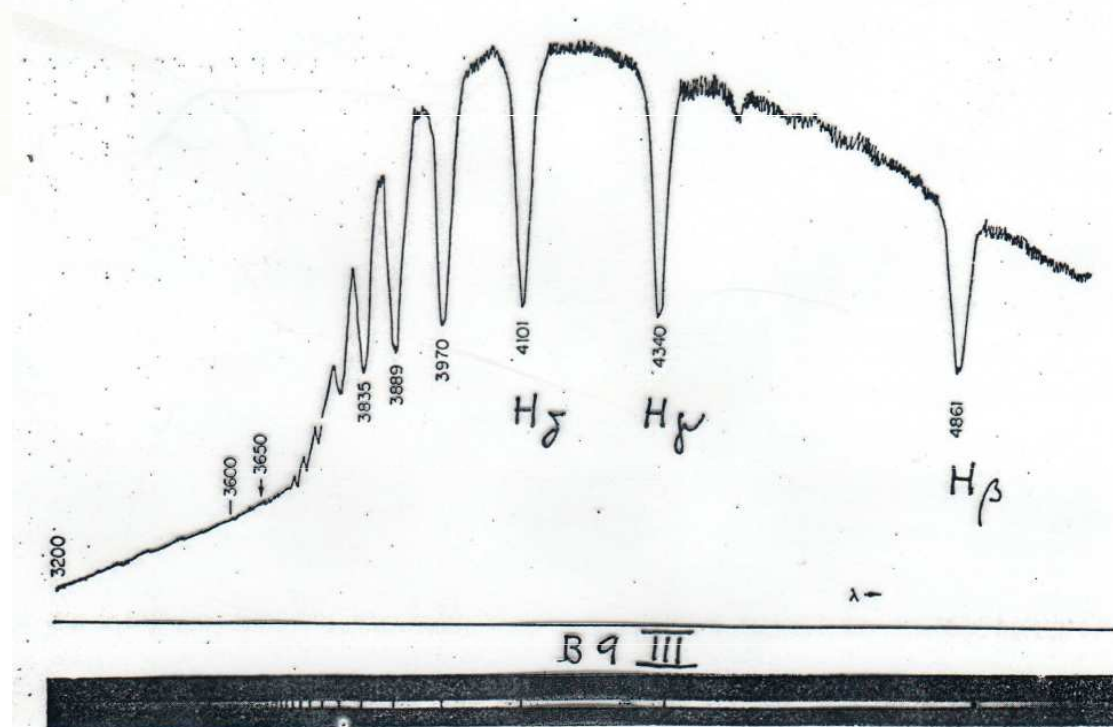
aplikace zákonů záření, Wienova, Planckova, Stefanova-Boltzmannova zákona, pouze **první aproximace**, průběh spojitého spektra narušen čarami, fotoionizačními skoky...

Povrchová teplota T

souvislost zabarvení hvězd s jejich povrchovými teplotami

efektivní povrchová teplota

Slunce - 5 780 K



Určování barevné teploty - Wienův vyzařovací zákon

$$I(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$$

podobný Wienův zákon při λT malém

$$I(\lambda, T) = C_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$$

máme poměr intenzit světla

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 e^{\left[-\frac{C_2}{T_b} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right]}$$

$$\Rightarrow T_b = \frac{-C_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)}{\ln \frac{I_1}{I_2} + 5 \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

máme světlo bílé pro světlo čisté spektrum
pomocí filtrů! kde:

$$\lambda_1 = 470 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 590 \text{ nm}$$

$$\Rightarrow T_b = 6500 \text{ K}$$

Aplikace Planckova zákona, určování efektivní teploty ze Stefanova-Boltzmannova z.

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

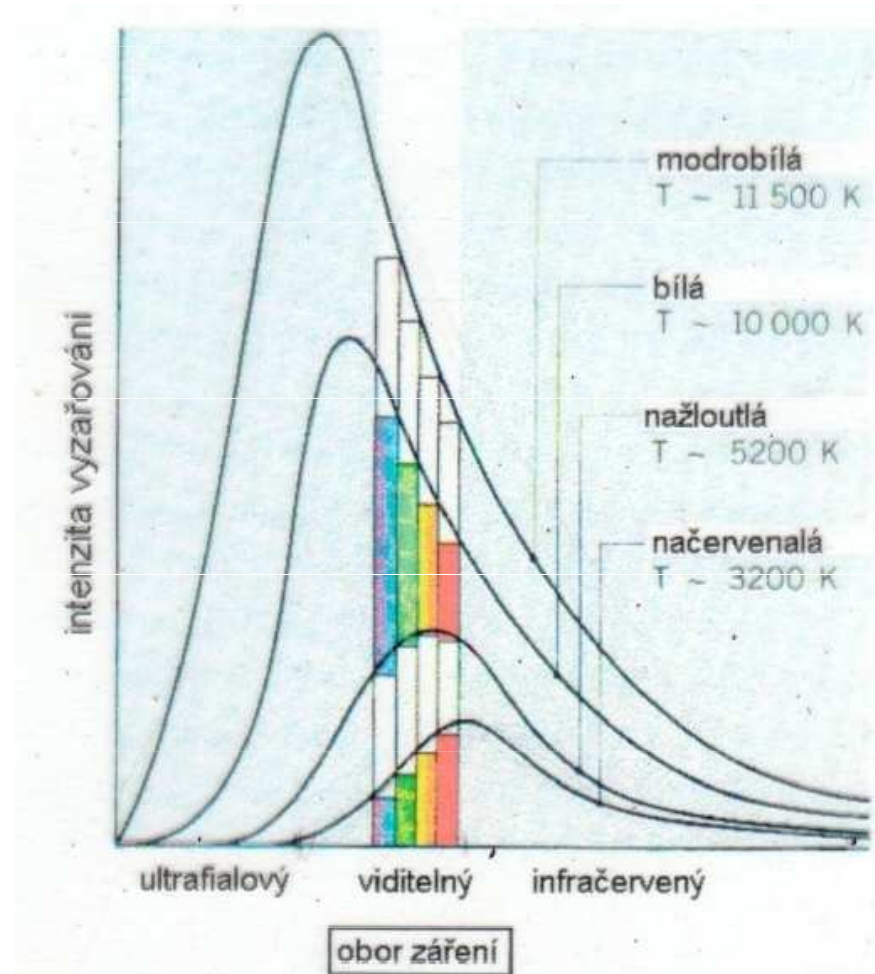
Stefanův- Boltzmannův zákon

$$B(T) = \sigma T_{ef}^4 \quad L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

záření vychází z různých hloubek atmosféry, z **různých teplot**, proto zavádíme **efektivní teplotu**

$$T_{ef} = \left(\frac{L}{4\pi\sigma R^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Určování teploty - Wienův posunovací zákon



$$\lambda_m T = b$$

Určování excitační teploty - Boltzmannova rovnice

Boltzmannova rovnice

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} e^{-\frac{E_b - E_a}{kT}}$$

g_b, g_a statistické váhy stavů

pro vodík $g_n = 2n^2$, $n \dots$ hlavní kvantové číslo

u sloučených atomů $g = 2j + 1$ $j \dots$ kvantové číslo celkového momentu hybnosti

$T \dots$ excitační teplota, $E_b, E_a \dots$ excitační potenciály

$$\log \frac{N_b}{N_a} = - \frac{5040}{T} \chi_{ab} + \log \frac{g_b}{g_a}$$

$$\chi_{ab} = E_b - E_a$$

$$\log \frac{N_b}{N_a} = - \frac{5040}{T} \chi_{ab}$$

zjednodušený tvar, g_b, g_a reálná čísla jedné řady

stejná excitační rovnice

Boltzmannova rovnice

graf zachycuje nárůst N_2 obsazení druhé hladiny, přesněji poměr N_2 ku celkovému počtu atomů $N_2 + N_1$ s rostoucí teplotou, $N_2 = N_1$ při teplotě až 85 400 K, proč **pozorujeme maximální intenzitu čar Balmerovy série při teplotách 9 900 K**? Odpověď poskytuje Saha rovnice.

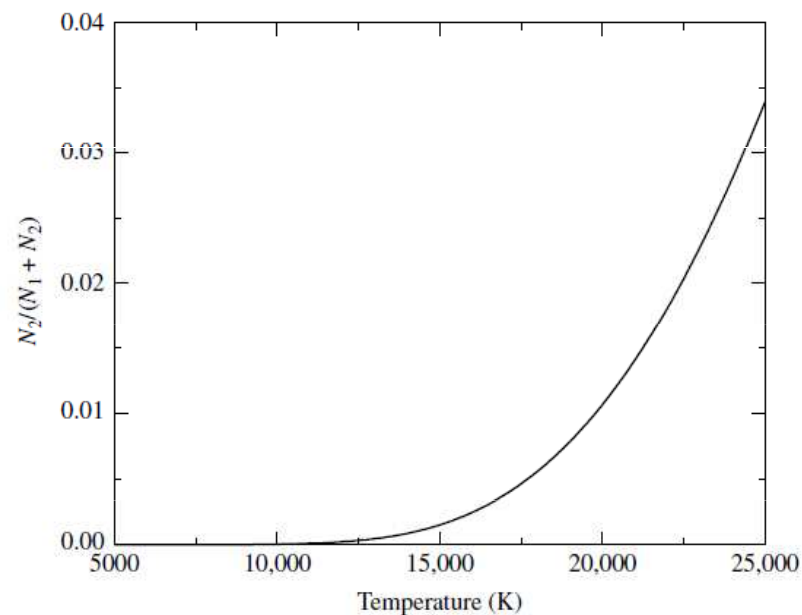
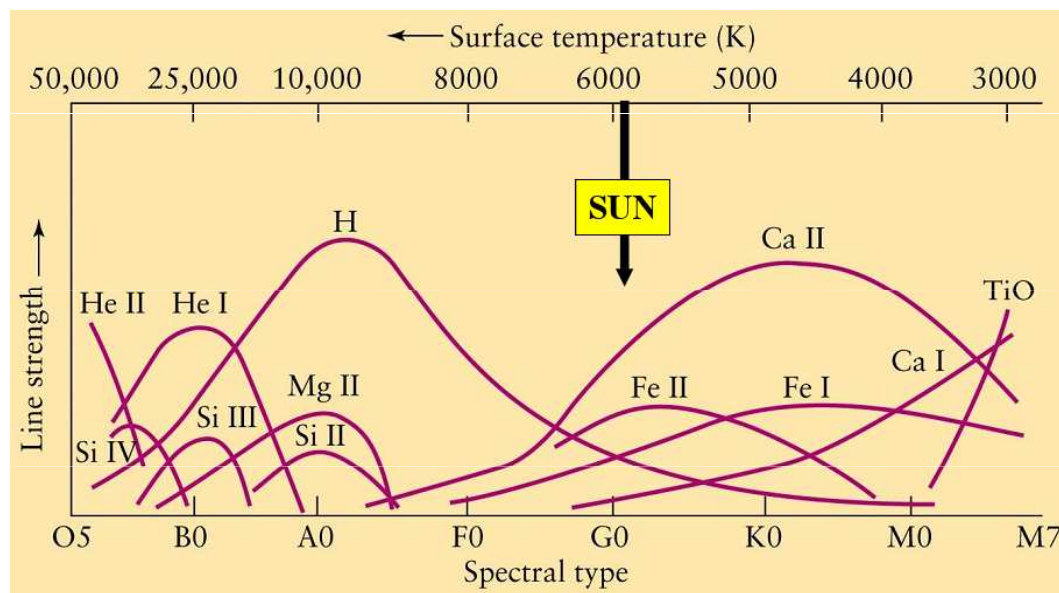


FIGURE 7 $N_2/(N_1 + N_2)$ for the hydrogen atom obtained via the Boltzmann equation.

Určování ionizační teploty - Saha rovnice

Saha rovnice

stav ionizační rovnováhy

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \text{konst.} \frac{(kT)^{3/2}}{N_e} e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

E_i ... ionizační potenciál, T ... ionizační teplota

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2 Z_{i+1}}{N_e z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

z_i je tzv. partiční funkce pro příslušný stupeň ionizace,
 2 ... dvě možnosti spinu volného elektronu

$$\log \frac{N_{i+1}}{N_i} = 1,5 \log T - \frac{5040}{T} E_i - \log N_e$$

+ na první straně zpravidla nějaká konst.

Sahova rovnice

graf zachycuje nárůst počtu ionizovaných atomů N_{II} , přesněji poměr N_{II} ku celkovému počtu atomů N_{total} při zvětšování teploty, 50 % při 9 600 K

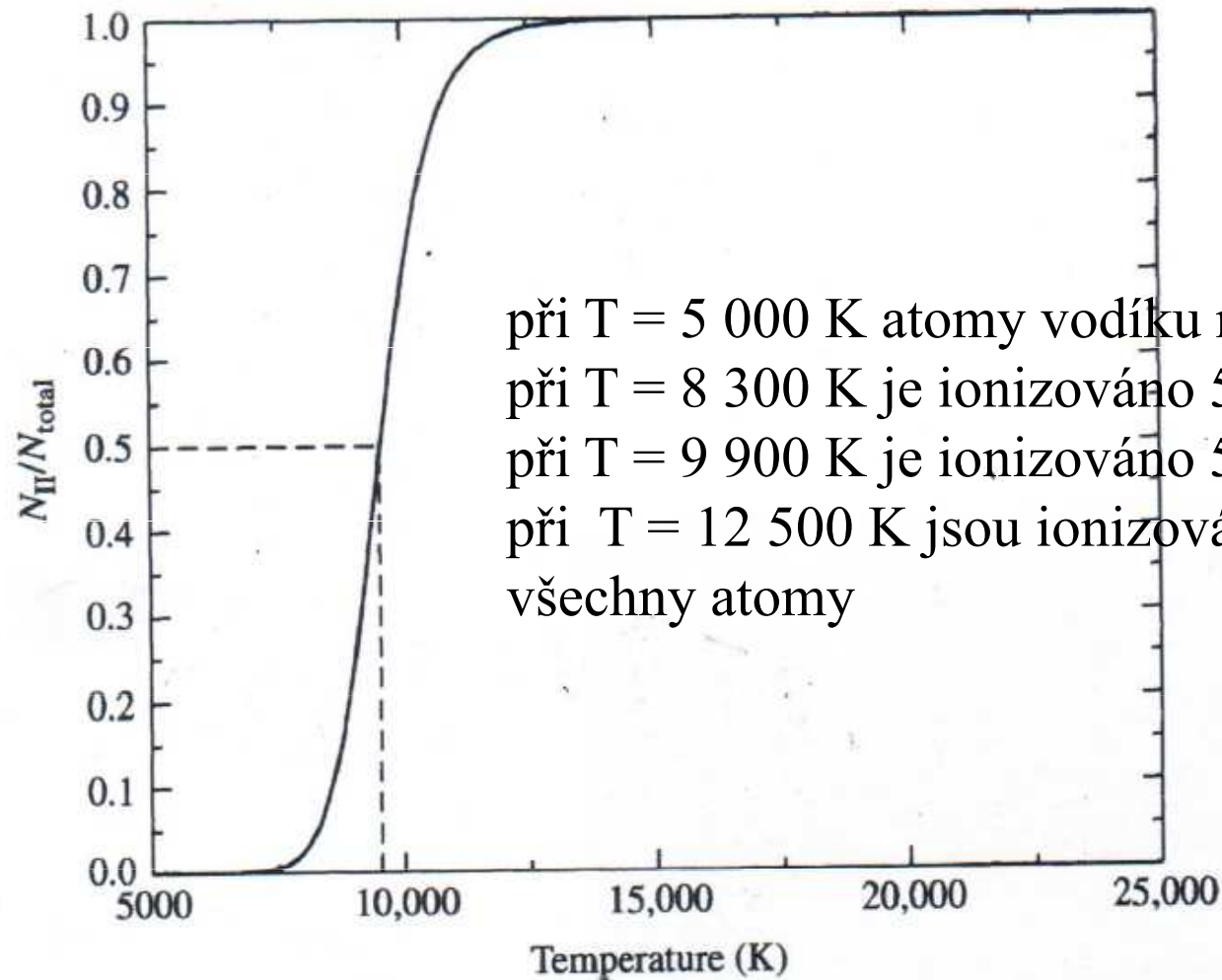


FIGURE 8.8 N_{II}/N_{total} for hydrogen from the Saha equation when $P_e = 20 \text{ N m}^{-2}$. Fifty percent ionization occurs at $T \simeq 9600$ K.

Kombinovaná rovnice excitačně - ionizační

Kombinovaná Boltzmannova-Saha rovnice

$$\frac{N_i}{N_{0,r}} P_e = \frac{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} \frac{2B_i(T)}{g_{0,r}} e^{-\frac{E_i - E_r}{kT}}$$

$$\log \frac{N_i}{N_{0,r}} = -\frac{5040}{T} (E_i - E_r) + 2.5 \log T - 0.48 + \log \frac{2B_i(T)}{g_{0,r}} - \log P_e$$

Kombinovaná Boltzmannova-Sahova rovnice

graf zachycuje závislost poměru obsazení druhé hladiny N_2 obsazení druhé hladiny ku celkovému počtu atomů N_{total} na teplotě, maximum při 9 900 K

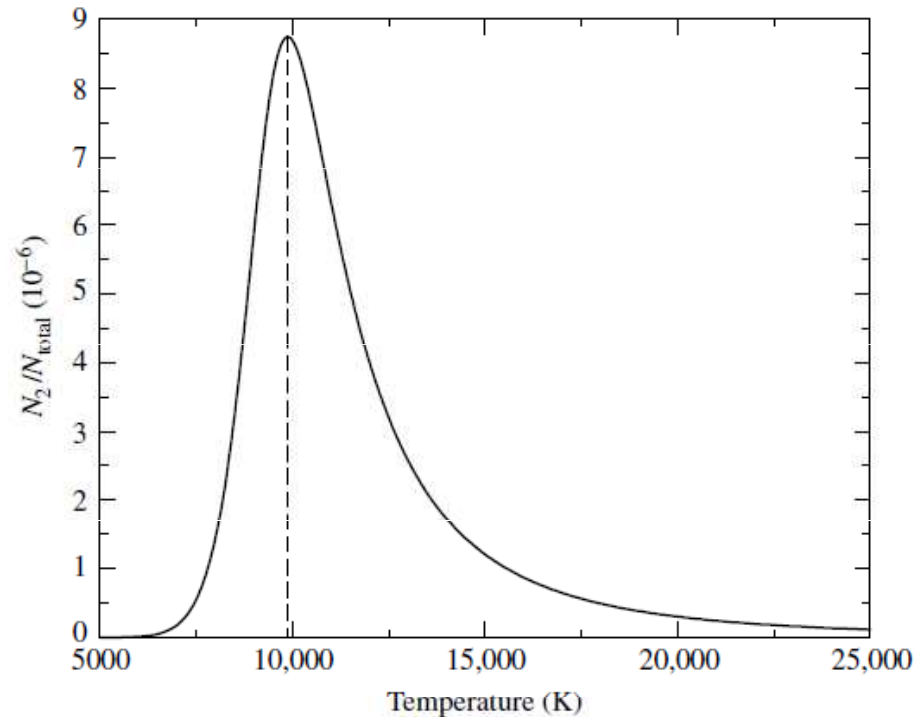


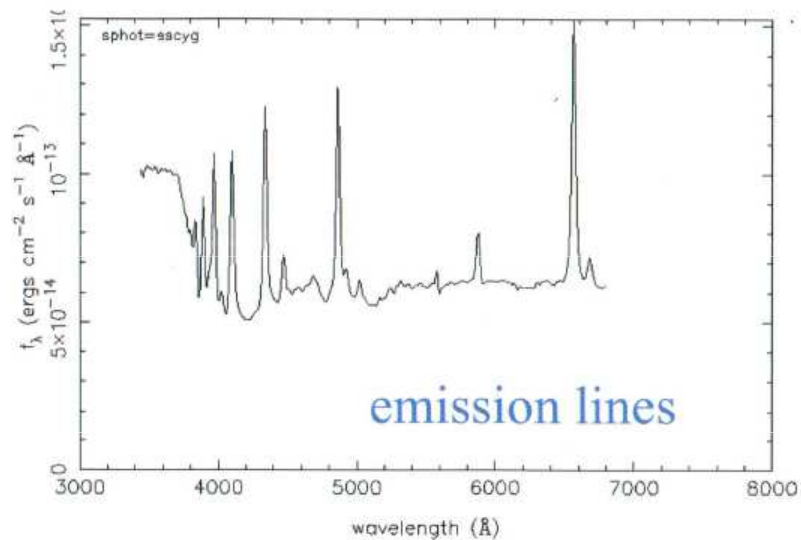
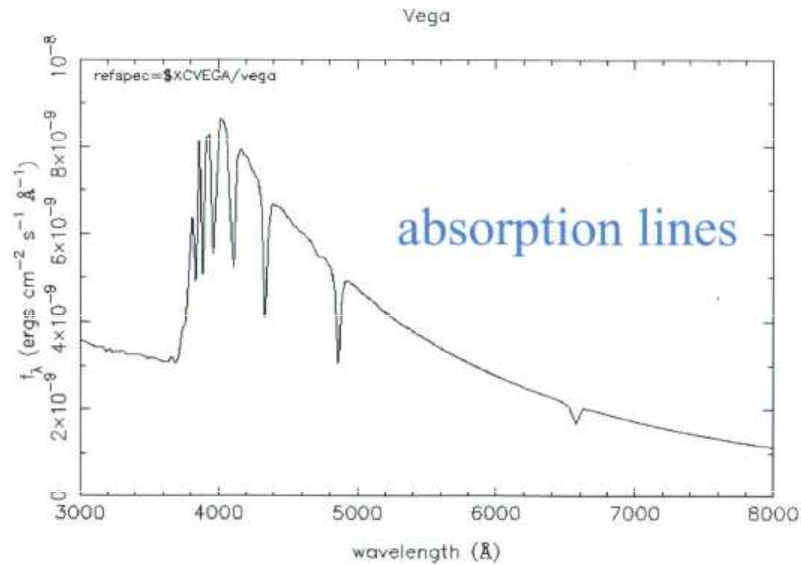
FIGURE 9 N_2/N_{total} for hydrogen from the Boltzmann and Saha equations, assuming $P_e = 20 \text{ N m}^{-2}$. The peak occurs at approximately 9900 K.

intenzita čar Balmerovy série závisí na velikosti zlomku N_2/N_{total} - na počtu všech vodíkových atomů, které jsou na druhé energetické hladině, při teplotách nad 9 900 K narůstá výrazně ionizace

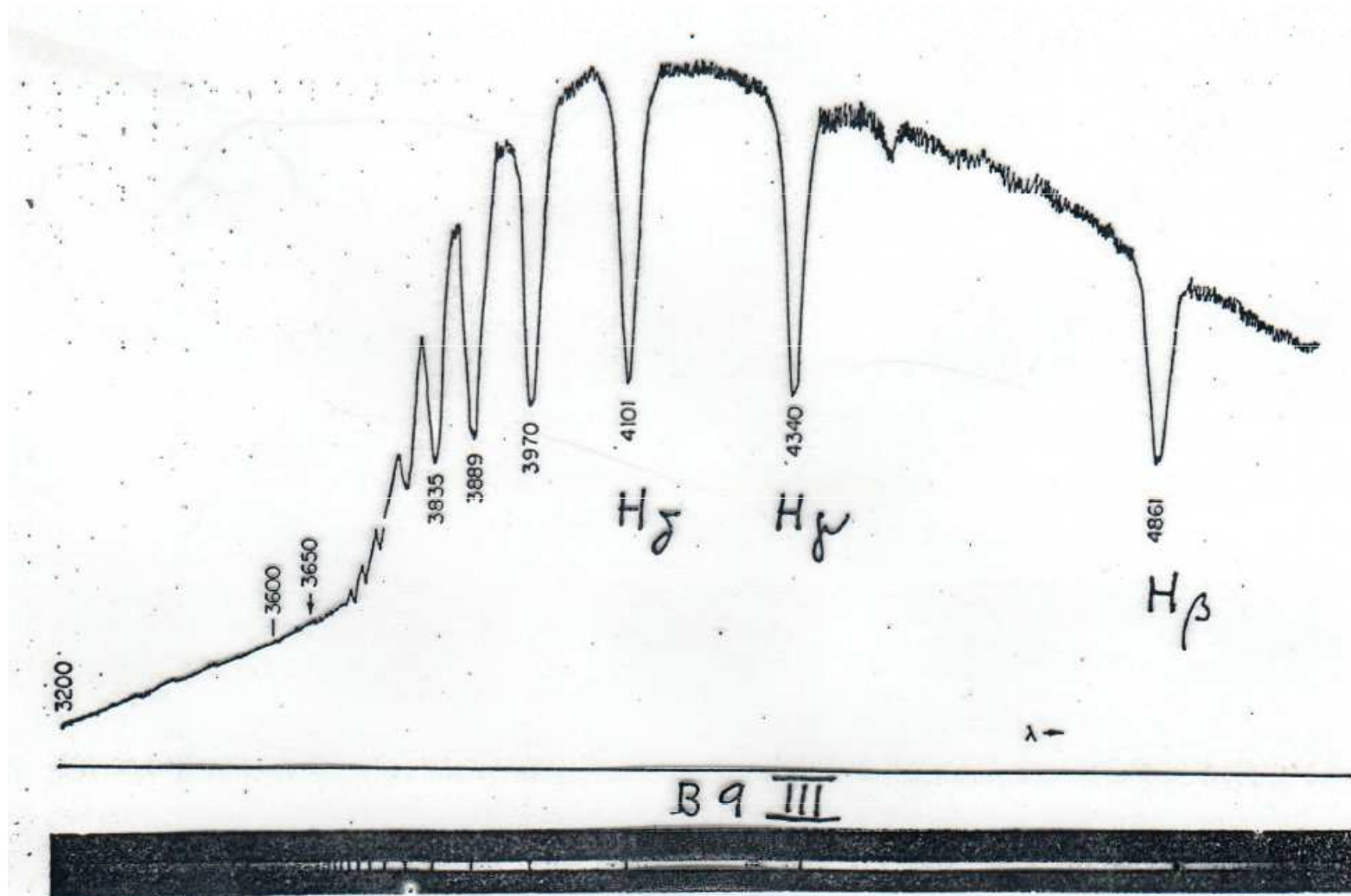
Spektra hvězd

spojitá spektra hvězd

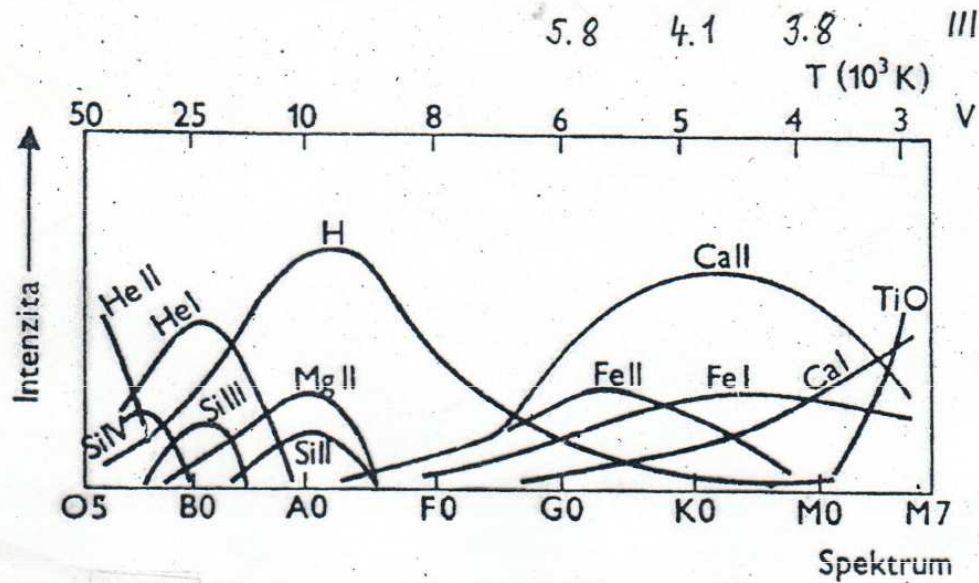
absorpční čárová spektra



Spektra hvězd – spojité a čárové spektrum

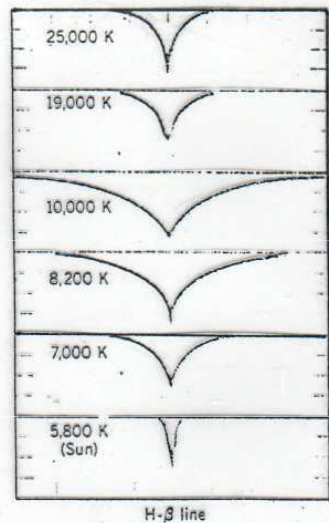


Závislost intenzity spektrálních čar na teplotě



Průběh intenzity čar různých prvků v závislosti na teplotě

- změna profilu spektrální čáry $H\beta$ s teplotou



Line strength

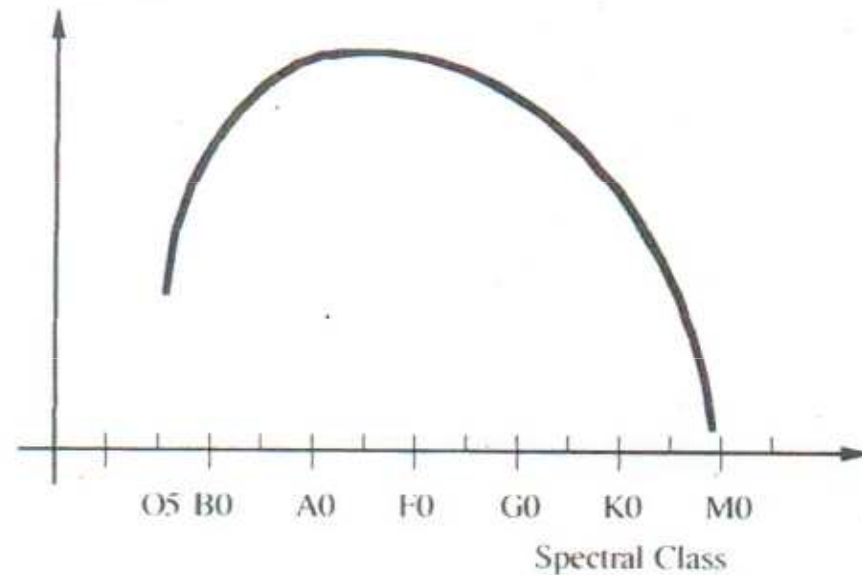
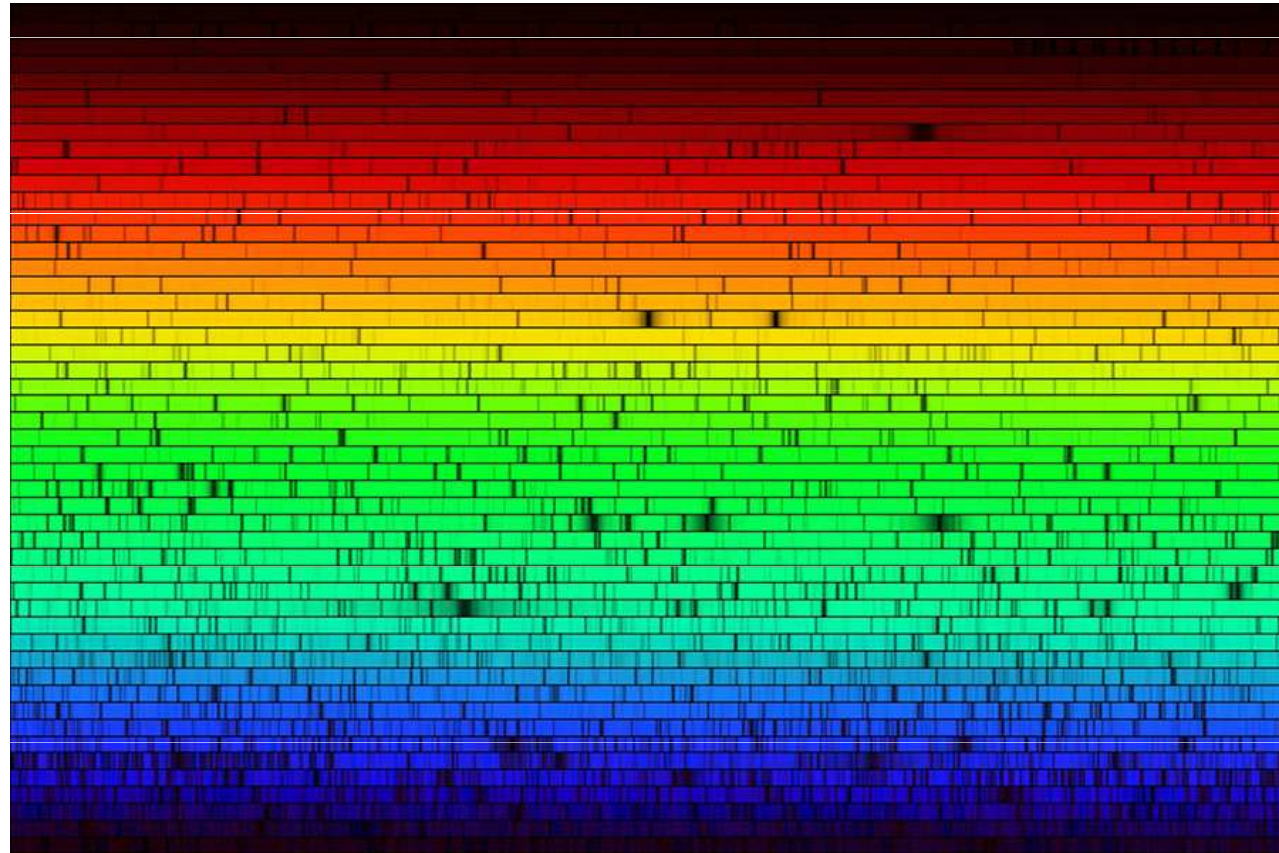
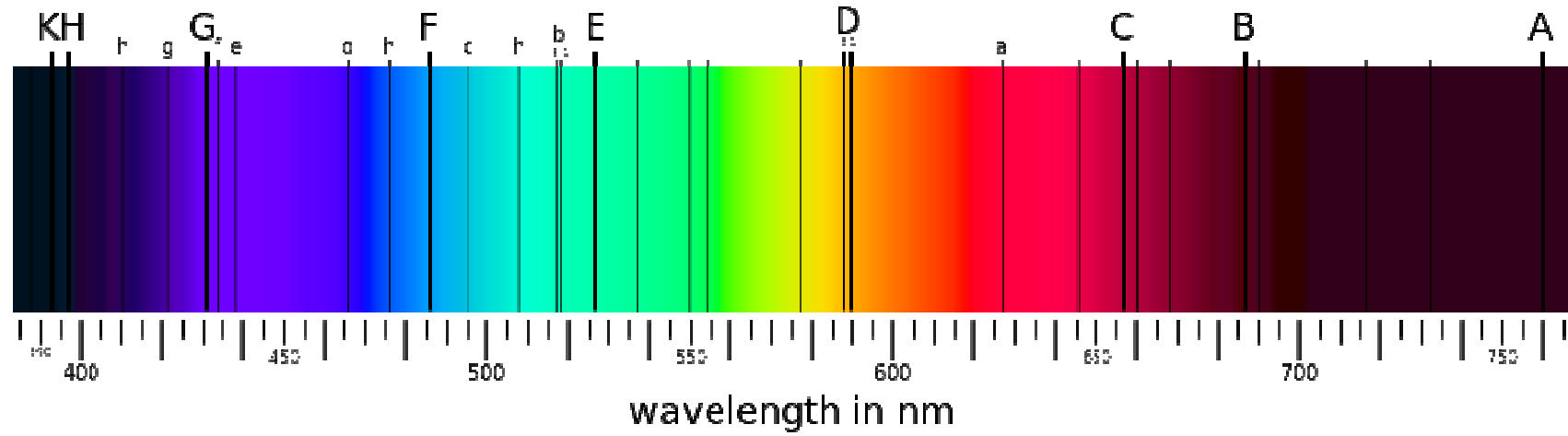


Figure 11.4 Variation of the strength of the Balmer series in stellar spectra.

Spektrum Slunce – Fraunhoferovy čáry



Spektrum Slunce - Fraunhoferovy čáry

Fraunhoferovy čáry

Označení	λ [nm]	W [Å]
K, Ca II	393,368	20,253
H, Ca II	396,849	15,467
C, H α	656,281	4,020
F, H β	486,134	3,680
h, H γ	410,175	3,133
G, H δ	434,047	2,855
b ₁ , Mg I	518,362	1,584
g, Ca I	422,674	1,476
b ₂ , Mg I	517,270	1,259
Fe I	404,583	1,174
d, Fe I	438,356	1,008
Fe I	406,361	0,787
D ₂ , Na I	588,997	0,752
D ₁ , Na I	589,594	0,564

Spektrum Slunce - Fraunhoferovy čáry

Fraunhoferovy čáry

jejich vznik ve fotosféře

1. převyřčením ... směr, frekvence

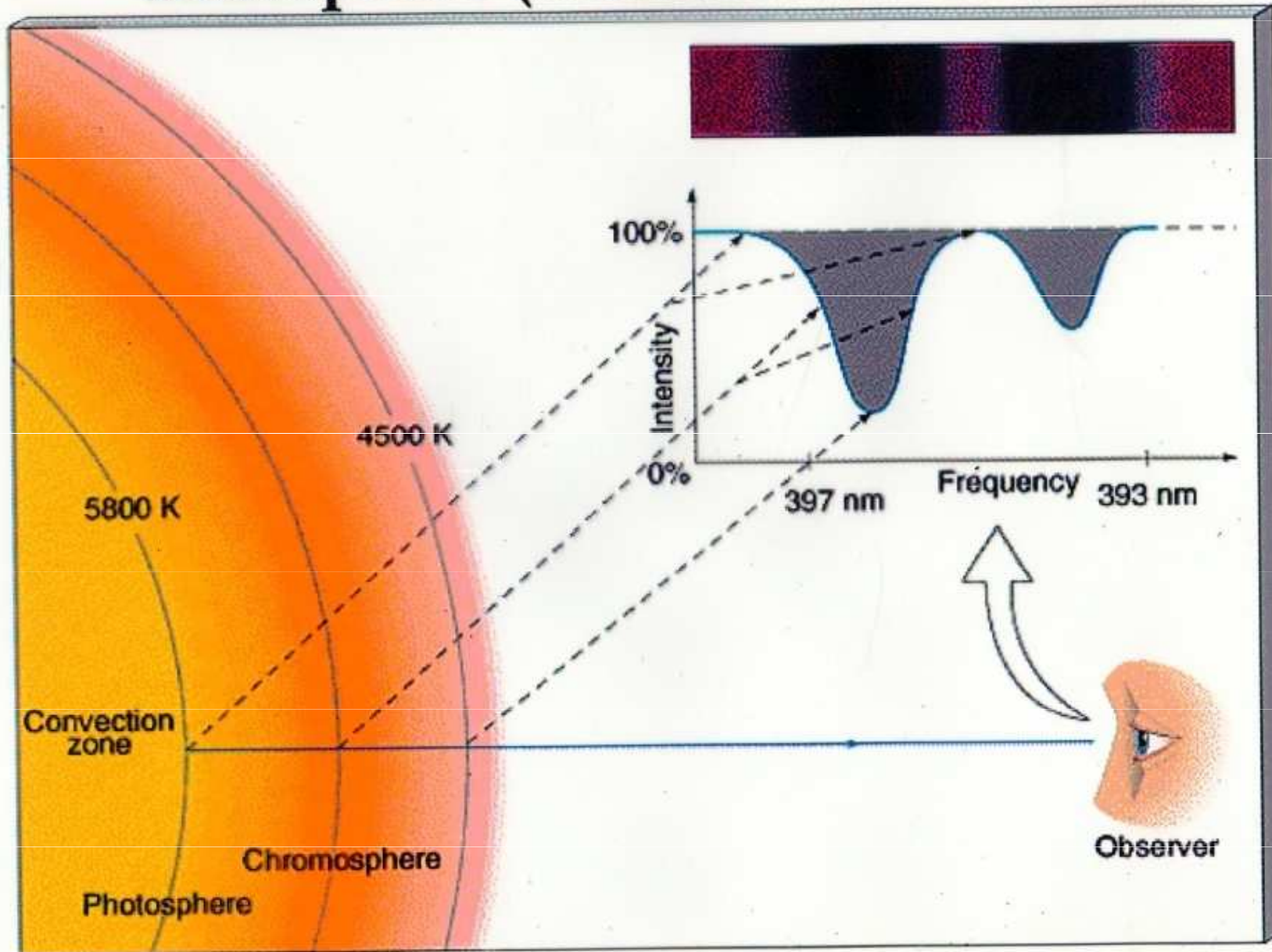
2. ionizací složkami

3. vzájemné působení čar, fotomytí

Označení	λ [nm]	Původ
A	759,4	O ₂ , ter
B	686,7	O ₂ , ter
C	656,3	H α
D D ₁ , D ₂	589,6 ; 589,0	Na I
E	527	Fe I
b ₁ , b ₂ , b ₃	518,4 ; 517,3 ; 516,7	Mg I
F	486,1	H β
f ^x	434,0	H γ
G	430,0	CH pář
g ^x	422,7	Ca I
h ^x	410,2	H δ
H	396,8	Ca II
K ^x	393,4	Ca II

Vznik absorpčních čar ve spektru Slunce

Formation of absorption lines in the solar atmosphere (studied further in Lab #2)



Vznik absorpčních spektrálních čar - Slunce

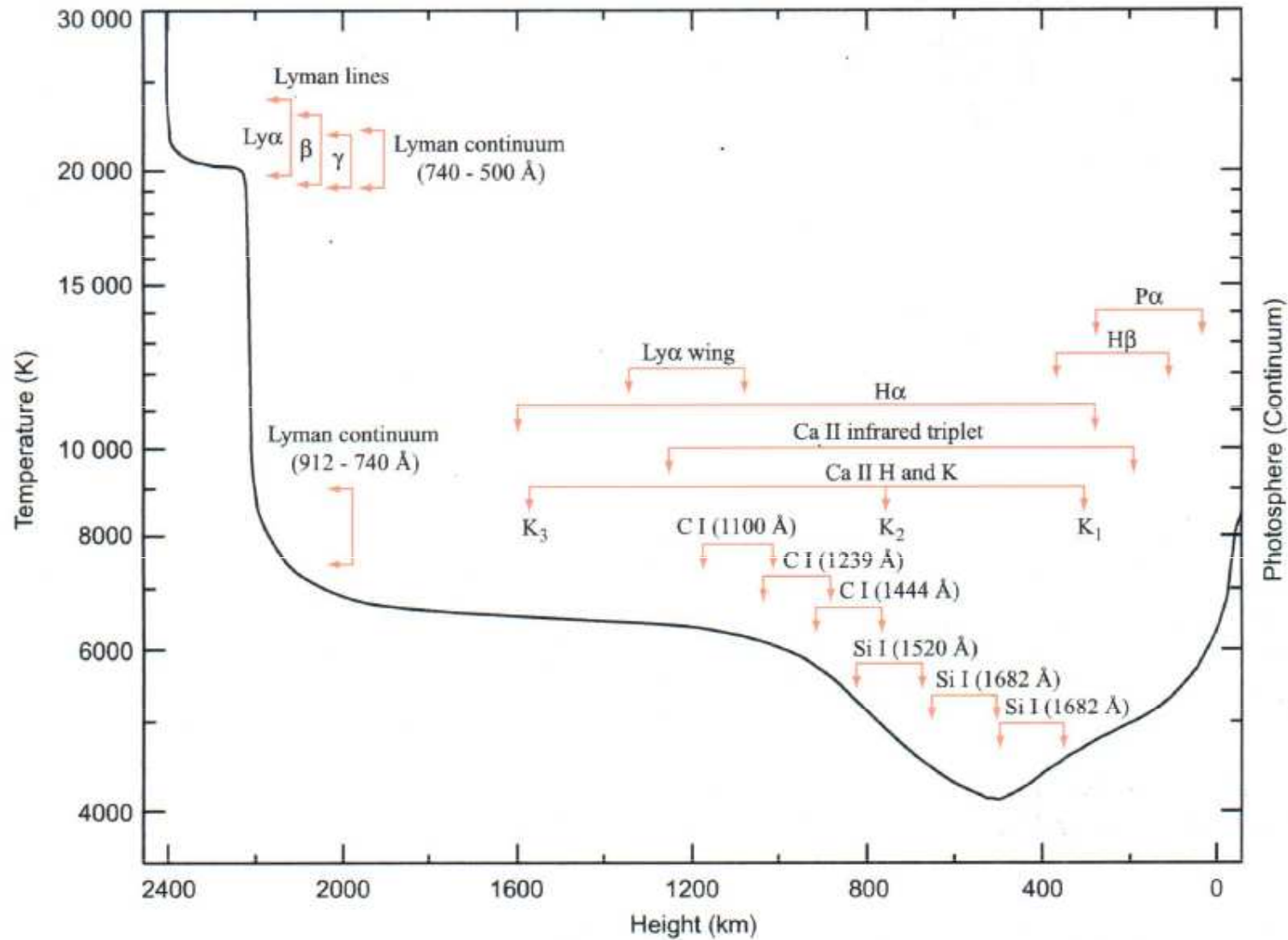


Figure 8: Temperature structure of the Sun with important line forming regions marked. The height, h , is put to zero roughly at the photosphere. Thus, at zero height we have a continuum distribution, similar to a black body with a temperature of $T_{eff} \approx 5800$ K.

Vznik emisních vodíkových čar

Spektrum vodíku

nejrozšířenější prvek - spektrum hvězd, kosmosu...

$$E_b - E_a = h \nu$$

přechodem - konečná energie = energie fotonu

$$\nu = \frac{E_b - E_a}{h} = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 c h^3} \left(\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right)$$

$$E_n = - \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

energetické hladiny

$2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
 $13,6 \text{ eV}$

Lymanova a Balmerova série vodíkových čar

Lymanova série

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 ch^3} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n \dots 2, 3, 4, \dots$$

$R \dots 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

Balmerova série

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$n \dots 3, 4, 5, \dots$$

Lymanova série vodíkových čar

Lymanova série, přechod na první energetickou hladinu, ultrafialová část spektra, $n_a = 1$, hlavní série

n_b	λ [nm]	označení
2	121,6	L_α
3	102,6	L_β
4	97,3	L_γ
∞	91,2	hrana série

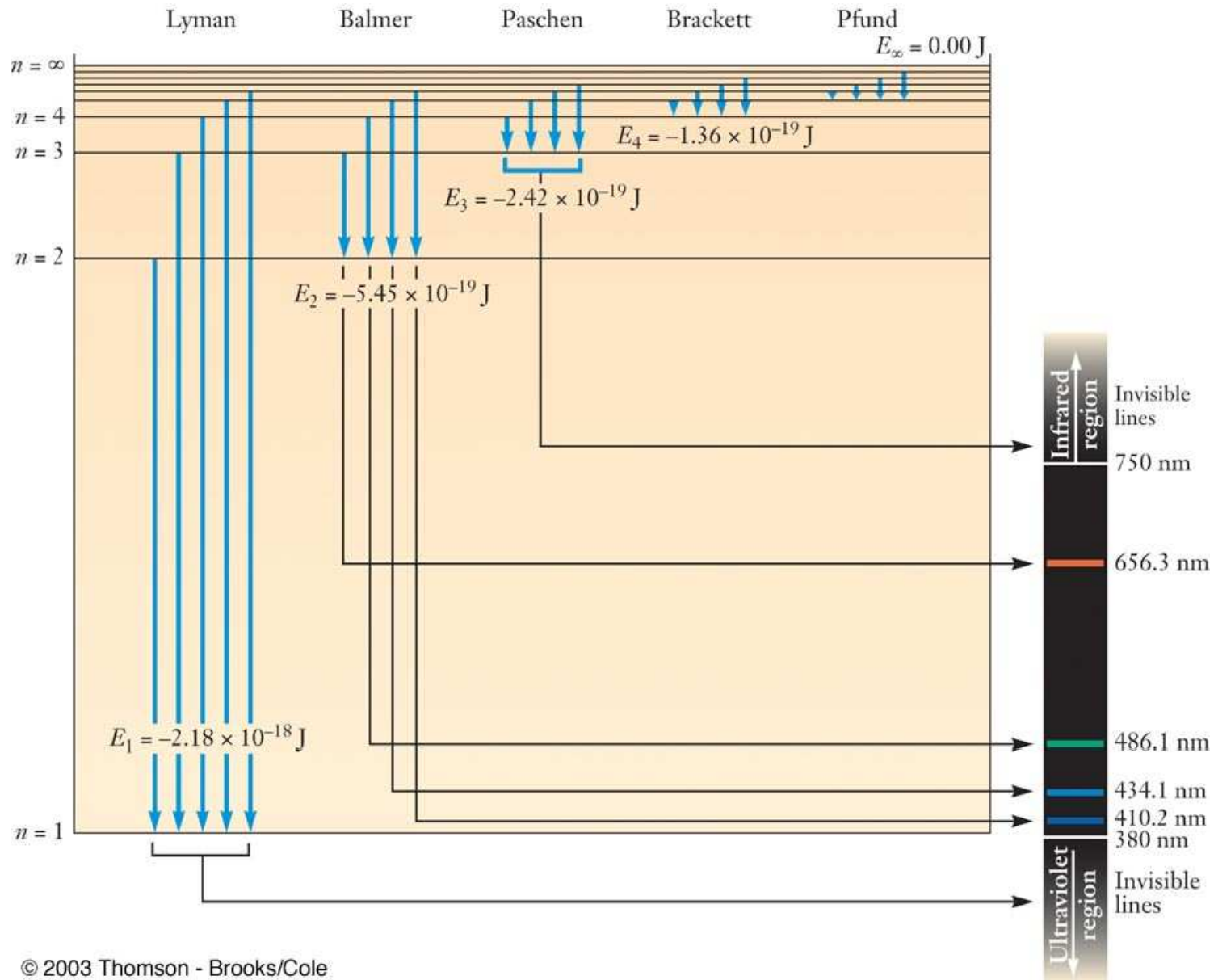
spojité spektrum,
lymanovské kontinuum

Balmerova série vodíkových čar

Balmerova série, přechod na druhou energetickou hladinu, $n_a = 2$, viditelná oblast spektra

n_b	λ [nm]	označení	barva
3	656,3	H_α	červená
4	486,1	H_β	modrá
5	434,0	H_γ	} fialová
6	410,2	H_δ	
∞	364,6	hrana série	
-	balmerovské kontinuum		

Atom vodíku - energetické hladiny, emisní spektrum



Výklad spektra Slunce - dobré znát

spekter hvězd, pokládám následující výpočet objasňující, proč jsou čáry K a H vápníku Ca II intenzivnější než čáry Balmerovy série vodíku, ikdyž v atmosféře Slunce připadá na 500 000 vodíkových atomů pouze 1 atom vápníku. K určení stupně ionizace použijeme Sahovu rovnici a k stanovení rozložení atomů mezi základní energetickou hladinou a první excitovanou hladinou použijeme Boltzmannovu rovnici. Budeme předpokládat elektronový tlak v atmosféře Slunce 1,5 Pa. Nejprve provedeme výpočet pro vodík:

$$\text{Ze Sahovy rovnice obdržíme } \frac{N_{II}}{N_I} = 7,47 \cdot 10^{-5} = \frac{1}{13400} .$$

Tedy jeden vodíkový iont H II připadá na každých 13 000 neutrálních vodíkových atomů v atmosféře Slunce.

$$\text{Dosazením do Boltzmannovy rovnice obdržíme } \frac{N_2}{N_1} = 4,96 \cdot 10^{-9} = \frac{1}{202000000} .$$

Pouze jeden z 200 miliónů vodíkových atomů se nachází na druhé energetické hladině a může způsobit vznik absorpčních čar Balmerovy série.

$$\text{Celkově } \frac{N_2}{N_{celk}} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \cdot \frac{N_I}{N_{celk}} = 4,96 \cdot 10^{-9} .$$

Výklad spektra Slunce

Obdobný výpočet provedeme pro vápník: Ionizační potenciál neutrálního vápníku je pouze 6,11 eV, tedy je poloviční proti ionizačnímu potenciálu vodíku 13,6 eV. Tato skutečnost má podstatný vliv na stav ionizace atomů, neboť Saha rovnice je velmi citlivá k hodnotě ionizačního potenciálu, protože χ_i / kT je v exponentu a $kT \approx 0,5 \text{ eV} \ll \chi_i$.

Ze Sahovy rovnice dostáváme po dosazení $\frac{N_{II}}{N_I} = 903$.

Pouze jeden z každých 900 atomů vápníku je neutrální, prakticky téměř všechny atomy vápníku jsou ve stavu 1 x ionizovaného atomu vápníku. Výpočtem z Boltzmannovy rovnice pro obsazení excitovaných stavů obdržíme $\frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{265}$, tedy $N_1 = 265 N_2$.

Většina atomů se nachází v základním energetickém stavu. Shrnuto převážná většina atomů vápníku je 1 x ionizována Ca II a je v základním energetickém stavu. Tudíž existují vhodné podmínky pro vznik čar K a H Ca II.

$$\frac{N_1}{N_{celk}} \cong \frac{N_1}{N_1 + N_2} \frac{N_{II}}{N_{celk}} = \frac{1}{1 + \frac{N_2}{N_1}} \frac{\frac{N_{II}}{N_I}}{1 + \frac{N_{II}}{N_I}} = 0,995 .$$

Výklad spektra Slunce

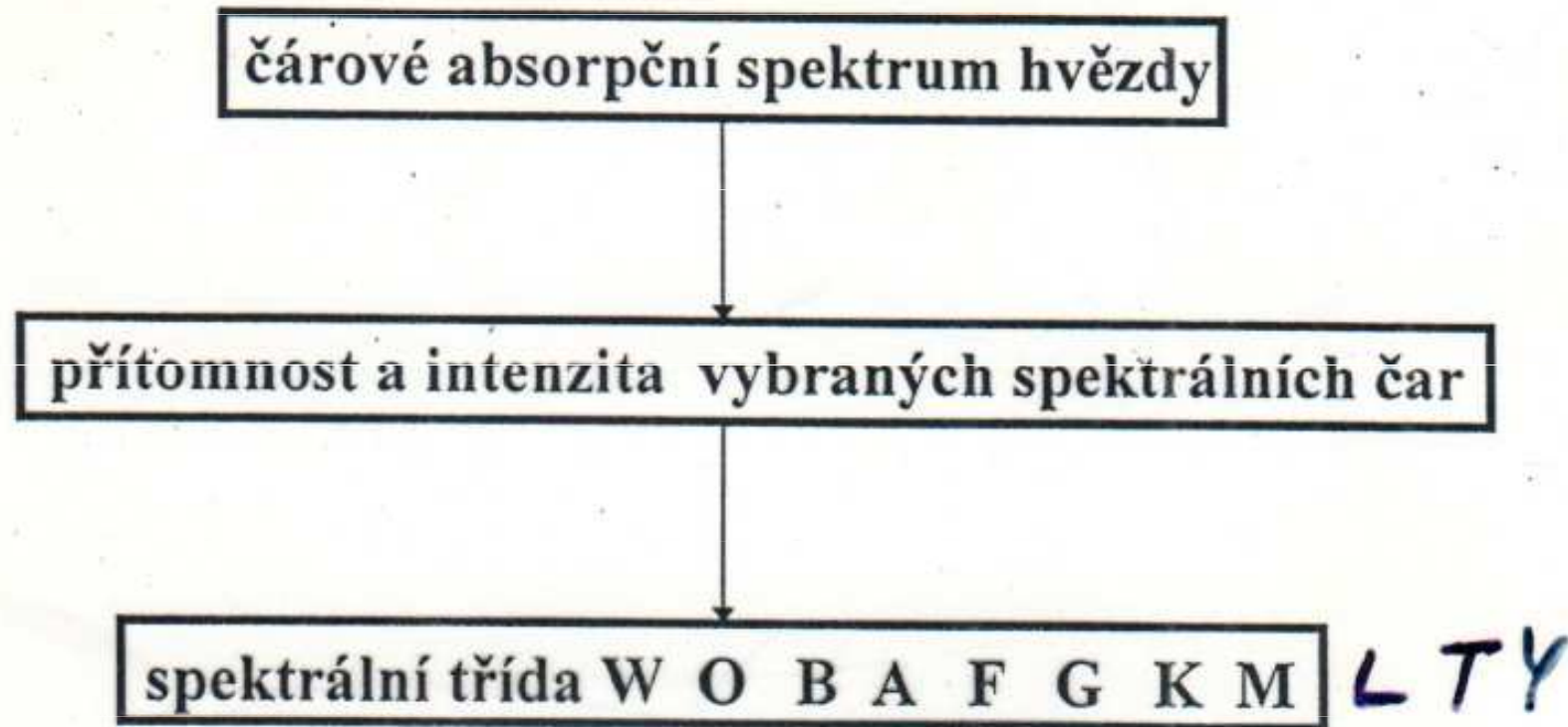
Nyní je zřejmé, proč čáry Ca II jsou intenzivnější ve spektru Slunce než čáry vodíku Balmerovy série. V atmosféře na 500 000 vodíkových atomů připadá pouze 1 atom vápníku, ale pouze $4,96 \cdot 10^{-9}$ z těchto vodíkových atomů je neionizováno a nachází se na druhé energetické hladině, z které při přechodech mohou vznikat absorpční čáry Balmerovy série vodíku. Vynásobením obou uvedených údajů obdržíme

$$500\,000 \cdot 4,96 \cdot 10^{-9} = 0,0025 = \frac{1}{400}.$$

Tedy v atmosféře Slunce existuje 400 x více vápníkových iontů Ca II v základním energetickém stavu umožňujícím vznik K a H spektrálních čar než neutrálních vodíkových atomů na druhé energetické hladině (v prvním excitovaném stavu) umožňujícím vznik čar Balmerovy série. **Intenzita čar K a H Ca II není způsobena celkovým větším množstvím vápníku v atmosféře Slunce, ale citlivější teplotní závislostí jeho atomových stavů excitace a ionizace.**

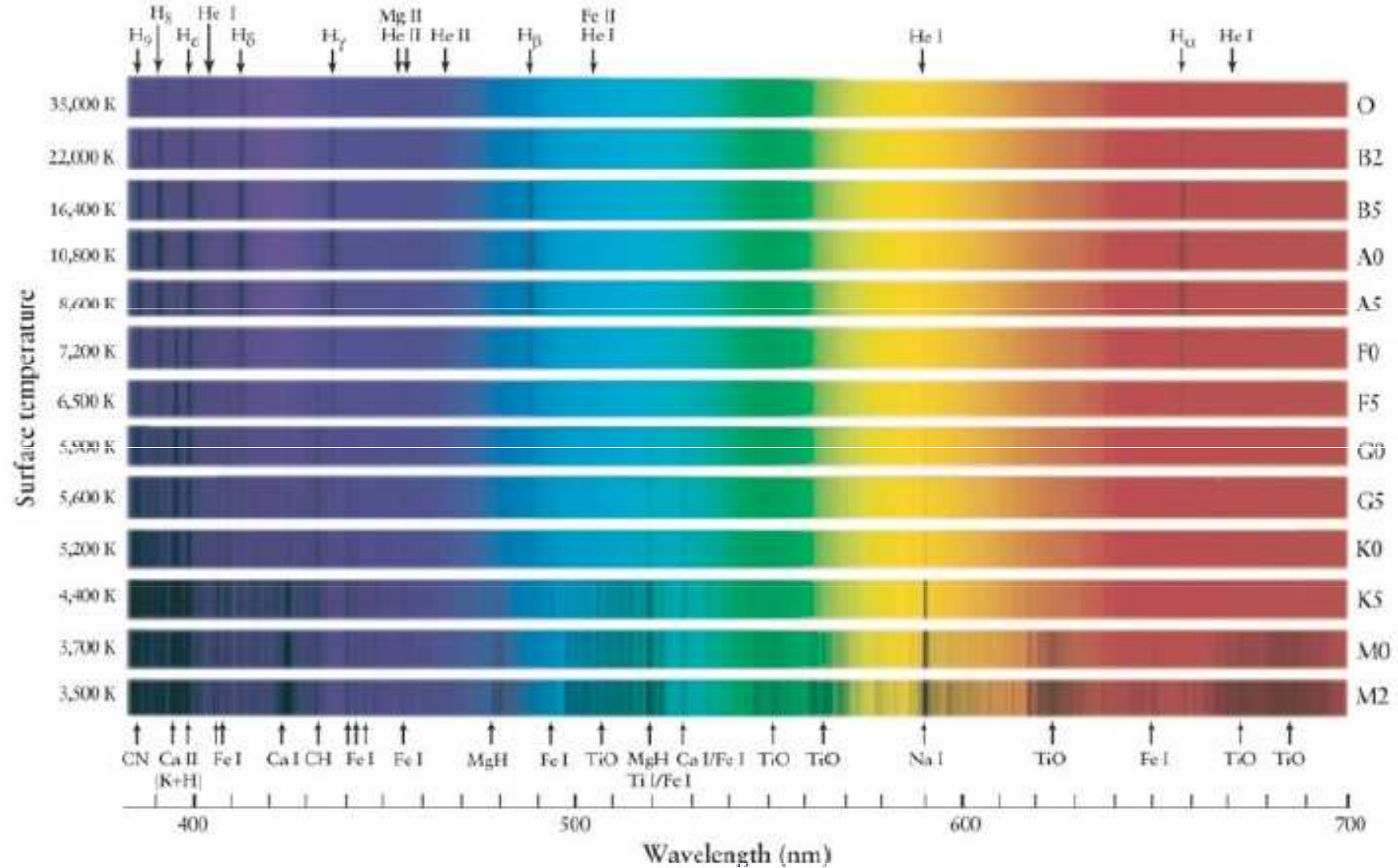
Harvardská spektrální klasifikace

Schéma struktury spektrální klasifikace je následující:

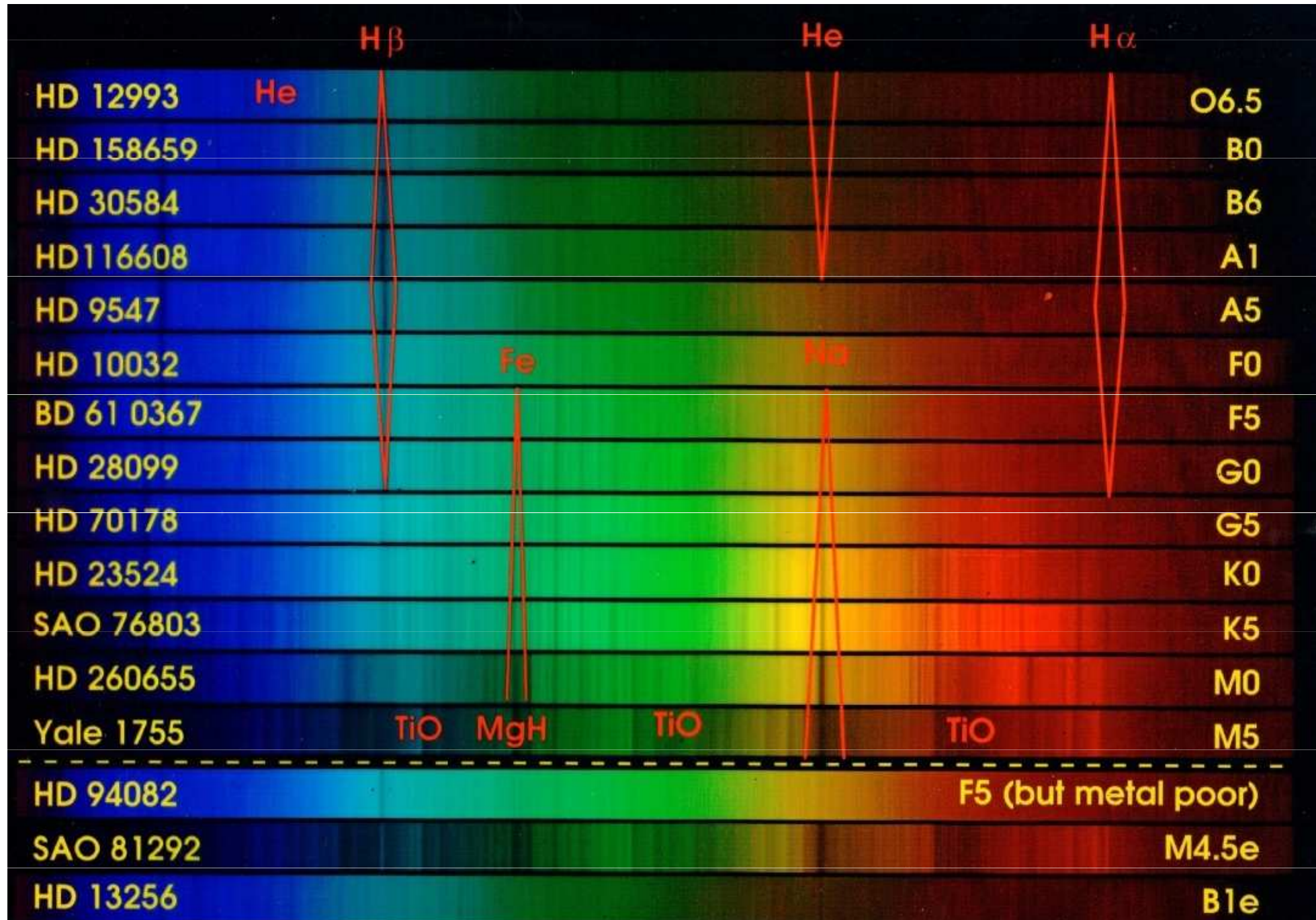


Harvardská spektrální klasifikace - ukázky

Ca II H and K lines: strongest in K0 stars



Spektra hvězd



Annie Cannon: Strength of absorption lines varies with spectral type.

Harvardská spektrální klasifikace

A0–A2	Si II 385.6/Ca II 393.4, Fe II 423.3/Mg II 448.1 and Si II 412.8/ Mg II 448.1. The Balmer line wings can be used between classes III and I
A2–A3	The Balmer line wings plus Fe II–Ti II blend at 402.5/Fe I 404.6, Fe II 423.3/Fe II 422.7 and Fe II 441.7 and Fe I, II 438.3–438.5/Mg II 448.1
A3–A7	The Balmer line wings plus Ti II 401.2/Fe I 400.5, Fe II–Ti II blend at 402.5/Fe I 400.5, 404.6, Fe II–Ti II blend at 417.3+Fe II 417.9/Fe I 414.4, Fe II 423.3/Ca I 422.7 and Ca I 441.7 and Fe II, Ti II 441.7/Mg II 448.1
A9–F1	Y II 398.3/Fe I 400.5, Fe II–Cr II 400.2 blend/Fe I 400.5, Fe II–Ti II blend at 402.5/Fe I 400.5, 404.6, Sr II 407.8/Fe I 404.6, Fe II 417.9/Fe I 414.4, Fe II–Ti II blend at 417.3 /Ca I 422.7 and Sr II 421.6/Ca I 422.7
F2–F5	Y II 398.3/Fe I 400.5, Fe II–Cr II 400.2 blend/Fe I 400.5, Fe II–Ti II blend at 402.5/Fe I 400.5, 404.6, Sr II 407.8/Fe I 404.6, Fe II 417.9/Fe I 414.4, Fe II–Ti II blend at 417.3 /Ca I 422.7+Fe I 414.4, Sr II 421.6/Fe I 414.4, Fe I 441.7 and Ti II 444.4/Mg II 448.1 and Ba II 455.4/Mg II 448.1
F7–F9	Y II 398.3/Fe I 400.5, Fe II–Ti II blend at 402.5/Fe I 400.5, Sr II 407.8/H I 410.2+Fe I 404.6, Fe II 412.9, 417.9/Fe I 414.4, Sr II 421.6+Sc II 424.7/Fe I 414.4 and Ba II 455.4/Mg II 448.1
G0–G2	Y II 398.3/Fe I 400.5, Sr II 407.8/H I 410.2+Fe I 404.6, 406.4, Fe II 417.9/Fe II 417.3 and Sr II 421.6/Fe I 414.4
G5–G8	Sr II 407.8/Ca I 422.7+Fe I 404.6, 406.4, Sr II 421.6/Fe I 414.4, 427.2+Ca I 422.6 and Ti II 440.0, 440.8/Fe I 440.5
G8–K0	CN discontinuity in the continuum at 421.6, plus Sr II 407.8/Fe I 404.6, 406.4, 407.2, Sr II 421.6/Fe I 414.4, 427.2, Ti II 440.0, 440.8/Fe I 440.5 and Fe I 444.4/Fe I 440.5
K2–K4	CN discontinuity in the continuum at 421.6, plus Sr II 407.8/Fe I 404.6, 406.4, 407.2, H I 401.2/Fe I 406.4, 407.2, 414.4, Sr II 421.6/Fe I 414.4, 427.2 and Ti II 440.0, 440.8/Fe I 440.5
K5–M0	Sr II 407.8/Fe I 406.4, 407.2, H I 401.2/Fe I 406.4, 407.2, 414.4 and Sr II 421.6/Fe I 414.4+Ti I 418.6
M0–M1	Sr II 407.8/Fe I 404.6, 406.4, H I 401.2/Fe I 414.4, Sr II–Fe I blend at 421.6/Fe I 414.4 and Fe I 437.5, 438.9/Fe I 438.4
M1–M4	Sr II 407.8/Fe I 404.6, 406.4, 407.2, 426.3, H I 401.2/Fe I 404.6, 414.4, Sr II–Fe I blend at 421.6/Fe I 414.4, 425.1 and Fe I 437.5, 438.9/Fe I 438.4

Harvadská spektrální klasifikace-označení spektra

Označení spektra

(W) - O - B - A - F - G - K - M - L - T - Y

jemnější! desetinné dělení A0, A1, ... A9

- e - emisní čáry
- n - neustálé, difúzní čáry
- s - ostré čáry
- v - proměnné čáry
- m - metalické čáry

přípony

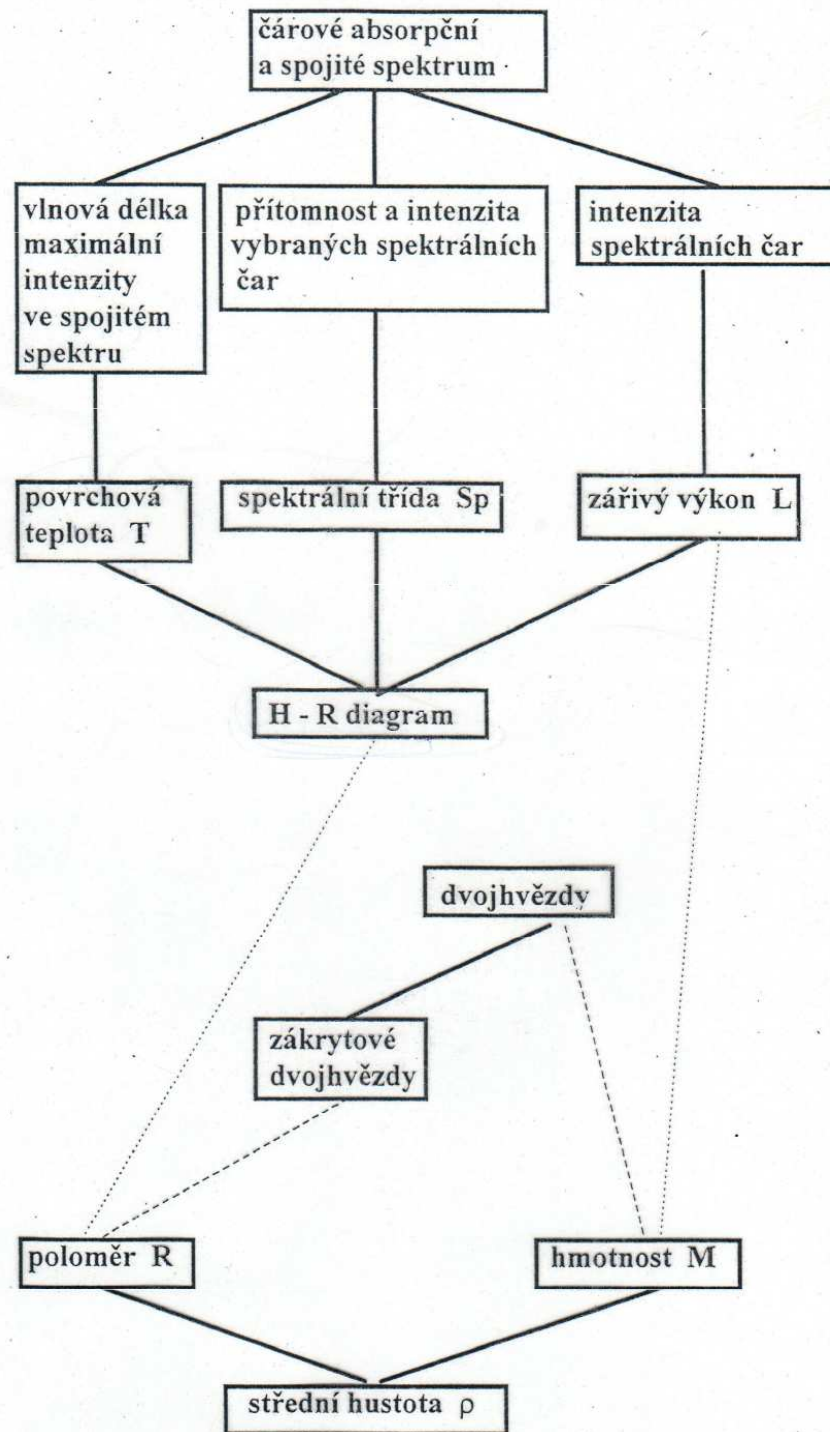
- c - velobv
- g - obv
- d - kvaslík
- sd - podkvaslík
- wd - bílý kvaslík

předpony

Třídy svítivosti (zářivého výkonu) – luminosity

- Ia - velmi jasný světlo
- Ib - méně jasný světlo
- II - jasný světlo
- III - normální světlo
- IV - podobu
- V - tepalík (hvězda hlavní posloupnosti A-)
- VI - podtepalík
- VII - bílý tepalík

Určování charakteristik ze spektra



Rozsah charakteristik hvězd

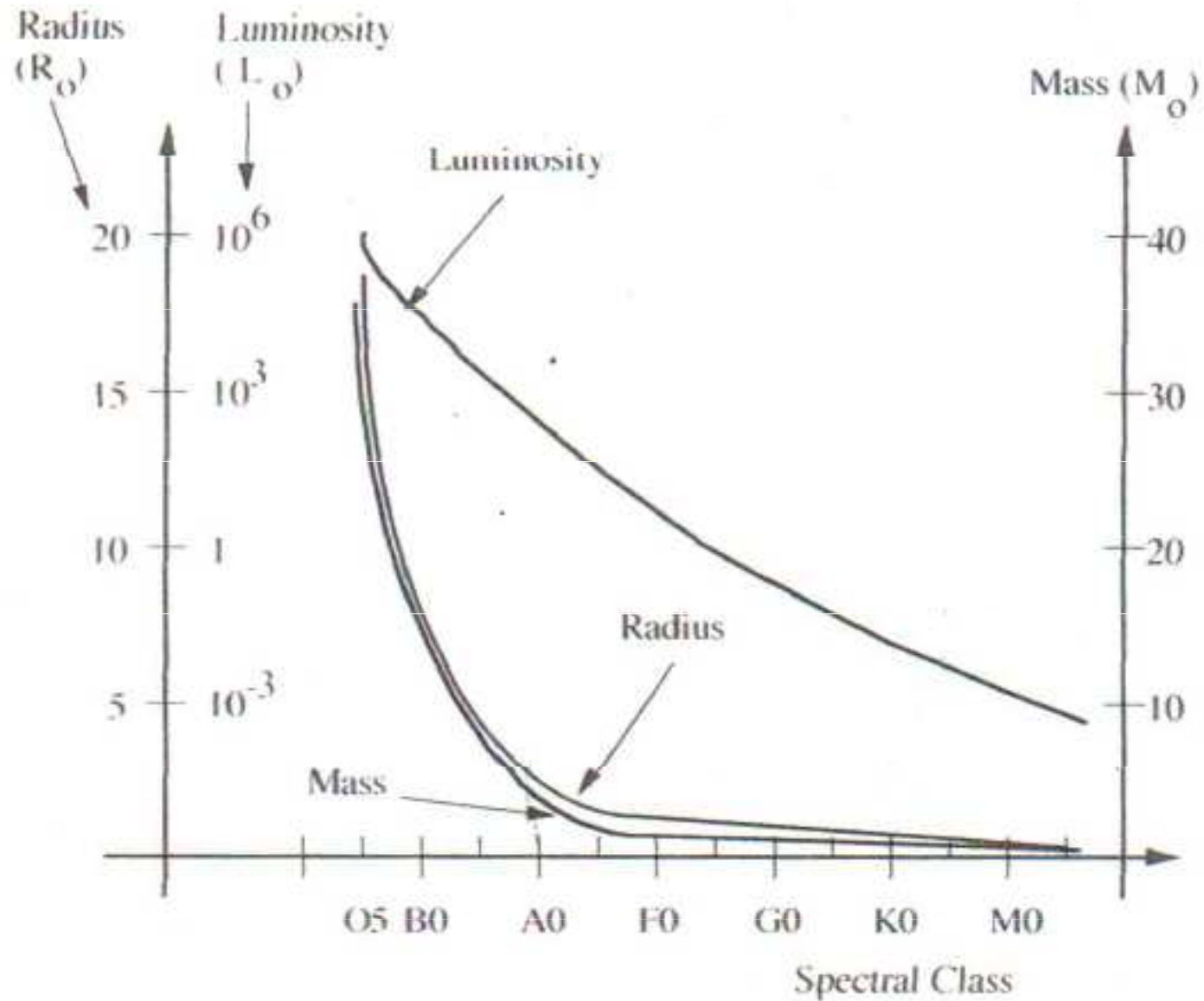
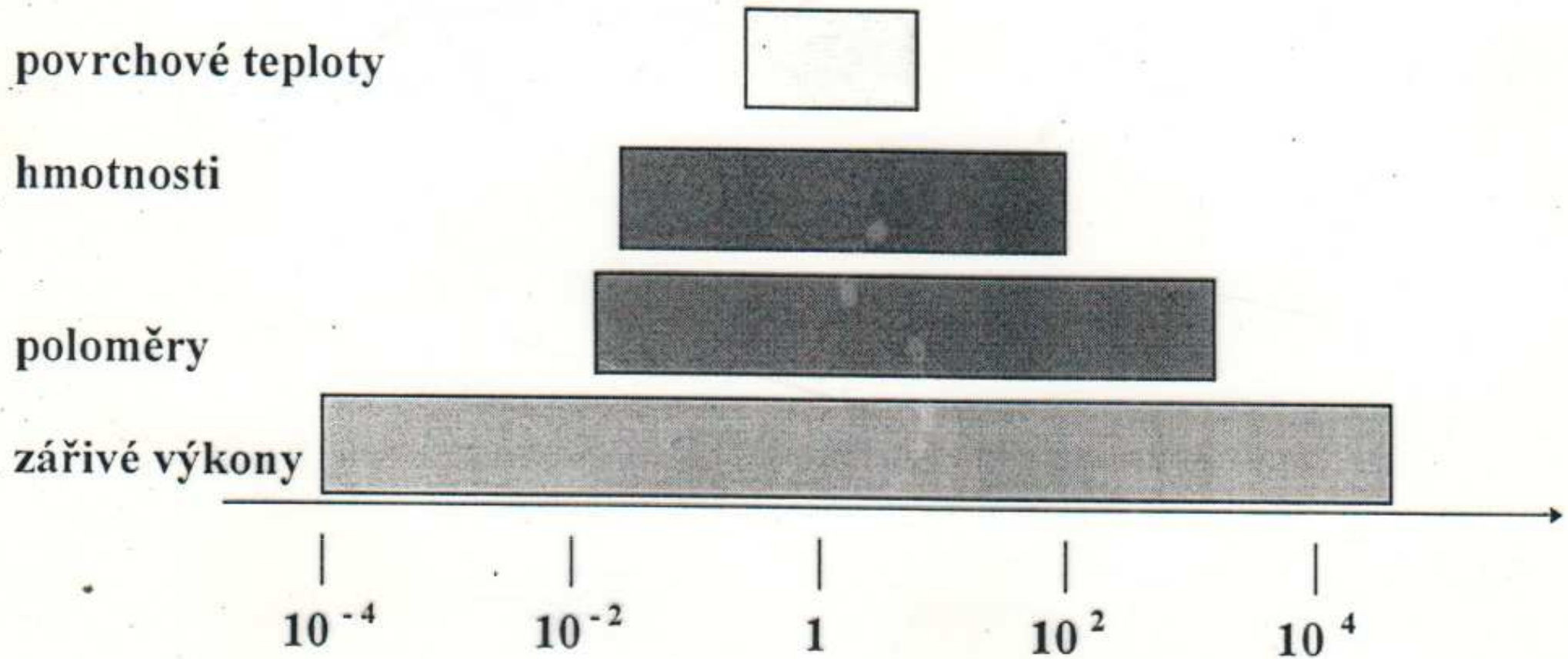


Figure 11.5 The variation of stellar size, mass and luminosity for main sequence stars with spectral class.

Rozsah charakteristik hvězd

Rozsah charakteristik hvězd vyjádřený v odpovídajících jednotkách Slunce



Vlastnosti charakteristik hvězd

hmotnosti ($10^{-2} - 10^2$) M_S

poloměry ($10^{-2} - 10^3$) R_S

povrchové teploty ($10^3 - 10^6$) K

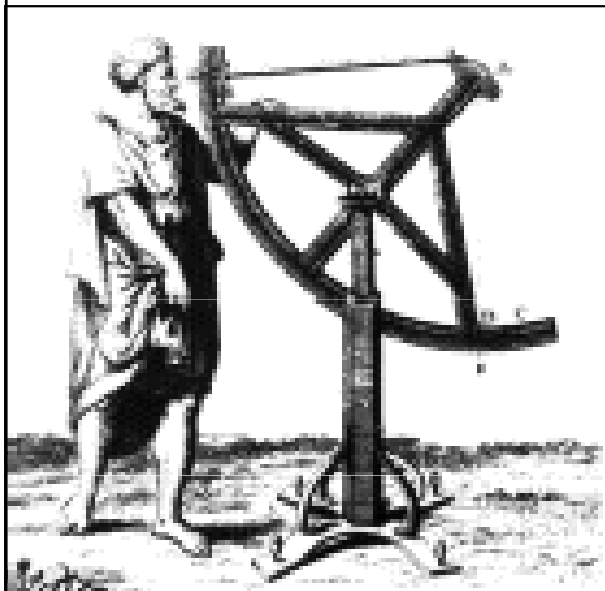
zářivé výkony ($10^{-6} - 10^7$) L_S

odlišnost charakteristik – zachycení

různých vývojových stadií hvězd –

charakteristiky – poloměr, teplota, zářivý

výkon se s časem mění



Picard's
Winkelquadrant

Určování vzdálenosti Země - Slunce

Giovanni Domenico

Cassini 1625-1712

Jean Richer 1630-1696

sluneční paralaxa

září - 1672

stanovení AU –

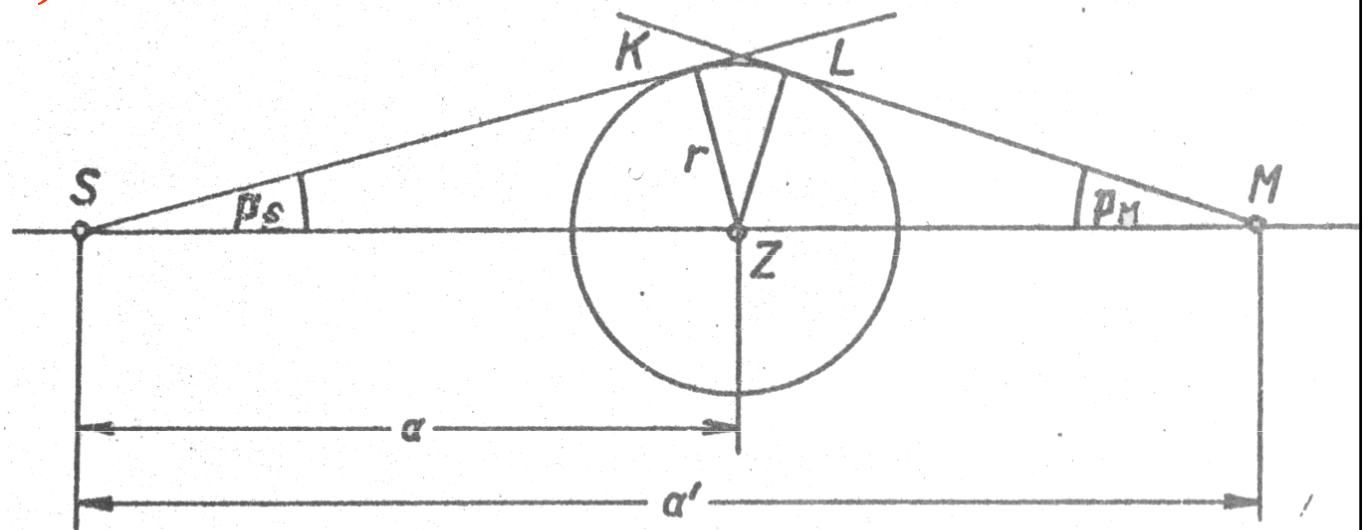
138,5 mil. km!



p_M 25" ... 0,38 au

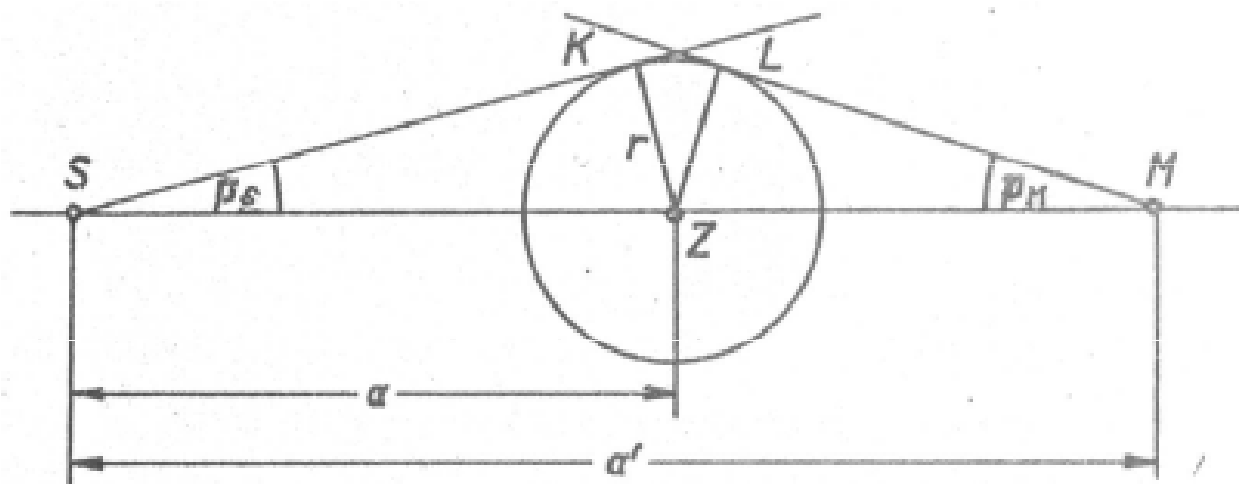
p_S 10" ... 1 au

p_M 2,5krát větší p_S



Určování vzdálenosti Země - Slunce

Proměření délky poledníku a následné upřesnění zemského poloměru francouzským astronomem a matematikem **Jeanem Picardem** (1620 – 1682) v roce 1671 umožnilo využít v září 1672 velkou opozici Marsu ke stanovení vzdálenosti Země – Slunce. Ze dvou míst na Zemi, z Cayenne ve Francouzské Guayaně francouzský matematik a astronom **Jean Richer** (1630 – 1696) a z Paříže francouzský astronom italského původu **Giovanni Domenico Cassini** (1625 – 1712) astrometricky proměřili polohu Marsu na hvězdném pozadí. Úhlová odchylka mezi zornými přímkami k Marsu z obou míst činila $19''$ (viz obr. 12).



Obr. 12: Určení hodnoty astronomické jednotky pomocí opozice Marsu

V pravoúhlých trojúhelnících platí vztahy $\sin p_S = \frac{r}{a}$ a $\sin p_M = \frac{r}{a' - a}$. Porovnáním a úpravou obdržíme $\sin p_S = \left(\frac{a'}{a} - 1\right) \sin p_M$. Paralaxy Slunce a Marsu jsou velmi malé, jejich siny můžeme nahradit přímo úhly v radiánech $p_S = \left(\frac{a'}{a} - 1\right) p_M$. Při znalosti relativních hodnot a' a a pomocí III. Keplerova zákona byla z naměřených hodnot propočítaného úhlu p_M stanovena sluneční paralaxa na $9,5''$ a odtud vypočtena hodnota astronomické jednotky na zhruba $1,38 \cdot 10^{11}$ m. Skutečná hodnota astronomické jednotky je $1,496 \cdot 10^{11}$ m.

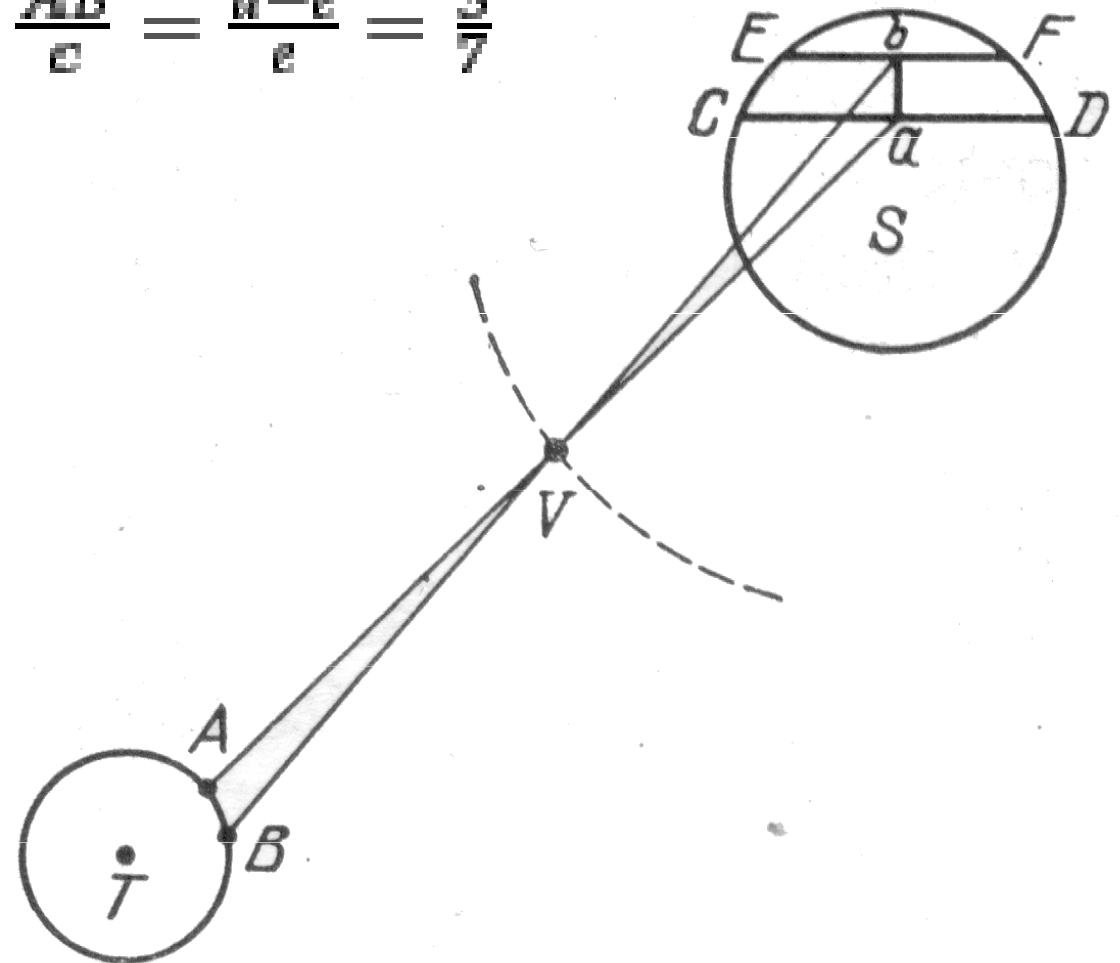


Halleyova metoda stanovení sluneční paralaxy

Edmond Halley 1656 - 1742

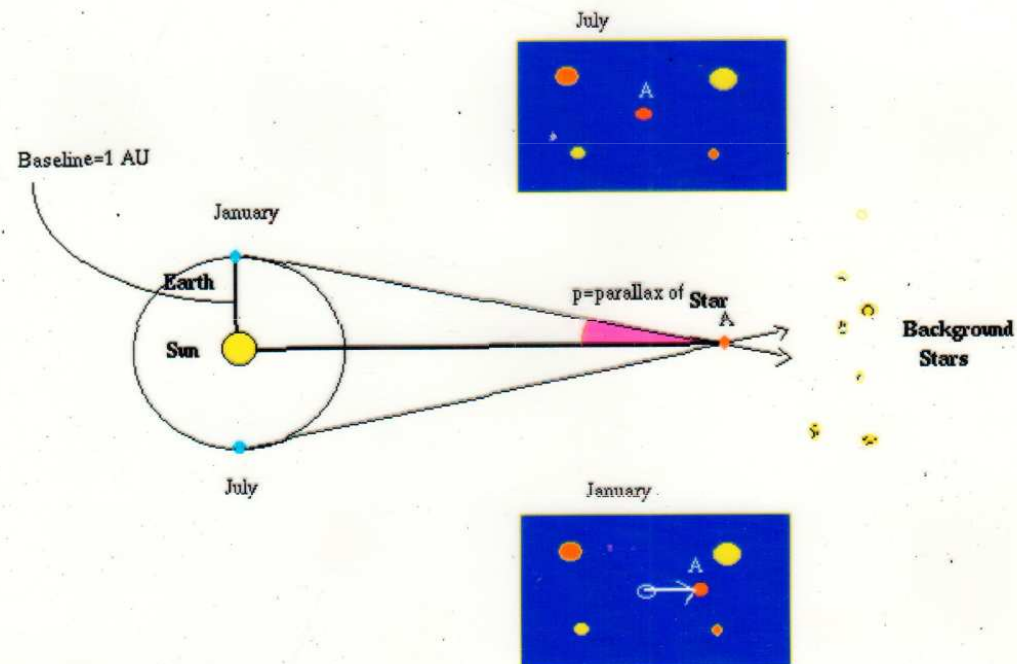
$$\frac{AB}{e} = \frac{d-e}{e} = \frac{3}{7}$$

vzdálenost ZS...d
vzdálenost VS...e
posuv chord v dílech
slunečního průměru, při
znalosti úhlových rozměrů
Slunce nalezneme d



Určování vzdáleností - úhломěrný způsob

Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846) Vasilij Jakovlevič Struve (1793 – 1864)



Určování vzdáleností - úhломěrný způsob

Metoda rovní paralaxy

Friedrich Wilhelm BESSEL (1784 - 1846)

61 Cygni $\pi = 0,314'' \pm 0,014''$

13 proměrní; zdroj 1838, publikace 1839,

současné hodnoty $\pi = 0,2871'' \pm 0,0015''$

Vasilij Jakovlevič STRUVE (1793 - 1864)

α Lyrae Vega $\pi = 0,125'' \pm 0,055''$

40 proměrní, publikace 1837

současné hodnoty $\pi = 0,1289 \pm 0,0005''$

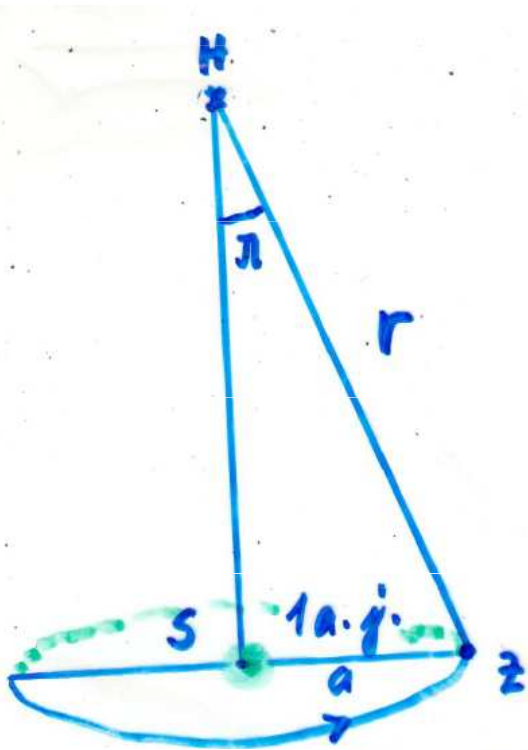
Thomas HENDERSON (1798 - 1844)

α Cen A Rigel Kent $\pi = 1,16'' \pm 0,11''$

publikace 1839

současné hodnoty $\pi = 0,7421 \pm 0,0014''$

Určování vzdáleností - úhломěrný způsob



$$\sin \pi = \frac{a}{r}$$

$$r = \frac{a}{\sin \pi}$$

π vždy menší než $1''$

$$\sin \pi'' = \pi \sin 1'' =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{206\,265} \right]$$

úhlová míra radiánů
 $1 \text{ rad} = 206\,265''$

$$r = \frac{206\,265 \text{ AU}}{\pi} \text{ au}$$

$$1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ AU}$$

au

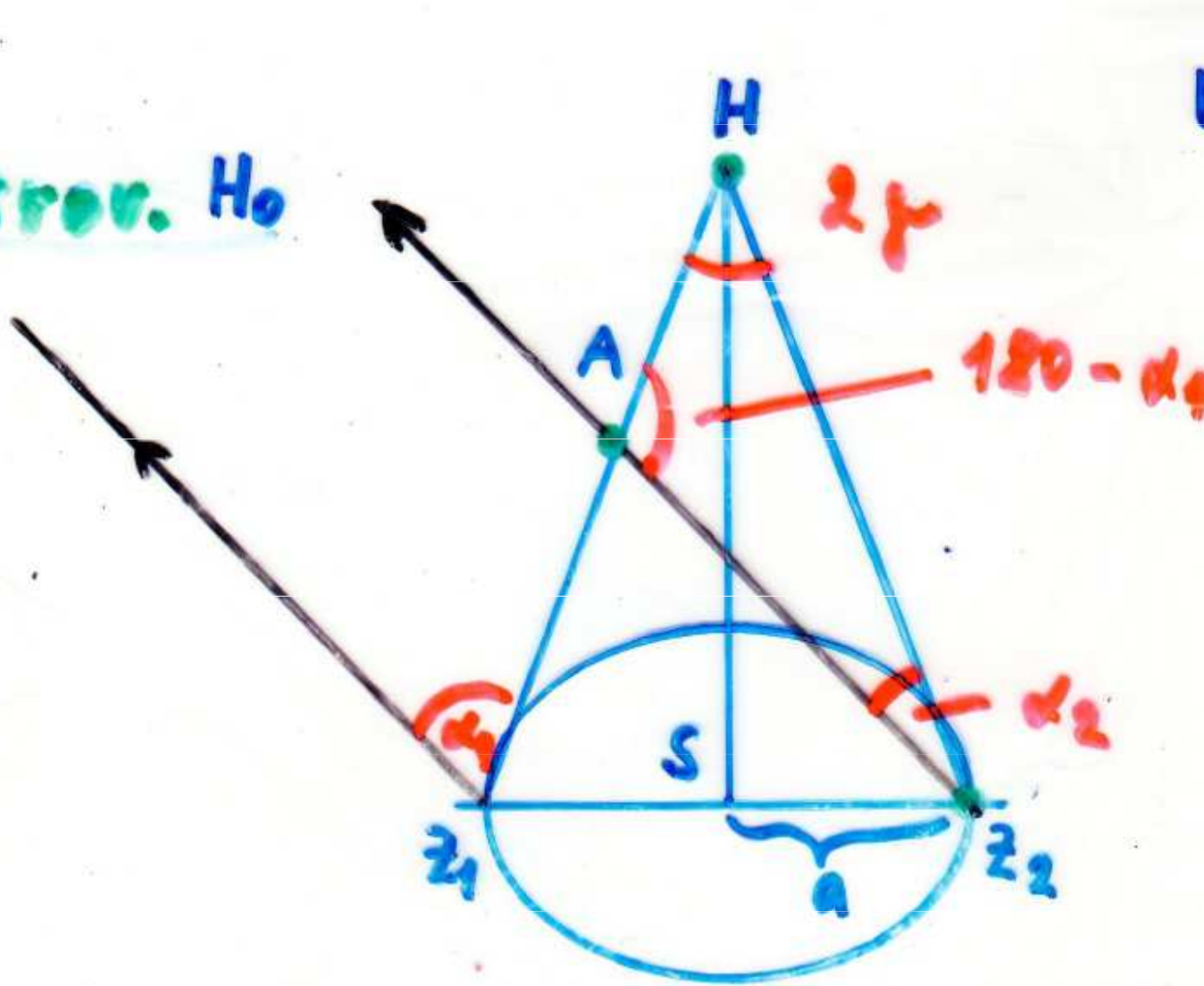
$$1'' \dots 1/60'$$

$$1' \dots 1/60^\circ$$

$$1 \text{ rad} \dots 57^\circ 17' 45''$$

Určování vzdáleností - úhlověrný způsob

Srov. Ho



$$r = \frac{1}{\pi}$$

Δz_2AH

staneme \neq

$$\alpha_1 \dots z_1$$

$$\alpha_2 \dots z_2$$

$$r = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

Určování vzdáleností v současnosti

astrometrická družice **Hipparcos** - **High Precision**

PARallax **COL**leting **S**atellite 1989-1993, zpracování údajů

katalog HIPPARCOS 120 000 hvězd 12,5 mag přesnost
polohy 0,001“

katalog TYCHO 1 000 000 hvězd 11,5 mag přesnost
polohy 0,025“

Určování vzdáleností - fotometricky, spektroskopicky

Metoda nov v maximu jasnosti $M = -7$ mag

$$m - M = 5 \log r - 5 \quad \dots \quad \log r = 1 + 0,2 (m - M)$$

Metoda cefeid měření periody P, klasické cefeidy 1 - 50 dnů, RR Lyrae 1 - 24 hod.

obecný vztah $M = a + b \log P$

klasické cefeidy $M = -1,7 - 2,54 \log P$

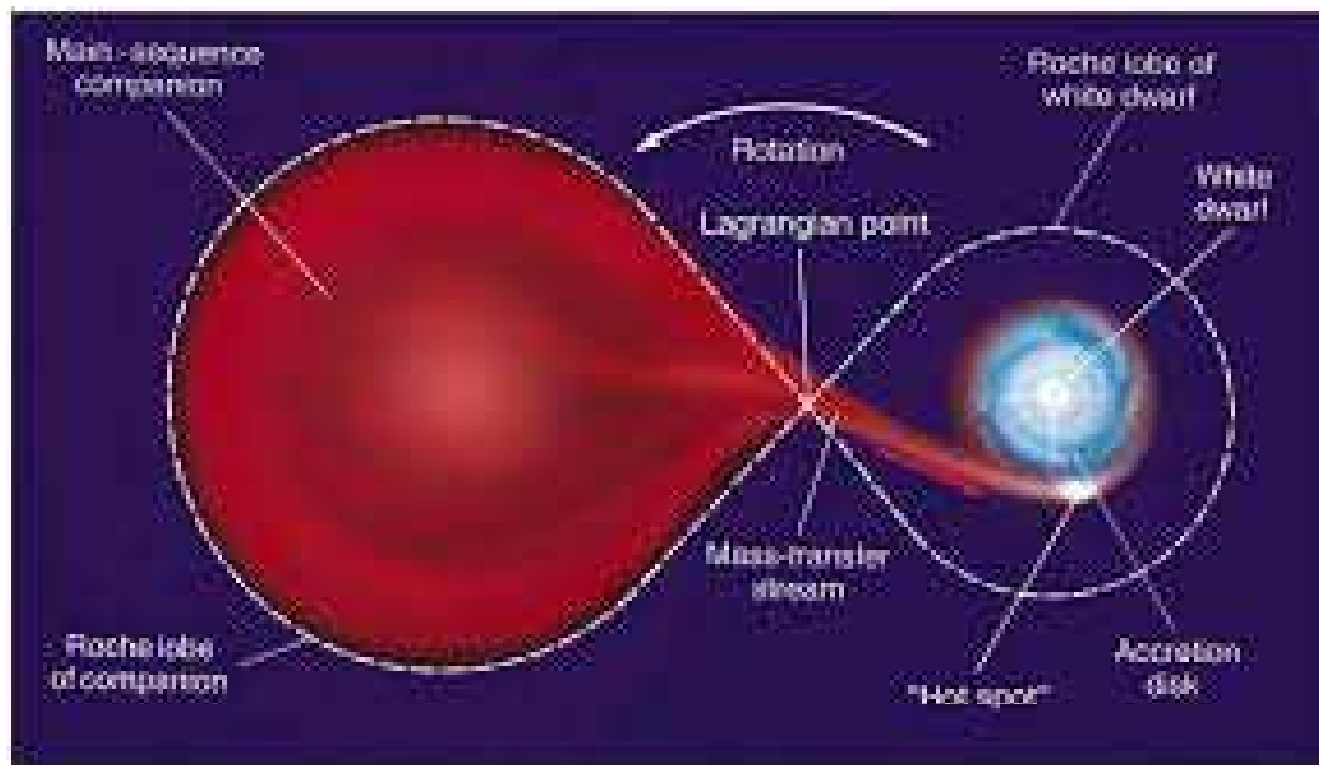
Metoda supernov Ia v maximu jasnosti $M = -18,7$ mag

$$m - M = 5 \log r - 5 \quad \dots \quad \log r = 1 + 0,2 (m - M)$$

Hubbleův zákon $z = \frac{\lambda_p - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{lab}} \quad v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{lab}} = c z = H r$

$$r = \frac{c}{H} z \quad \text{při } z > 0,1 \quad v = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

Určování vzdáleností – novy, přenos hmoty v těsných dvojhvězdách



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

**jedna složka červený obr, druhá složka bílý trpaslík,
přenos hmoty**

Určování vzdáleností - novy

Nova

jde o staré hvězdy, složky železné dvojhvězdy
 objevené zjasněním o (4-5) mag. i více
 uhlíkaté plynu na povrch blízké tepalnice $P \uparrow, T \uparrow$
 zapálení termouklobiných reakcí vodík \rightarrow helium
 podání energie, **exploze plynné atmosféry**

$L \sim$ až $10^5 L_S$, $v_{exp} \sim 3000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
 hmotu vodík $\sim 10^{24} \text{ kg}$, 30 Hz , $E \sim (10^{37} - 10^{39})$
 případně opakovaně za 10^{2-3} roků... rekurentní no
 měří ~ 10 radii
 slabší zjasnění
 R.S Oph
 T Pyx

trpasličí novy U Geminorum
 b.t. + ž.t.
 spalované zjasnění \leftarrow nestabilita akrečního
 disku kolem b.t.
 vyvolané změnou
 opacity

SS Cyg
 SU UMa
 Z Cam

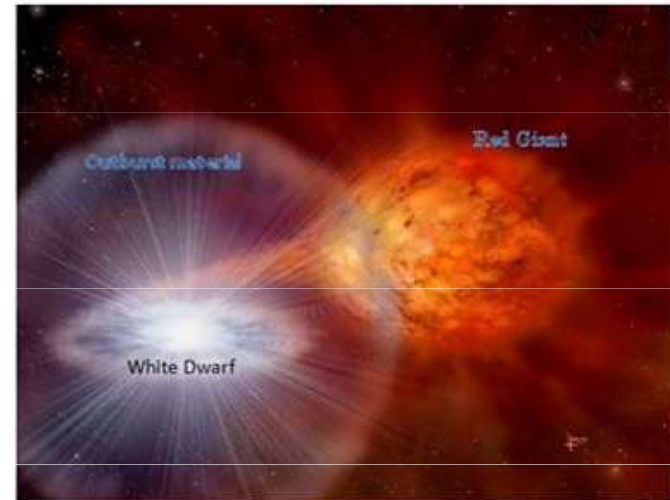
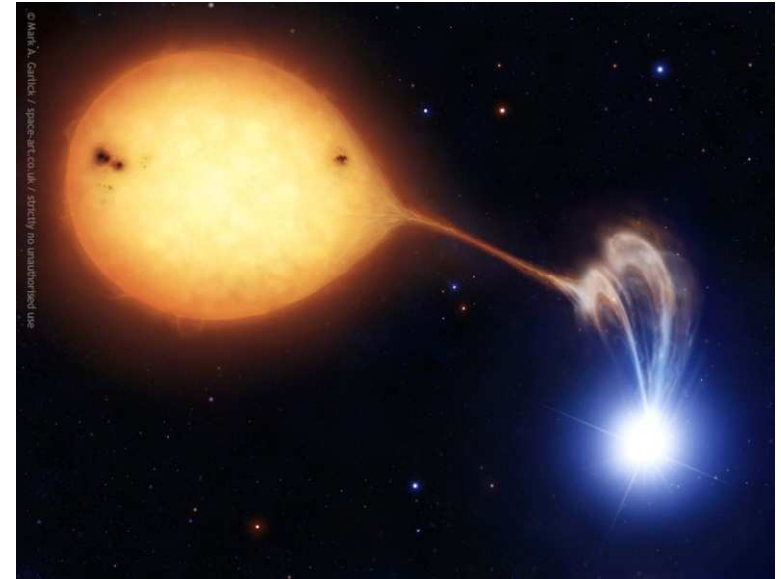
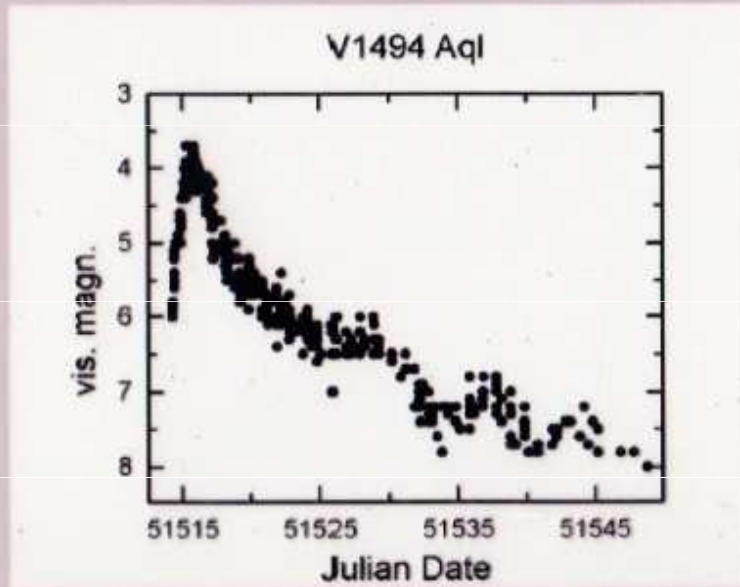


Figure: An artist rendition of a recurrent nova outburst.

Určování vzdáleností - novy

Novae

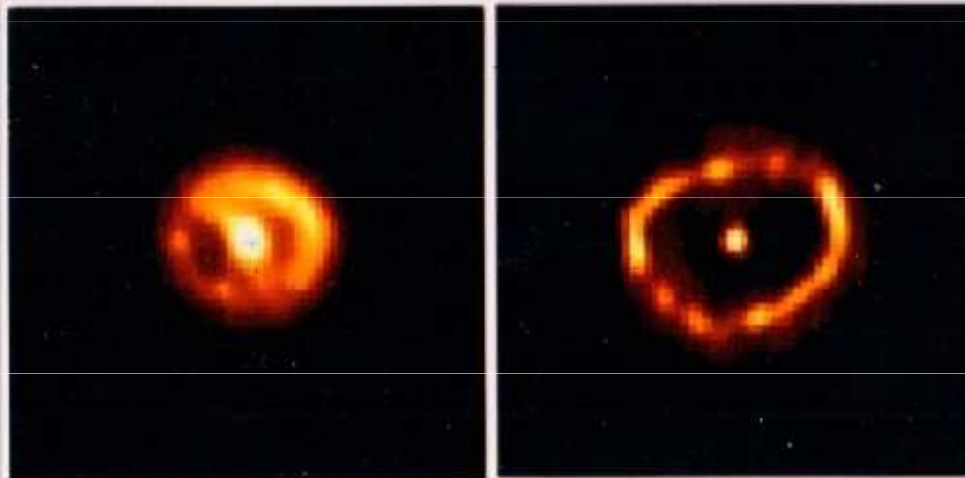
A classical nova is a rapid brightening of a star, which then fades over a few weeks:



Visual light curve of a classical nova event

Metoda nov v maximu jasnosti $M = -7$ mag

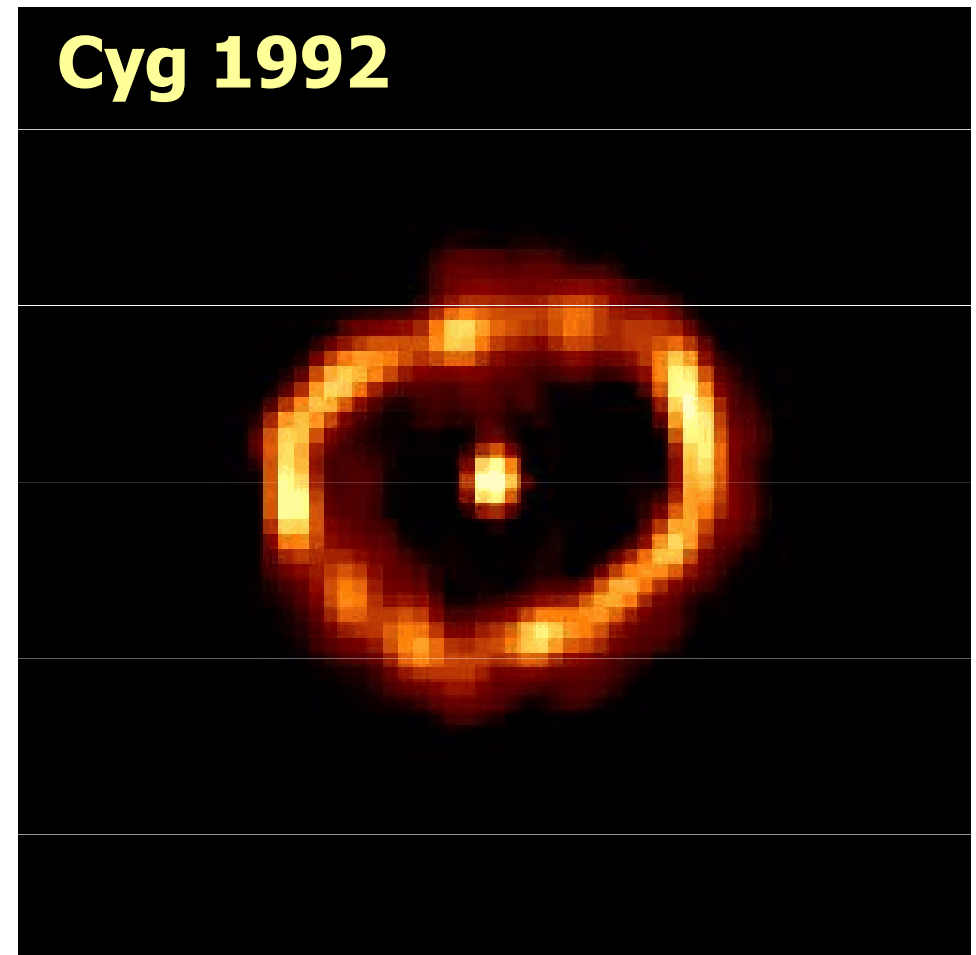
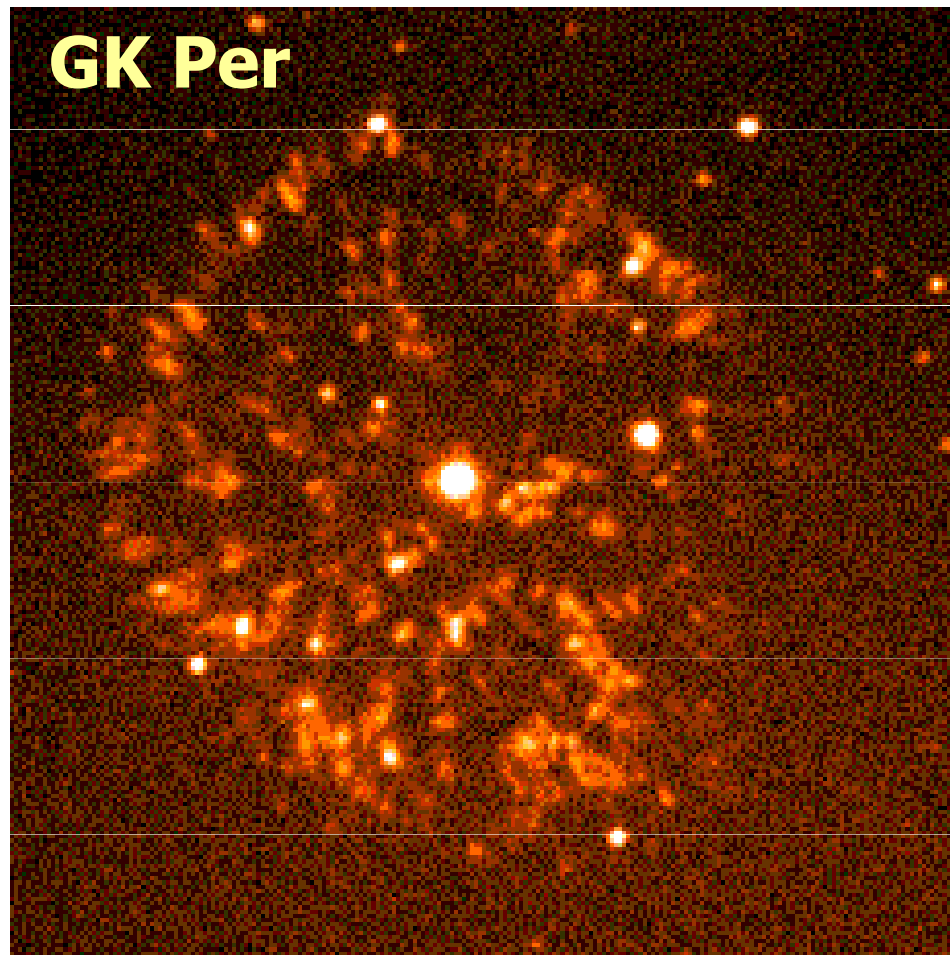
$$m - M = 5 \log r - 5 \quad \dots \quad \log r = 1 + 0,2 (m - M)$$



Shell of matter expanding subsequent to a nova explosion

Novy

**Odvržená obálka je větší než u planetárních mlhovin
– 30 M_{\odot} , charakter hoření je explozivní, rychlost až
3000 $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$**

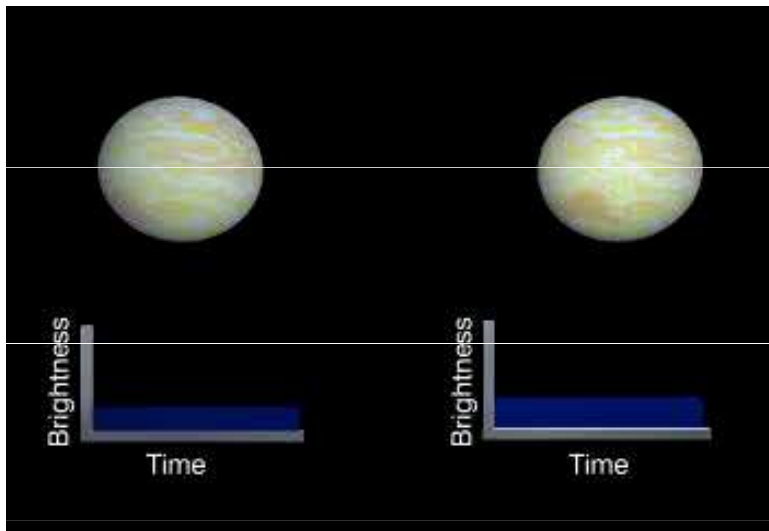


Určování vzdáleností – cefeidy, Hubbleův zákon

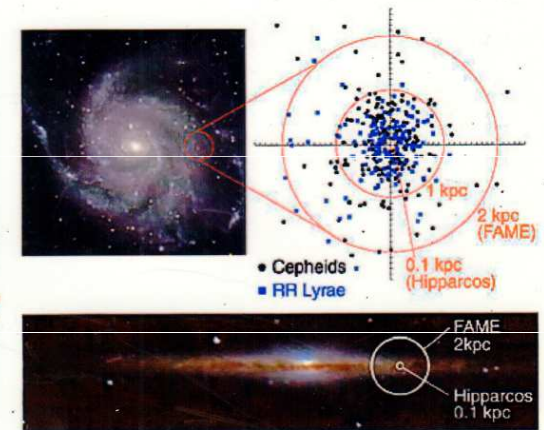
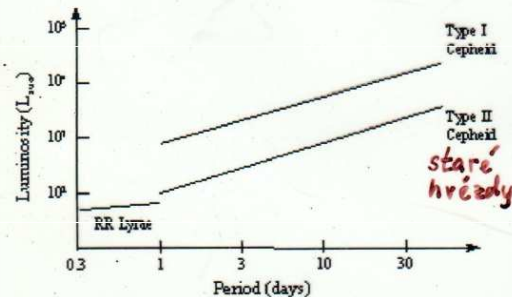
Metoda cefeid měření periody P, klasické cefeidy 1 - 50 dnů, RR Lyrae 1 - 24 hod.

obecný vztah $M = a + b \log P$

klasické cefeidy $M = -1,7 - 2,54 \log P$



Period-Luminosity Relationship



Edwin Powell Hubble (1889 – 1953)

cefeidy - pulsující hvězdy,
měnící svůj poloměr a
jasnost

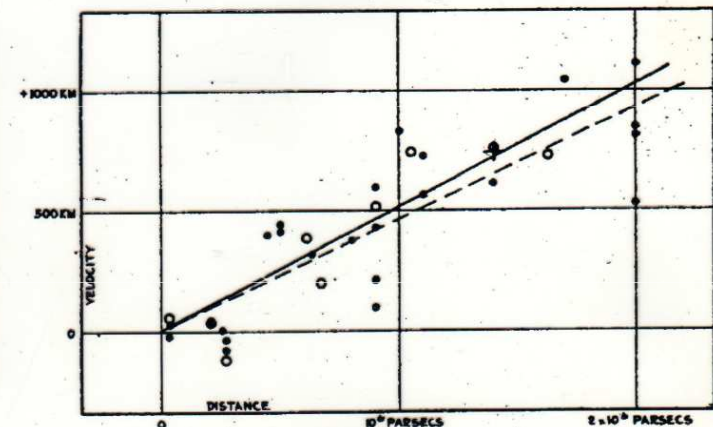
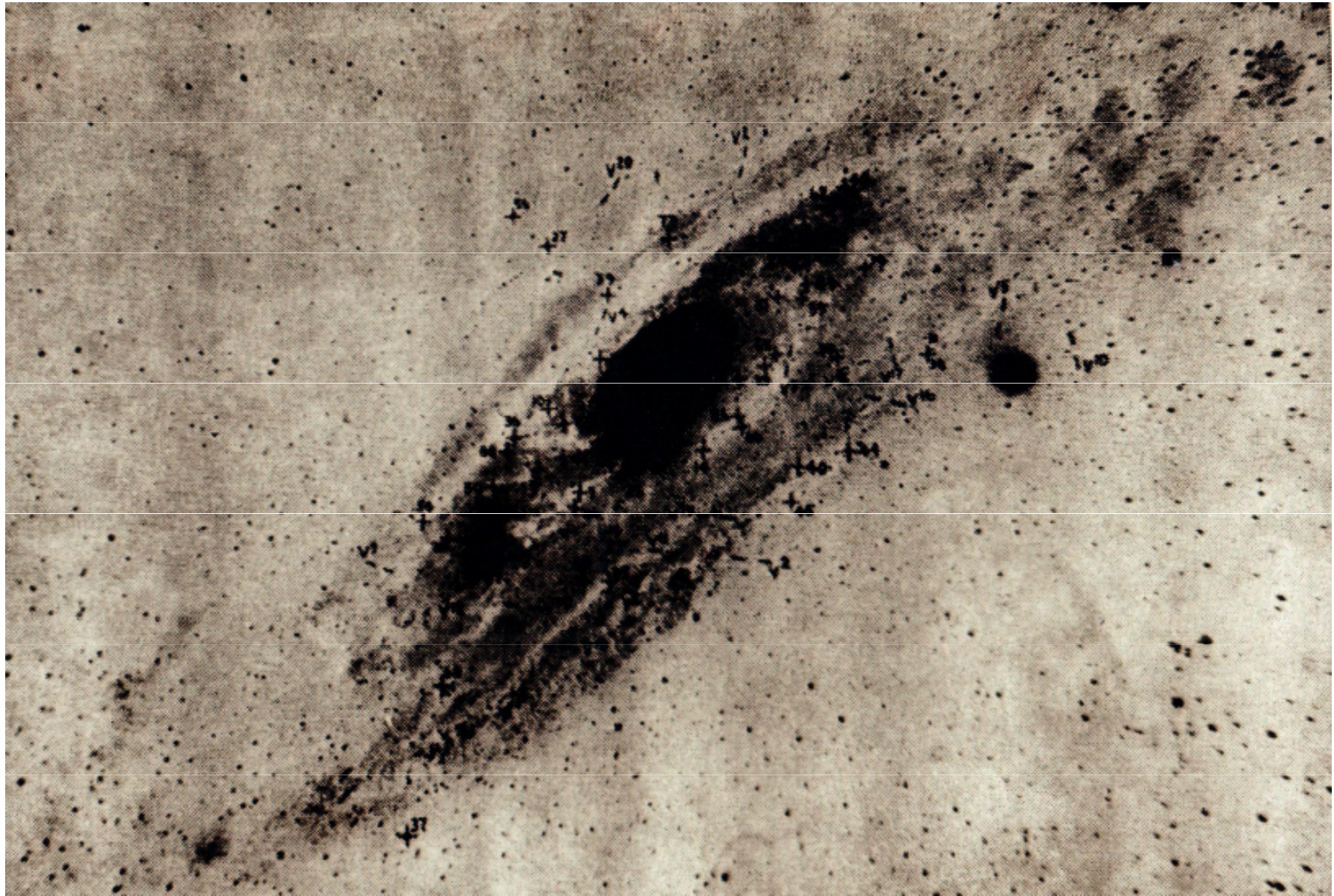


FIGURE 1

Určování vzdáleností – identifikace cefeid v M 31



Určování vzdáleností - cefeidy, družice Hipparcos

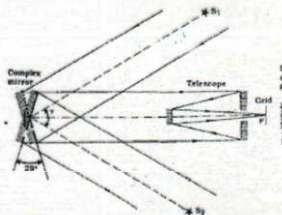
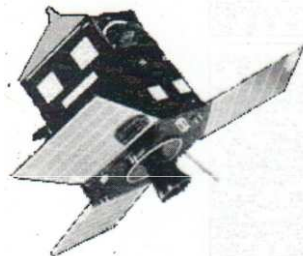
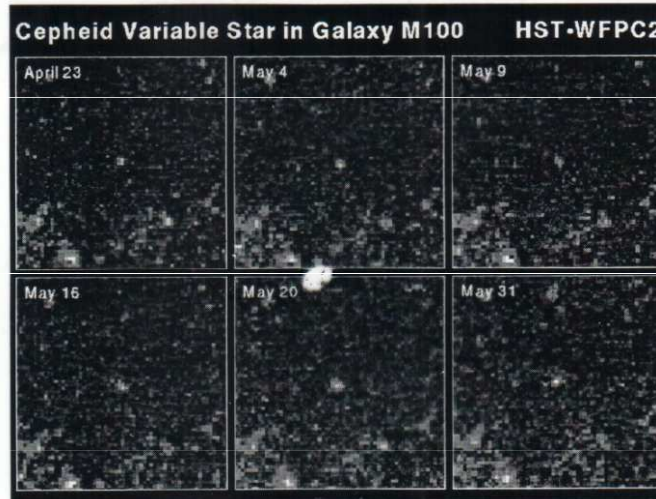
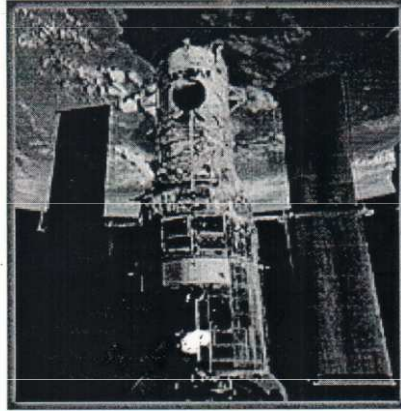


Fig. 8.1. Principle of Hipparcos. The images I_1 and I_2 of stars S_1 and S_2 in different fields of view are formed on the grid which modulates them while the satellite turns around an axis perpendicular to the plane of the drawing.

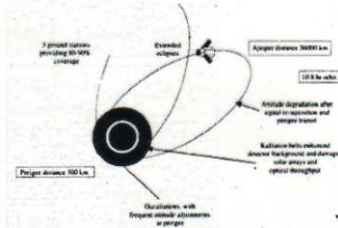
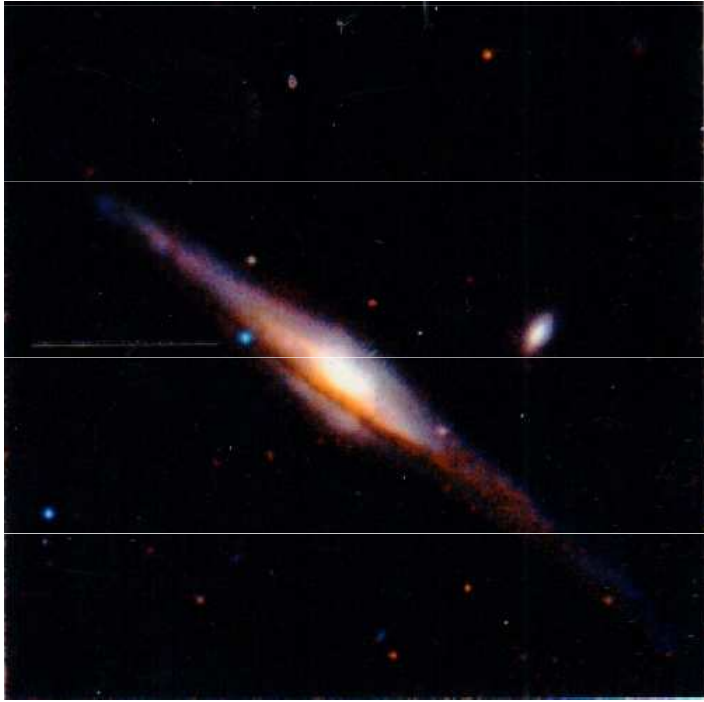


Figure 8.2. The "retard" or "butterfly" effect from which the Hipparcos observations were conducted. The distance of the stars which provided considerable observational complications are indicated. The satellite could be observed for about 90-90 per cent of the time with three ground stations, compared with 100 per cent of the time in the intended parallax-free orbit.

Supernovy Ia

- **těsná dvojhvězda: normální hvězda + bílý trpaslík (uhlíko-kyslíkový).**
- **přetékající plyn se prostřednictvím akrečního disku ukládá na trpaslíka, při překročení hmotnosti $1,4 M_{\odot}$ - Chandrasekharovy meze dochází ke gravitačnímu kolapsu.**
- **exploduje celý bílý trpaslík $10^9 L_{\odot}$.**
- **$V_{\text{exp}} = 25\,000 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, neexistence vodíkových čar.**

Určování vzdáleností - supernovy Ia



Metoda supernov Ia v maximu jasnosti $M = -18,7$ mag

$$m - M = 5 - 5 \log r \quad \dots \quad \log r = 1 + 0,2 (m - M)$$

Určování vzdáleností galaxií

Hubbleův - Lemaitrův zákon

Edwin Powell Hubble

Hubbleův zákon $z = \frac{\lambda_p - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{lab}} \quad v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{lab}} = c z = H r$

1889 - 1953

$r = \frac{c}{H} z$ při $z > 0,1$ $v = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$

$v = H \cdot r$

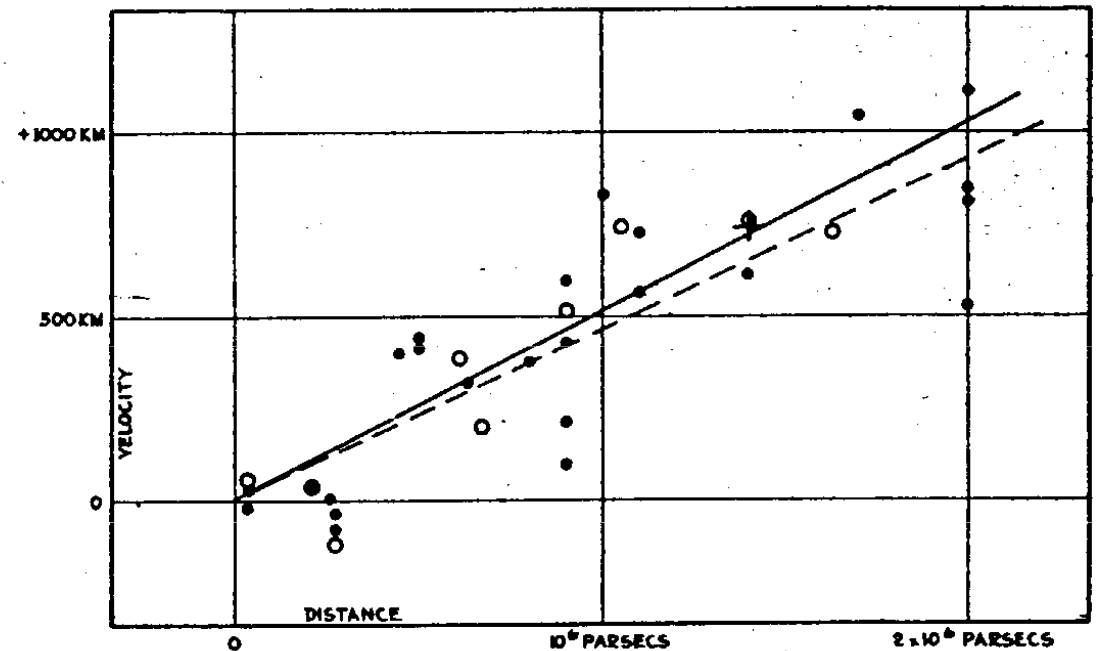


FIGURE 1

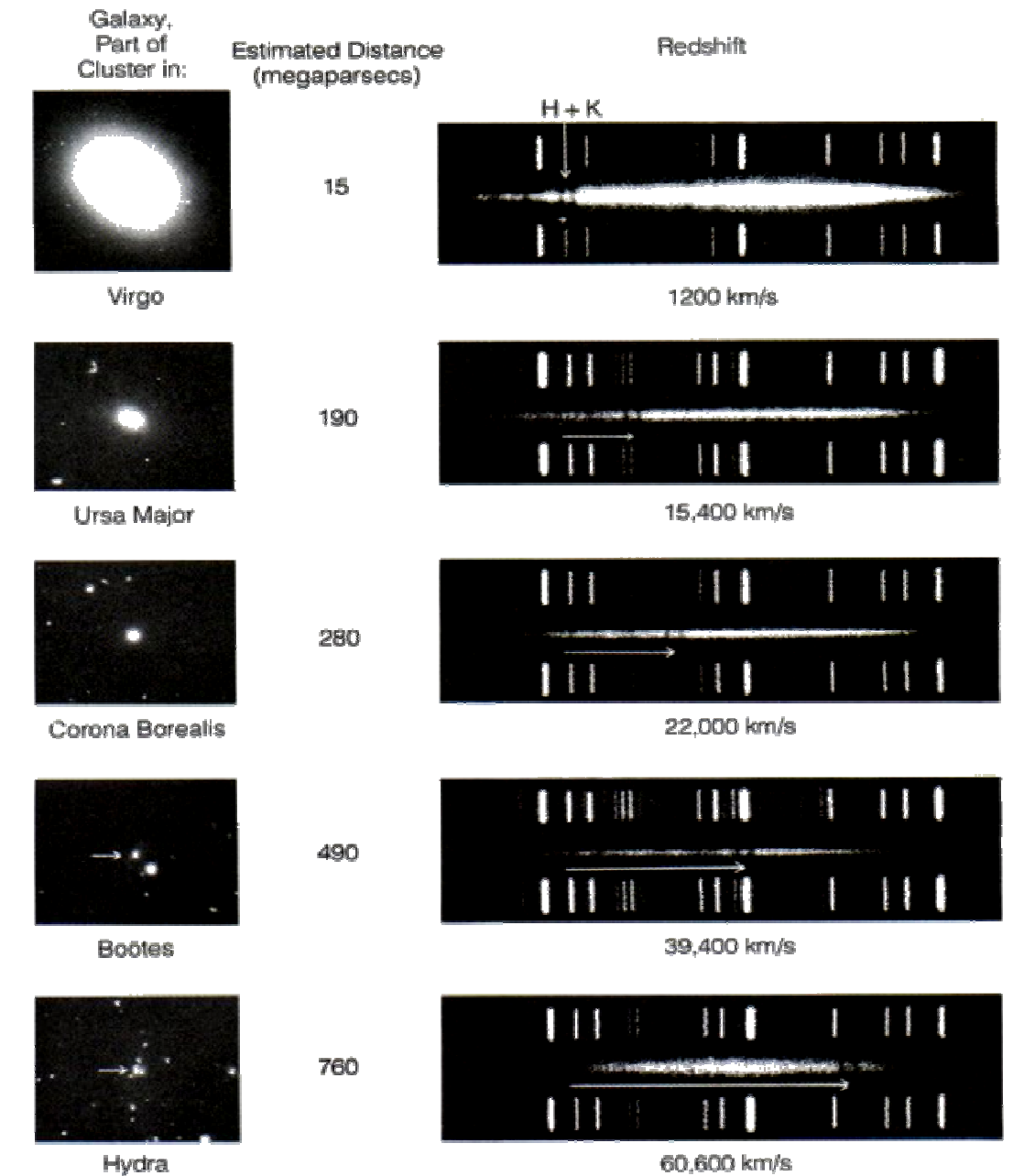
Hubbleův - Lemaitrův zákon

$$r = \frac{v}{H}$$

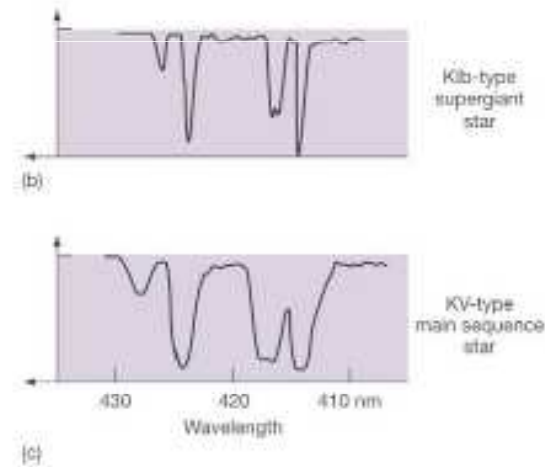
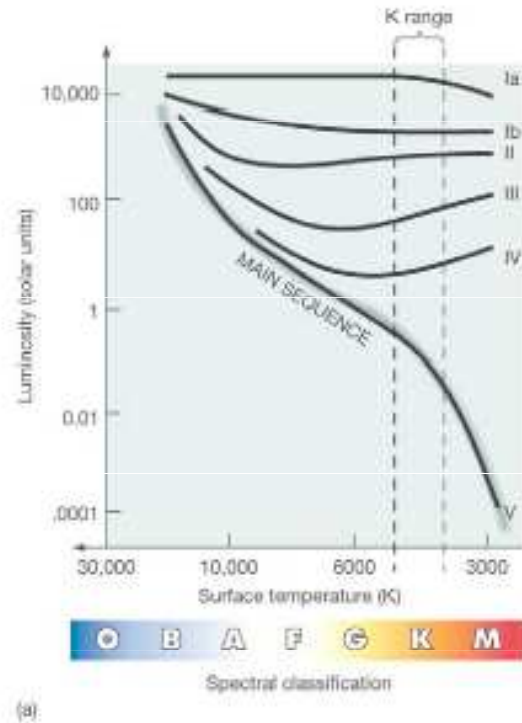
$$v = c \cdot z = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}$$

pro $z > 0,1$

$$v = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

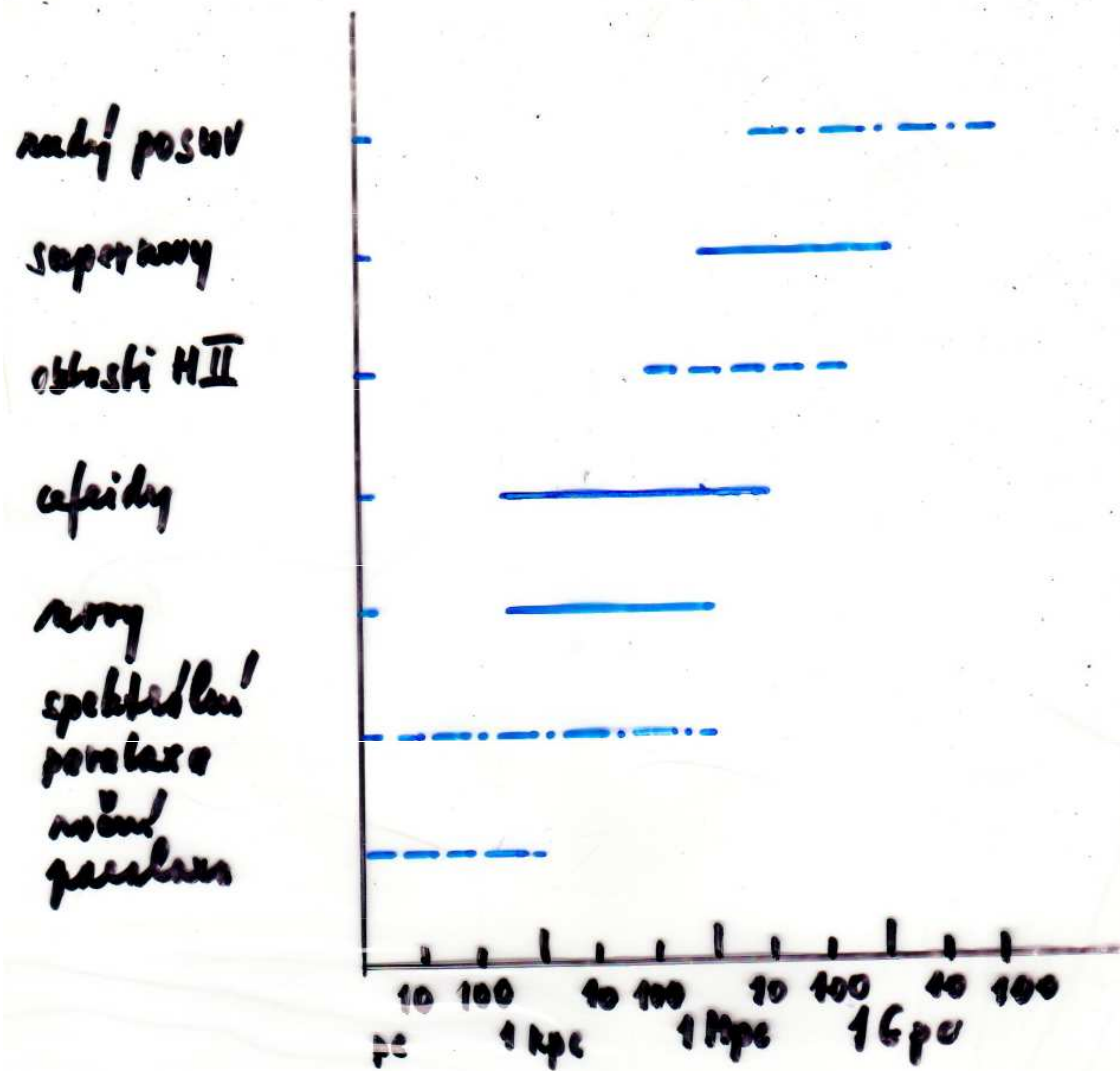


Spektrální paralaxa hvězd



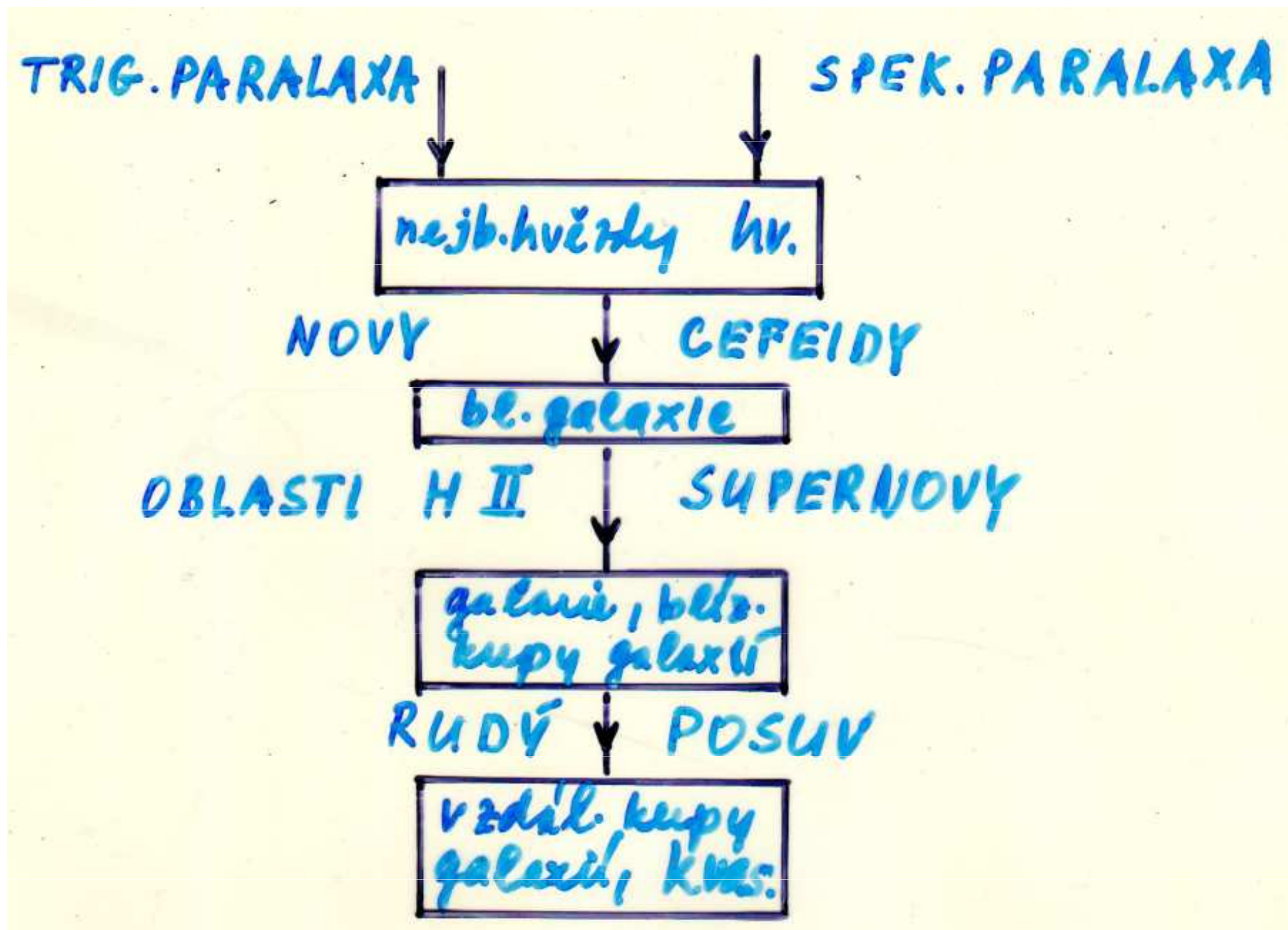
podle intenzity vybraných spektrálních čar - rozlišení obrů a hvězd HP

Určování vzdáleností - přehled metod



milosirny
spektrální
fotometricky

Určování vzdáleností - přehled metod

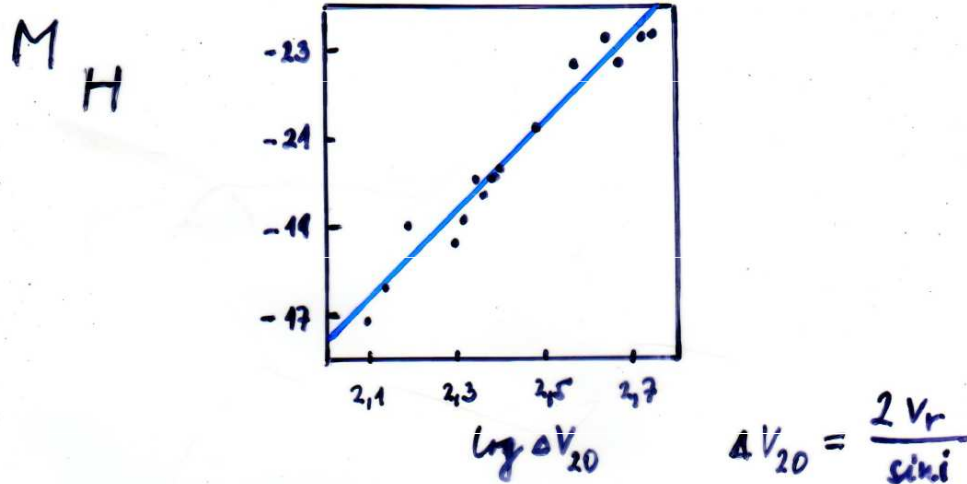


Určování vzdáleností spirálních galaxií - Tully-Fisher

R. Brent Tully & Richard Fisher 1977

$$M_H = -10.0 \log_{10} \left(\frac{2v_r}{\sin i} \right) + 3,61$$

infač. H ... 1,66 μm



preciznost $\pm 0.28 \text{ mag}$ v infačování

rozsah, použitelnost $> 100 \text{ Mpc}$

vzdálení spirálních galaxií; profil emisní čáry HI

21 cm; čára rotace rotačním pohybem

TF vztah... mezi rotační rychlostí a středním výkonem

$$(\Delta v_0)^2 \sim \frac{Mv}{R}; \quad R = \alpha \cdot r; \quad Mv \sim (\Delta v_0)^2 \alpha r$$

$$\frac{Mv}{L} = \dots$$