

# **Astrofyzika V.**

**Zdroje energie hvězd,  
Odchod z hlavní posloupnosti,  
závěrečná stadia vývoje hvězd**

**Vladimír Štefl**

**Ústav teoretické fyziky a astrofyziky**

# Výzkum Slunce – co je zdrojem energie?

*zelený paprsek*, atmosféra – hranol, atmosférická refrakce  
je větší pro **kratší vlnové délky**, **modré světlo** zeslabováno  
silněji než *zelené*



# Uvolňování energie ve hvězdách

podmínka dlouhodobosti zdrojů

$L \sim 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$  , nejstarší horniny Země, Měsíc –  $t \sim 4,5 \cdot 10^9 \text{ r}$

potřebná energie  $E = L \cdot t = 4 \cdot 10^{26} \cdot 4,5 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^7 = 5,4 \cdot 10^{43} \text{ J}$

gravitační potenciální energie  $10^{41} \text{ J}$

termonukleární reakce  $\Delta E = \Delta m c^2$

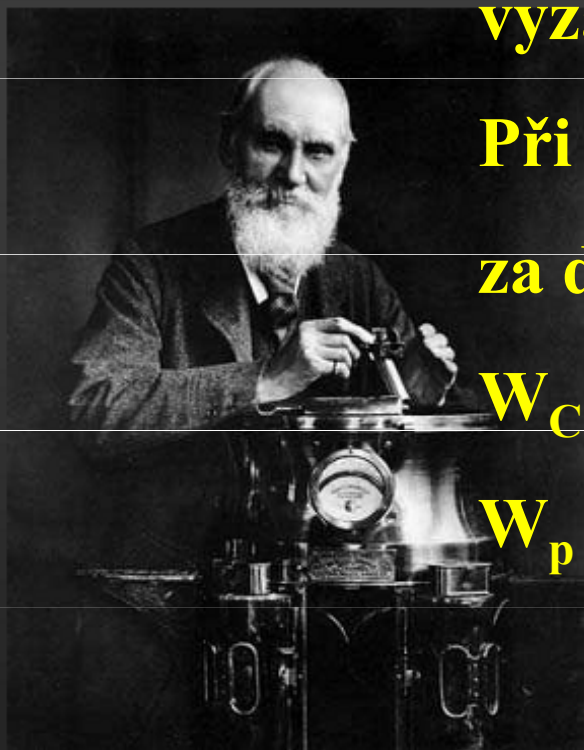
účinnost termonukleárních reakcí 0,7 %

odhad při podmínce vzniku prvků až po železo  $\Delta m c^2 = 0,007 M_{\odot} c^2 \sim 10^{45} \text{ J}$

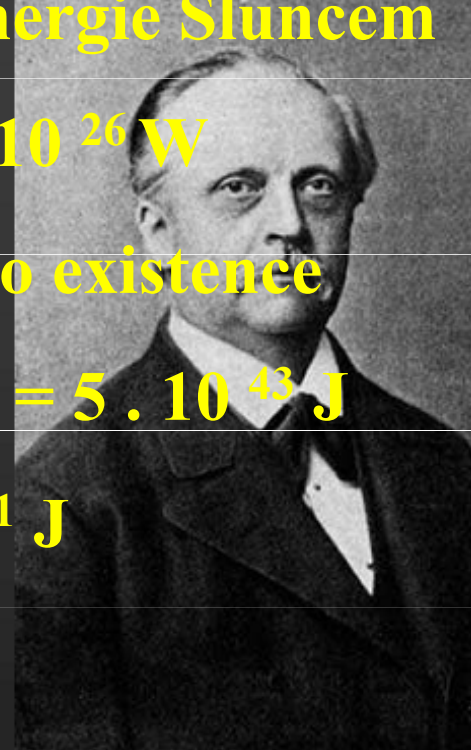
**dostatečný zdroj energie**

# Zdroj energie Slunce - gravitační energie?

Powering the Sun: Gravitational Energy???



Lord Kelvin (1824-1907)



Hermann von Helmholtz  
(1821-94)

vyzářená energie Sluncem

Při  $L_S = 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$

za dobu jeho existence

$W_C = L_S \cdot t = 5 \cdot 10^{43} \text{ J}$

$W_p = -10^{41} \text{ J}$



# Zdroje energie

**H . N. Russell (1877 - 1957) formuloval požadavky na zdroje energie hvězd**

1. Uplatňují se při vysokých teplotách a hustotách, tedy v nitrech hvězd, nikoliv planet
2. Zvýšení uvolňování energie nesmí vést k explozivním procesům
3. Velikost uvolňované energie je regulována, platí zářivá rovnováha

# Zdroj energie hvězd – hmotnostní úbytek



- Chaplin to Einstein: “People love me, because they understand *everything* I say, and they love you, because they understand *nothing* of what you say...”

# Zdroje hvězdné energie

Zdroje hvězdné energie

gravitační potenciální energie

$$W_p = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} \quad \text{při } \rho = \text{konst.}$$

pro slunce

$$W_p \approx -10^{41} \text{ J}$$

termodynamická energie

potenciální energie elektrostatické

částic

$$2 \text{ protony} : E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \approx 10^3 \text{ keV}$$

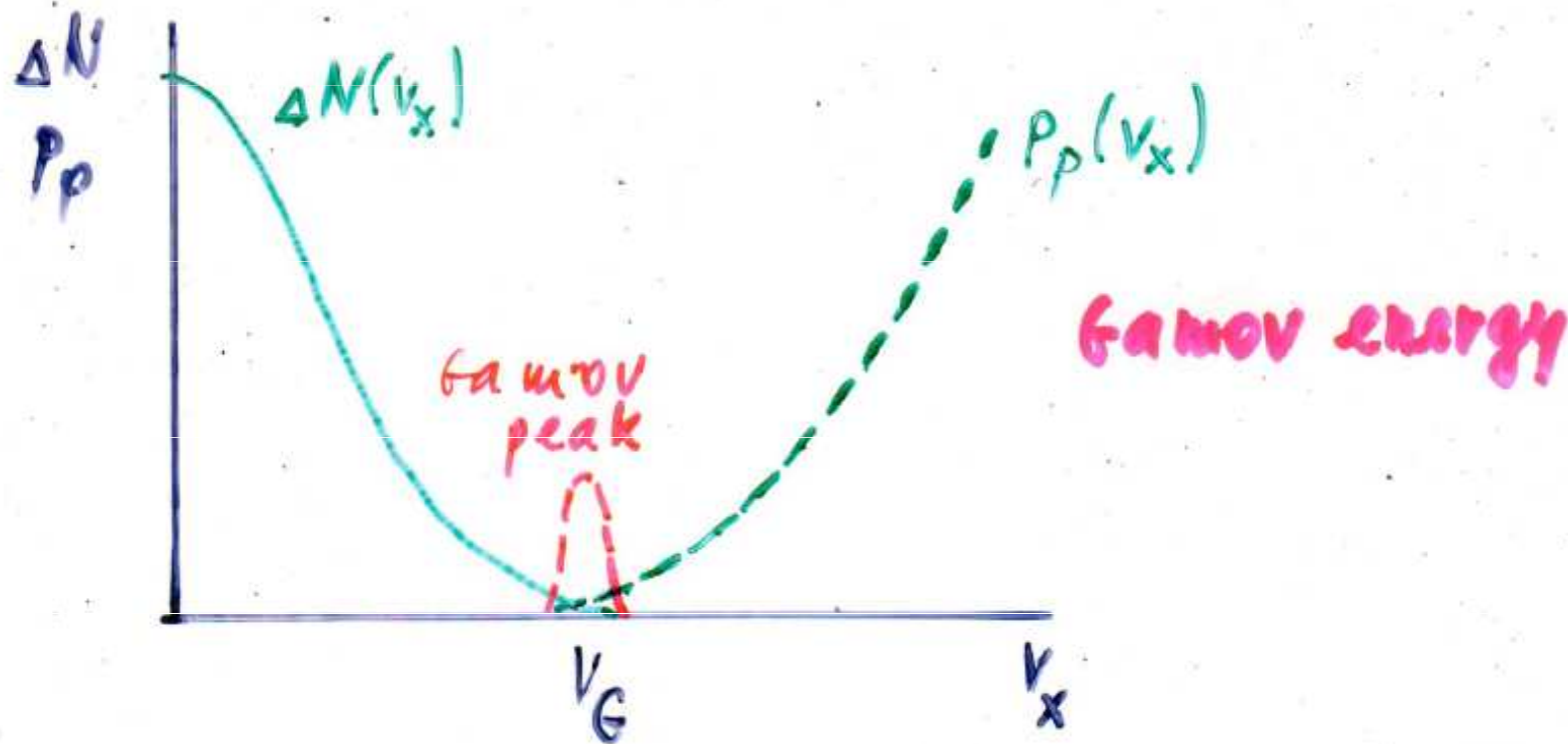
k dispozici pouze 1 keV

?

a) kinetická nebo statistická energie

↓ 4) hustoty je!

# Zdroje hvězdné energie



rodilemí rychlostí  $\Delta N(T_x) \sim T_x$  —

prodlížděním průmíku pot. vlnem  $P_p(T_x) \sim T_x$  ---

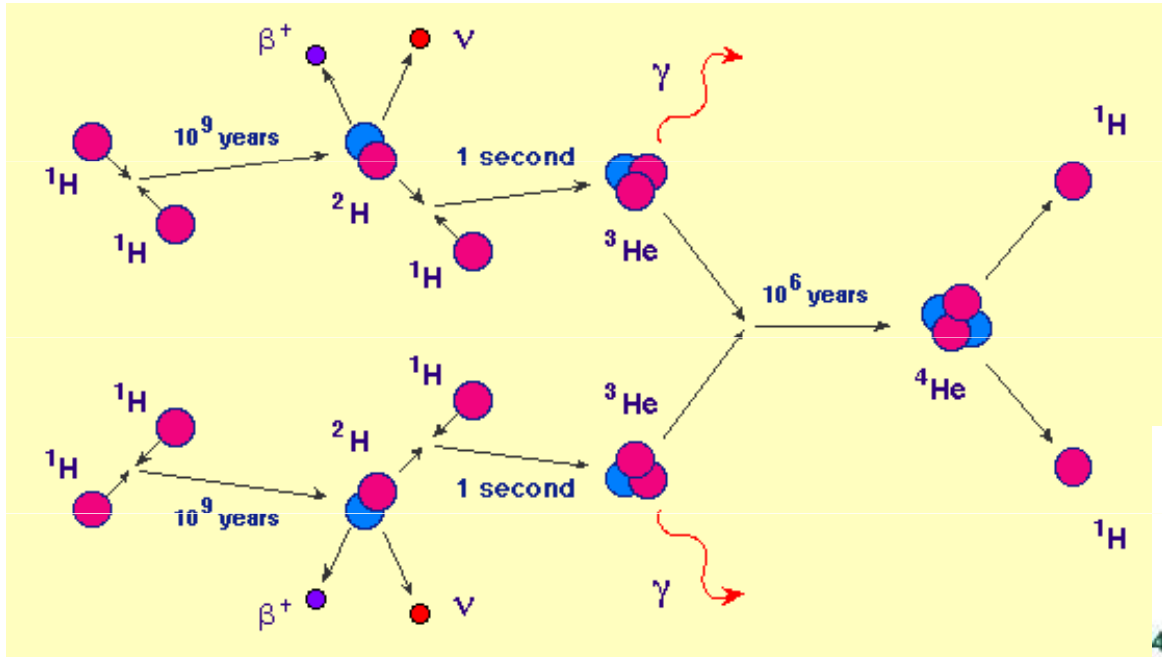
výsledk, vzhledem k tomu  $f_{\nu}$  ---

nebo  $\begin{matrix} \sqrt{2}l \\ 22l \end{matrix}$

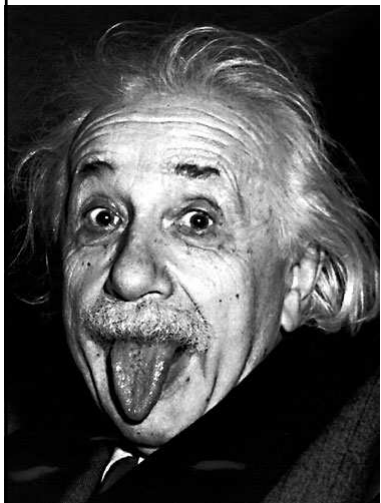
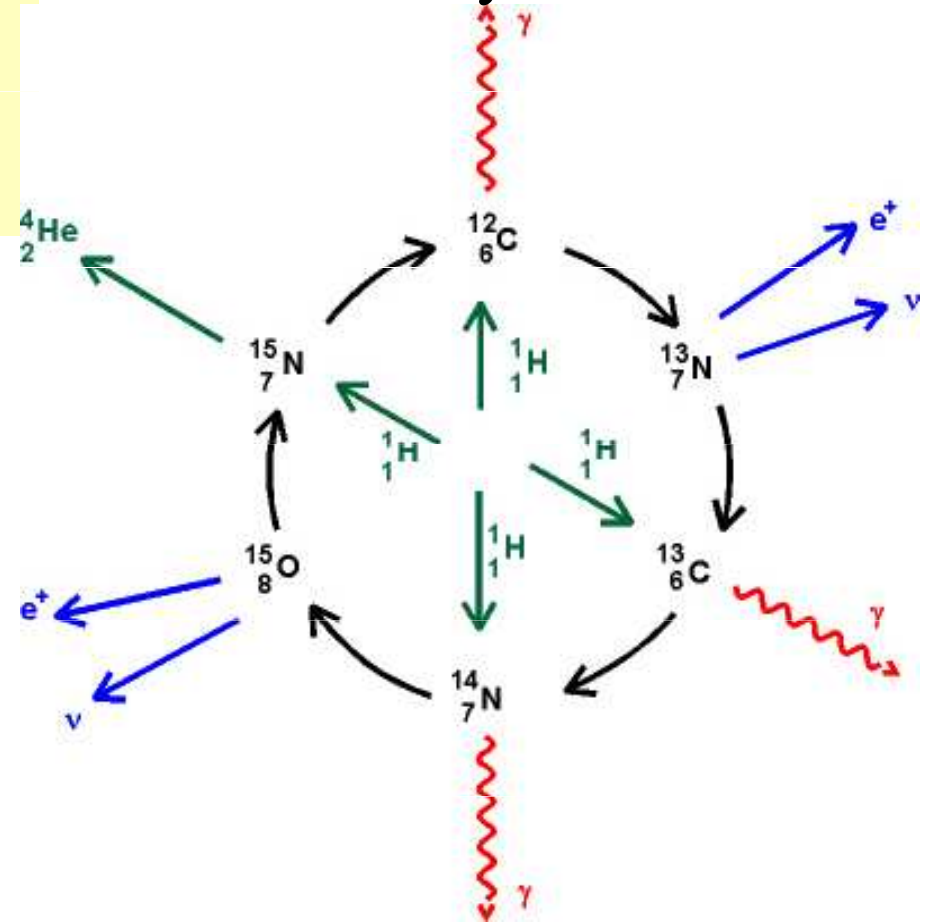


# Termonukleární reakce - řetězce a cykly

p-p řetězec



CNO cyklus



$$\Delta E = \Delta m c^2$$

$$4m_p - m_{\text{He}} = 5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

pro Slunce

$$\Delta m = 4 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

# Termonukleární reakce p-p řetězec

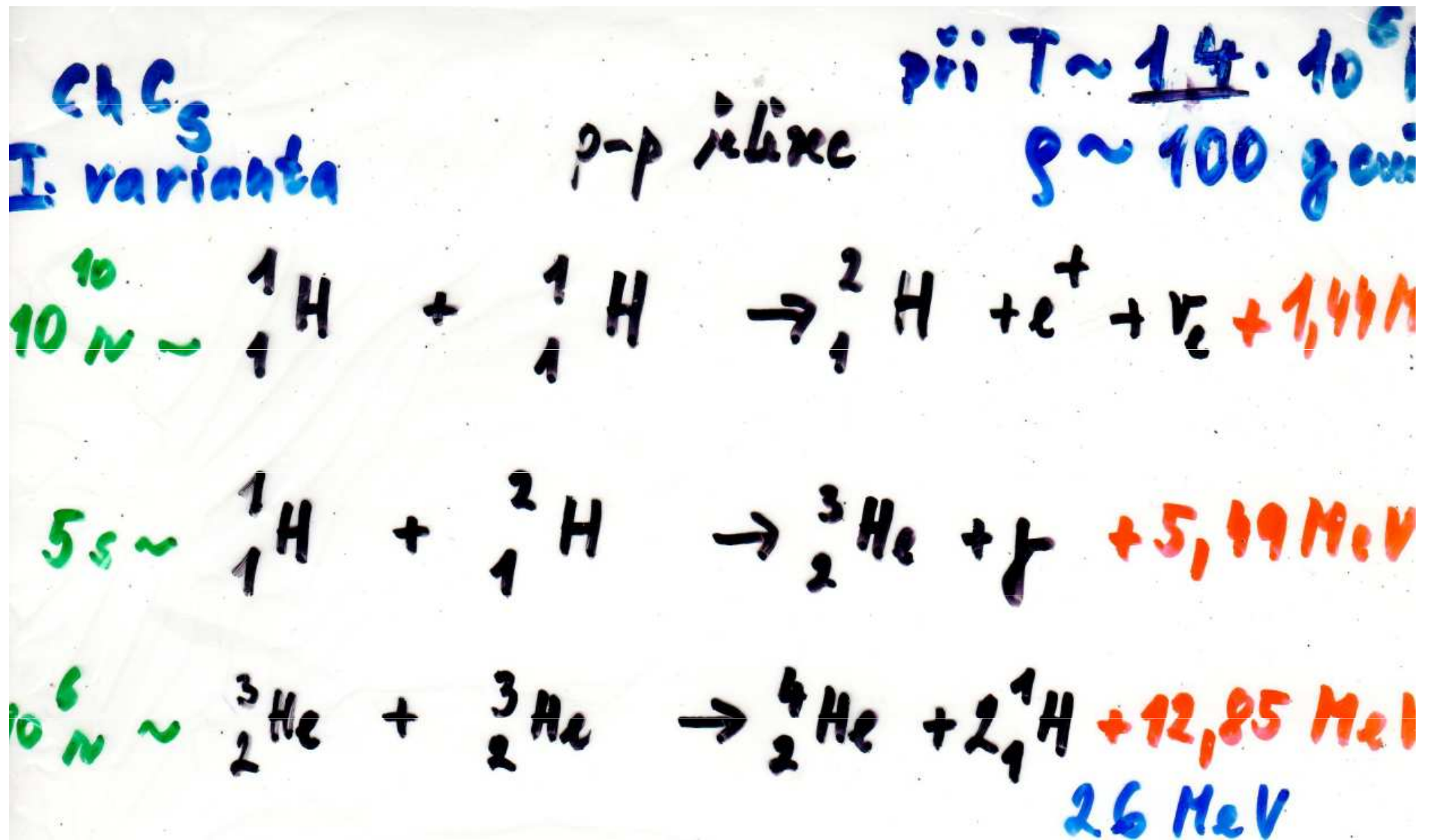
spodní část HP, T (5 - 16) milionů stupňů, ze čtyř protonů vznik jádra atomu helia, první varianta, přes 70 % pravděpodobnost



**druhá varianta**



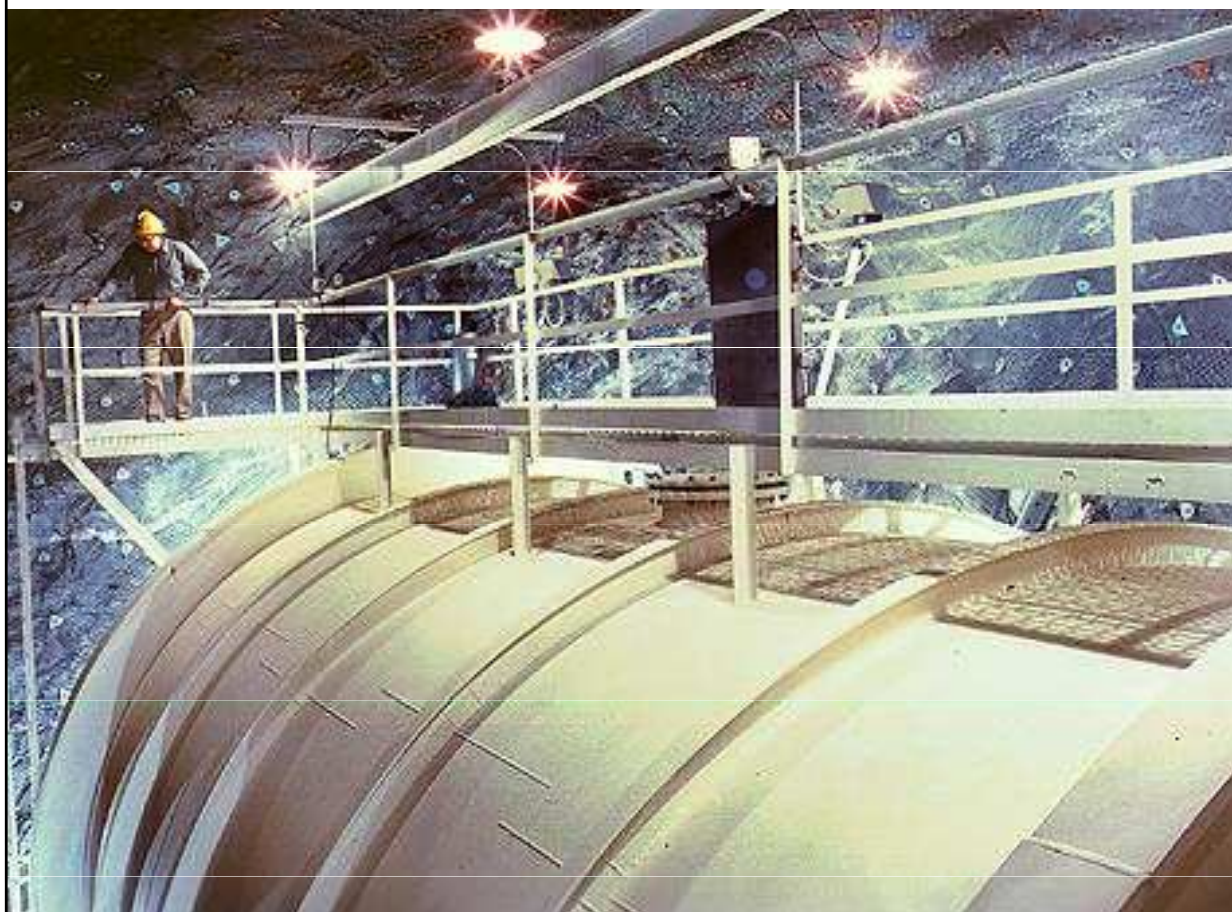
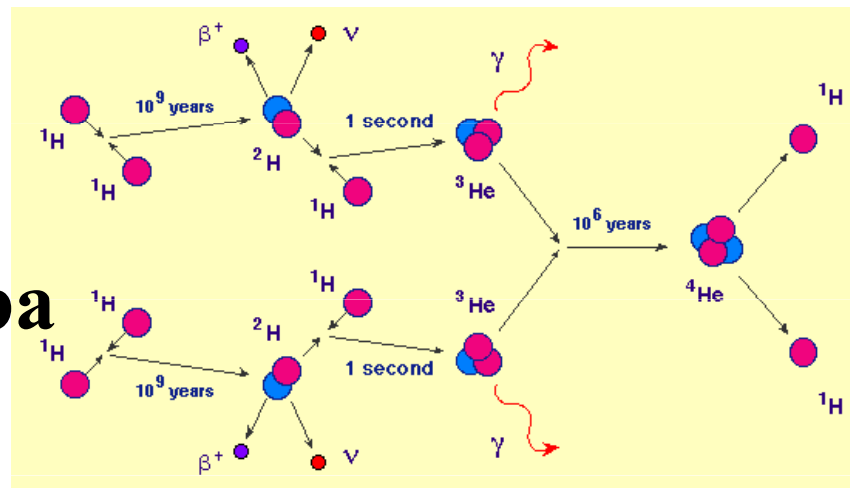
# Termonukleární reakce p-p řetězec



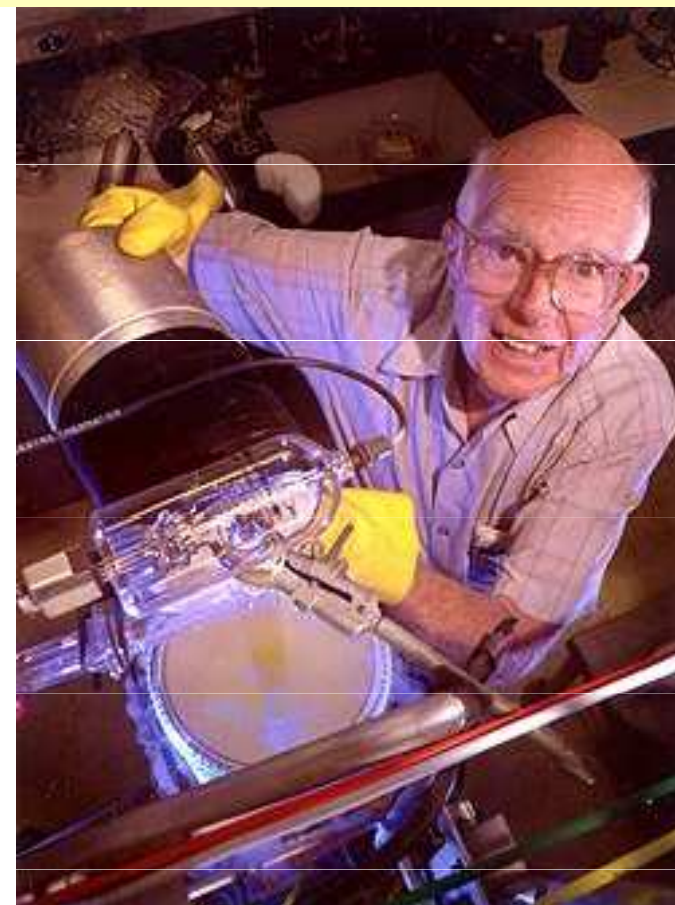
# Detekce slunečních neutrin

Nobelova cena za fyziku r. 2002

Raymond Davis, Masatoshi Koshiba



Davisův experiment běžel nepřetržitě od roku 1970 do roku 1994 a za tu dobu vzniklo v Davisově cisterně díky slunečním neutrinům asi 2200 atomů radioaktivního argonu. Foto R. Davis.



Raymond Davis Jr., čerstvý nositel Nobelovy ceny.  
Foto Brookhaven National Laboratory.

# Neutrinový skandál

asi 0,5 MeV odnáší vzniklá neutrina  
provádíme jejich detekci na Zemi pomocí  
chlor - argonové reakce

Davies  
Nobelova cena!  
2002.



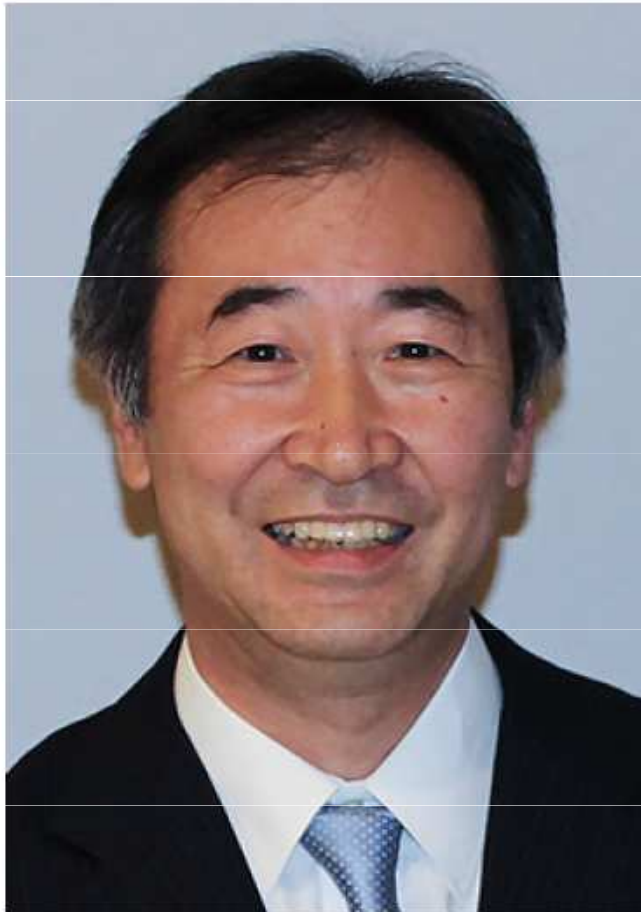
neutrina přeměňuje jeden neutron v jádro  
na proton, vzniká izotop argonu  ${}_{18}^{37}\text{Ar}$  a  $e^{-}$

chlor;  
pro inkorporaci jsou potřebná neutrina  
s energií  $\sim 0,814 \text{ MeV}$

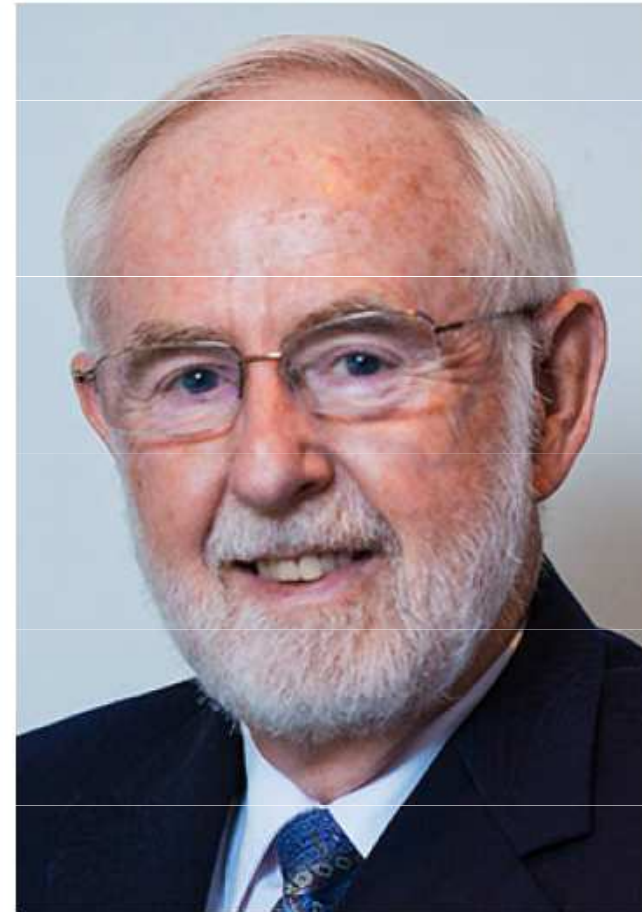
# Nitro Slunce - neutrina vysvětlení

Objev oscilací neutrin byl oceněn Nobelovou cenou za fyziku 2015

*Abstrakt.* Nobelovu cenu za fyziku pro rok 2015 získali stejným dílem Takaaki Kajita z Tokijské univerzity v Japonsku a Arthur Bruce McDonald z Queen's University v Kingstonu v Kanadě za objev oscilací neutrin. Oficiální citace nobelovského výboru zní: „for the discovery of neutrino oscillations, which shows that neutrinos have mass“.



Takaaki Kajita



Arthur Bruce McDonald

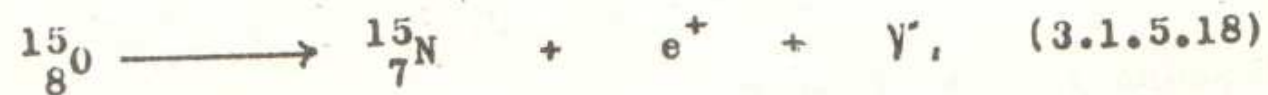
# Nitro Slunce – neutrina

Z detailního měření rozpadů neutrálního kalibračního bosonu Z v experimentech na urychlovači LEP v CERN víme, že **existují právě tři druhy (lehkých) neutrin**, tzv. elektronová  $\nu_e$ , mionová  $\nu_\mu$  a tauonová  $\nu_\tau$  a jejich antičástice  $\bar{\nu}_e$ ,  $\bar{\nu}_\mu$  a  $\bar{\nu}_\tau$ . Elektronová antineutrino byla objevena až 26 let po Pauliho předpovědi v reakci:  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$  antineutrin z jaderného reaktoru. V letošním roce si tedy připomeneme 60. výročí objevu neutrina. V roce 1962 bylo prokázáno, že svazky urychlovačových neutrin z rozpadů nabitých pionů při interakcích s protony a neutrony produkují miony, tj. že se jedná o mionová neutrina. Existence tauonového neutrina byla experimentálně prokázána až v roce 2000.

**Sluneční neutrina.** Intenzivním zdrojem *elektronových neutrin* je Slunce. Neutrina tam vznikají při jaderné fúzi protonů a v následných beta plus rozpadech anebo elektronovém záchytu vzniklých izotopů lehkých jader. Při fúzi protonů na deuterium:  $p + p \rightarrow {}^2_1\text{H} + e^+ + \nu_e$  vzniká obrovský tok elektronových neutrin s malými energiemi do 0.4 MeV. Přibližně 60 miliard těchto neutrin dopadá každou sekundu na čtvereční centimetr zemského povrchu. Neutrina s velkými energiemi až 15 MeV jsou přibližně dvacetisíckrát méně častá a vznikají především v beta plus rozpadech izotopu boru  ${}^8_5\text{B}$  na dvě alfa částice:  ${}^8_5\text{B} \rightarrow 2 {}^4_2\text{He} + e^+ + \nu_e$ .

# Termonukleární reakce CNO cyklus

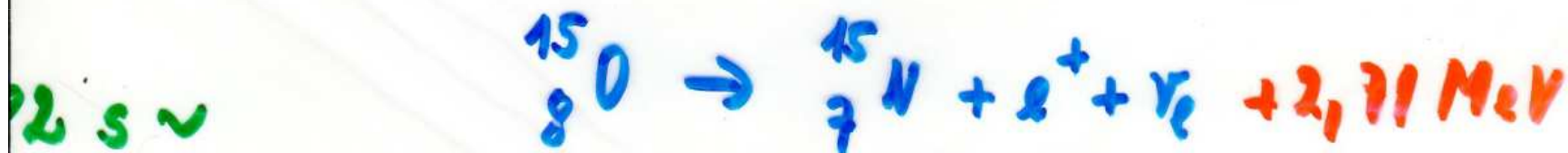
Ve hvězdách horní části hlavní posloupnosti, hvězdách s větší hmotností a vyšší centrální teplotou, přibližně 16 - 50 milionů stupňů, se uplatňuje uhlíkový cyklus, zkráceně CNO cyklus. Rychlost jeho reakcí je mnohem více závislá na teplotě, než rychlost reakcí p-p řetězce. Sled reakcí CNO cyklu je následující.





# Termonukleární reakce CNO cyklus

## CNO cyklus

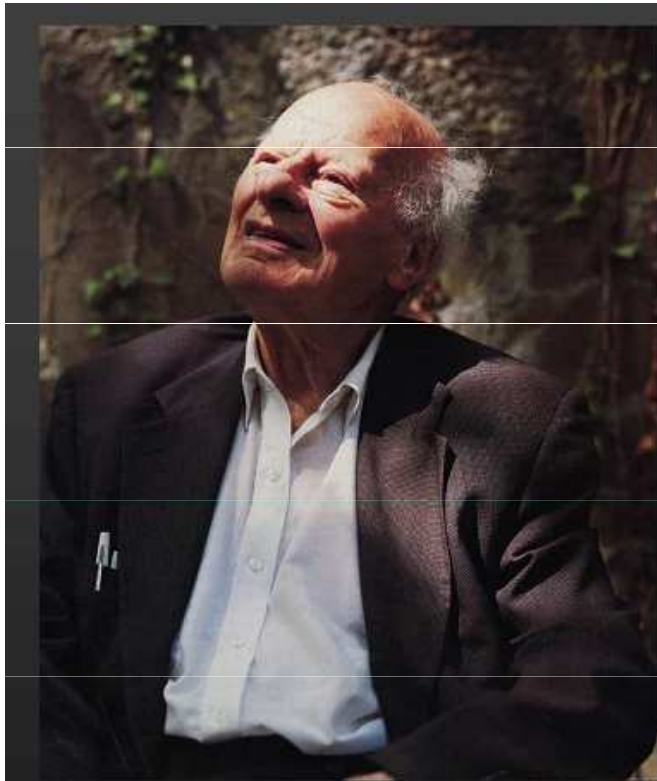
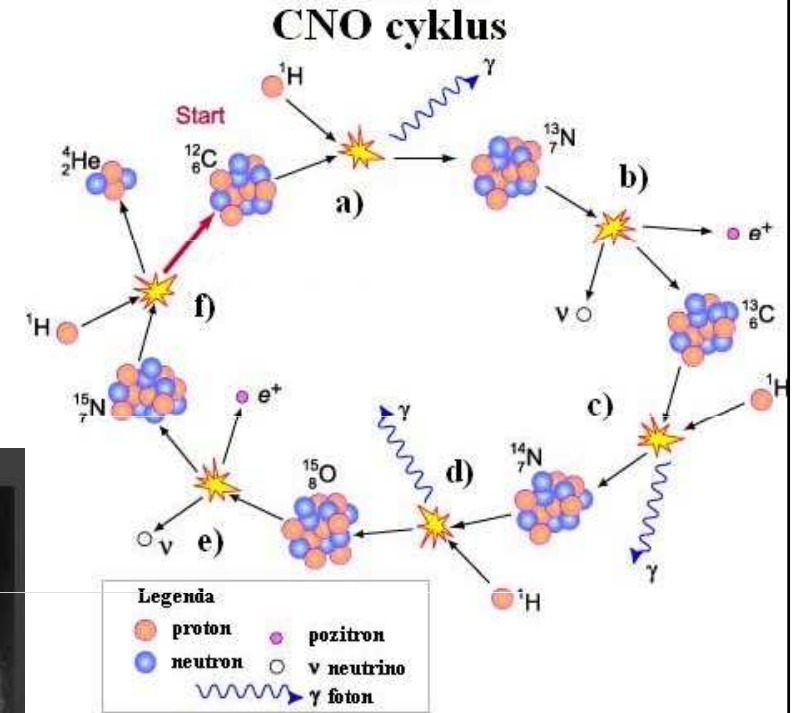


dmínky  $T = 1,4 \cdot 10^7 \text{ K}$ ,  $\rho \sim 100 \text{ g cm}^{-3}$

# Konkrétní typy termionukleárních reakcí

Nobelova cena za fyziku r. 1967

teorie nukleárních reakcí - H. Bethe



Hans Bethe (1906-2005)



Carl Friedrich von Weizsaecker  
(born 1912)

termionukleární reakce -  
dlouhodobý zdroj energie -  
zaručuje  $5 \cdot 10^{45}$  J

# Termonukleární reakce CNO cyklus produkce energie ve hvězdách

H. A. BETHE

Energy production in stars

*Nobel Lecture, December 11, 1967*

## *History*

From time immemorial people must have been curious to know what keeps the sun shining. The first scientific attempt at an explanation was by Helmholtz about one hundred years ago, and was based on the force most familiar to physicists at the time, gravitation. When a gram of matter falls to the sun's surface it gets a potential energy

$$E_{\text{pot}} = -GM/R = -1.91 \cdot 10^{15} \text{ erg/g} \quad (1)$$

where  $M = 1.99 \cdot 10^{33}$  g is the sun's mass,  $R = 6.96 \cdot 10^{10}$  cm its radius, and  $G = 6.67 \cdot 10^{-8}$  the gravitational constant. A similar energy was set free when the sun was assembled from interstellar gas or dust in the dim past; actually somewhat more, because most of the sun's material is located closer to its center, and therefore has a numerically larger potential energy. One-half of the energy set free is transformed into kinetic energy according to the well-known virial theorem of mechanics. This will permit us later to estimate the temperature in the sun. The other half of the potential energy is radiated away. We know that at present the sun radiates

$$\varepsilon = 1.96 \text{ erg/g sec} \quad (2)$$

Therefore, if gravitation supplies the energy, there is enough energy available to supply the radiation for about  $10^{15}$  sec which is about 30 million years.

# Termonukleární reakce možné v důsledku tunelového jevu

## Zur Frage der Aufbaumöglichkeit der Elemente in Sternen.

Von R. d'E. Atkinson und F. G. Houtermans in Berlin-Charlottenburg.

(Eingegangen am 19. März 1929.)

Die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Proton in einen Atomkern eindringt, wird nach der Methode von Gamow berechnet. Dabei zeigt sich, daß unter den Temperatur- und Dichteverhältnissen im Innern der Sterne die Eindringung von Protonen, nicht aber von  $\alpha$ -Teilchen, in leichtere Elemente genügend häufig vorkommt, um dort einen Aufbau dieser Elemente wahrscheinlich erscheinen zu lassen. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, die Energieentwicklung der Sterne aus den Massendefekten der Elemente zu erklären, wobei die Annahme von Sechserstößen für den He-Aufbau vermieden wird. Hieran schließen sich einige weitere hypothetische Betrachtungen über den Aufbau der schwereren Elemente.

Vor kurzem hat Gamow\* gezeigt, daß positiv geladene Teilchen auch dann in Atomkerne einzudringen vermögen, wenn ihre Energie nach klassischen Begriffen nicht dazu hinreicht, also kleiner ist als die zu überwindende Potentialschwelle. Gleichzeitig hat v. Laue\*\* auf die Möglichkeit des Aufbaues von Elementen entsprechend der Nernstschen Hypothese als Konsequenz der Gamowschen Auffassung der  $\alpha$ -Radioaktivität hingewiesen. Da dieser Gedanke für die kosmische Physik von großer Bedeutung sein könnte, bei seiner Anwendung aber auf beträchtliche Schwierigkeiten stößt, möchten wir im folgenden die Möglichkeit derartiger Aufbauprozesse etwas näher diskutieren.

Um eine rohe Orientierung über die Verhältnisse im Innern der Sterne zu gewinnen, wollen wir einige ungefähre Zahlenangaben zusammenstellen. Unter der Annahme thermodynamischen Gleichgewichts ergeben sich nach Eddington\*\*\* Temperaturen von der Größenordnung  $10^7$ , und zwar in keinem Falle mehr als  $4 \cdot 10^7$  Grad, im Mittelpunkt eines Sternes; die Dichte dort kann ziemlich verschiedene Werte annehmen, kann aber für unseren Zweck mit  $10 \text{ g/cm}^3$  angesetzt werden. Unter diesen Umständen sind die leichteren Elemente vollkommen, die schwersten wohl bis auf die L-Schale ionisiert; wegen der zahlreichen freien Elektronen ist das mittlere Molekulargewicht etwa 2 bis 3. Von der Gesamtmasse könnte bei den „frühen“ Sternen vielleicht 10 % aus Wasserstoff bestehen.

R. d'E. Atkinson und F. G. Houtermans, Zur Frage der Aufbaumöglichkeit usw. 657

Bei einer Temperatur von  $4 \cdot 10^7$  ist der Bruchteil der Heliumkerne, die die Energie eines langsamen  $\alpha$ -Teilchens haben, ungefähr  $10^{-640}$ ; an eine direkte Umkehrung des  $\alpha$ -Zerfalls infolge von Temperaturbewegung ist also nicht zu denken, gleichgültig, wie groß die Wahrscheinlichkeit des Prozesses an sich sein mag. Sehen wir aber von einer direkten Umkehrung ab, so bleibt noch die Möglichkeit, daß sehr viel langsamere Teilchen, deren Häufigkeit viel größer ist, irgend einen Aufbau bewirken könnten.

Die Zerfallskonstante eines radioaktiven Elements, das  $\alpha$ -Strahlen der Geschwindigkeit  $v$  emittiert, ist gegeben durch einen Ausdruck der Form

$$\lambda = A \cdot e^{-f(v)}. \quad (1)$$

Die physikalische Bedeutung von  $A$ , das die Dimension  $\text{sec}^{-1}$  hat, ist bis auf einen Zahlenfaktor die Zahl der Stöße des Teilchens pro Sekunde an die Innenwand des „Potentialtopfes“, und die  $e$ -Funktion bedeutet die Durchlässigkeit der Wand pro Stoß\*.  $A$  wird von der Größenordnung  $v/s$  sein, wo  $s$  der Radius des inneren Gebiets positiver kinetischer Energie ist. Die für Eindringung einzusetzende Stoßzahl ist im wesentlichen durch die Größe  $v/A$  gegeben, wo  $A$  die freie Weglänge des Kernes in einem aus He-Kernen bestehenden Gase bedeutet. Der Faktor  $A$  für den Aufbau wird dann gegenüber dem für den Zerfall im Verhältnis  $s/A$  verkleinert; für Sternverhältnisse bedeutet das eine Reaktionsgeschwindigkeit des Aufbaues, die etwa  $10^{12}$  mal kleiner ist als die des Zerfalls\*\*. Hieraus sieht man, daß das neugebildete Atom sich im allgemeinen irgendwie umgestalten muß, am wahrscheinlichsten wohl durch einen mit Ausstrahlung verbundenen Übergang, wenn es nicht sofort einfach wieder zerfallen soll; auf die Rolle, die solche Prozesse zu spielen hätten, kommen wir im folgenden zurück.

Wir wollen nun gleich die Eindringungswahrscheinlichkeit nicht für He-Kerne, sondern für Protonen betrachten, denn, wie sich zeigen wird, ist nur für diese die Überwindung der Potentialschwelle bei Sternentemperaturen praktisch möglich. Unter der Annahme eines Coulombschen Abstoßungspotentials mit einem überlagerten kubischen Anziehungsglied, also

$$U = \frac{Ze^2}{r} - \frac{a}{r^3}, \quad (2)$$

# Termonukleární reakce

## *tunelový jev*

Probability of tunnelling depends upon the energy of the particles, their mass, and the charge:

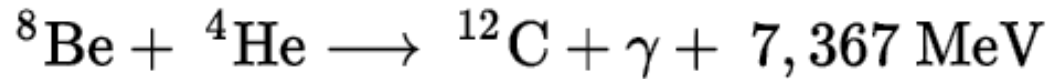
$$P \propto E^{-1/2} e^{-2\pi\eta} \quad \eta = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar E^{1/2}}$$

- P increases rapidly with E
- P decreases with  $Z_1 Z_2$  - lightest nuclei can fuse more easily than heavy ones
- Higher energies / temperatures needed to fuse heavier nuclei, so different nuclei burn in well-separated phases during stellar evolution.

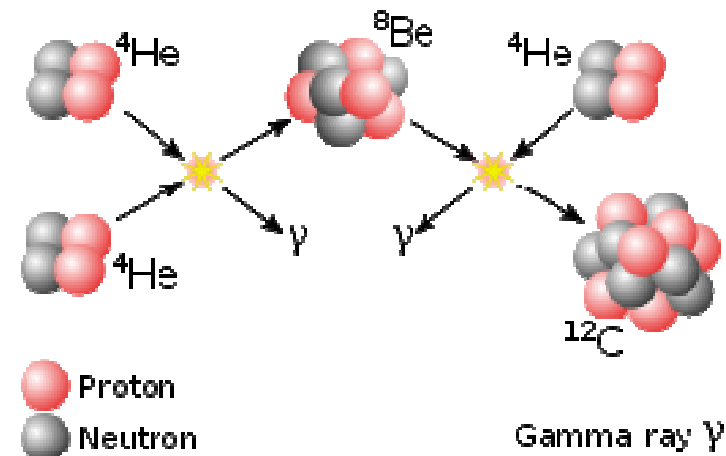
# Zdroje hvězdné energie - reakce 3 $\alpha$



*tzv. Salpeterova reakce*

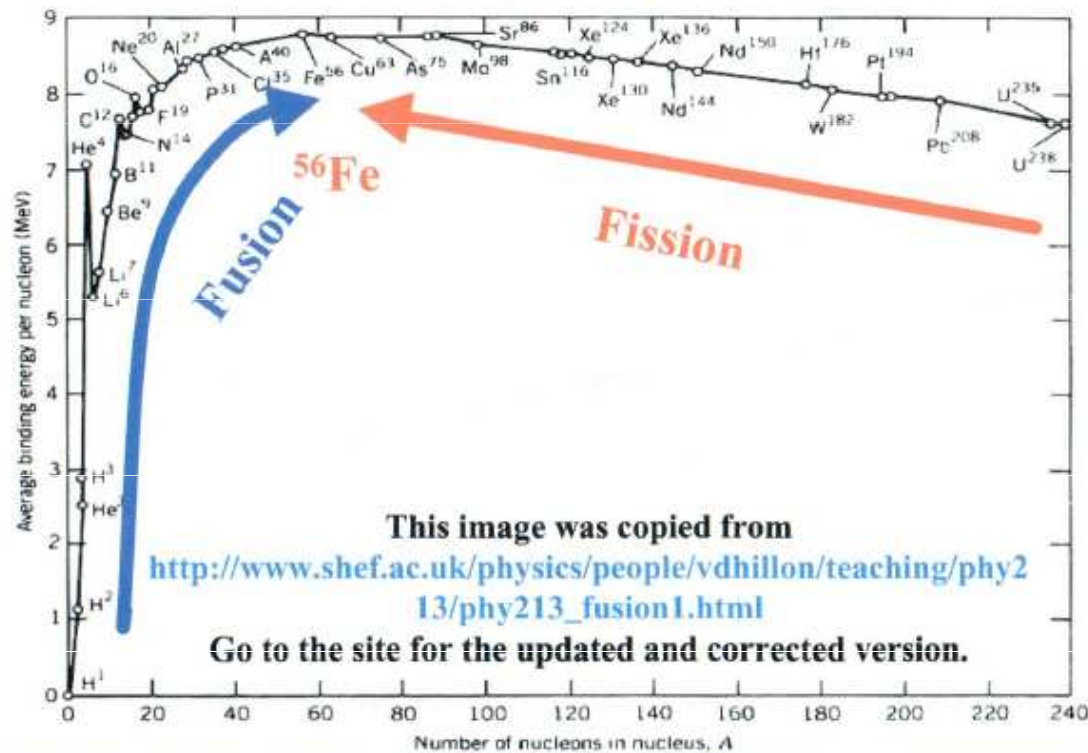


syntéza dvou jader helia dává za vznik jádru berylia, které je nestabilní, ale reakce probíhají rychle, vždy existuje dostatečný počet jader berylia, aby reakce probíhala reakce, při teplotě  $10^8 \text{ K}$ .



# Termonukleární reakce CNO cyklus

## Stellar Nucleosynthesis

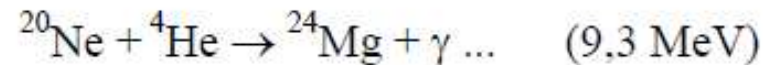


This image was copied from  
[http://www.shef.ac.uk/physics/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213\\_fusion1.html](http://www.shef.ac.uk/physics/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_fusion1.html)  
 Go to the site for the updated and corrected version.

MINIMUM TEMPERATURE	REACTION
$8 \times 10^6 \text{K}$	Proton proton chain
$20 \times 10^6 \text{K}$	CNO cycle
$600 \times 10^6 \text{K}$	Carbon helium fusion
$10^9 \text{K}$	Carbon burning

Process	Fuel	Products	Temperature
Hydrogen Burning	H	He	$1 \times 10^7 \text{ K}$
Helium Burning	He	C, O	$1 \times 10^8 \text{ K}$
Carbon Burning	C	O, Ne, Na, Mg	$5 \times 10^8 \text{ K}$
Neon Burning	Ne	O, Mg	$1 \times 10^9 \text{ K}$
Oxygen Burning	O	Mg-S	$2 \times 10^9 \text{ K}$
Silicon Burning	Si	Fe + nearby elements	$3 \times 10^9 \text{ K}$

# Průběh dalších reakcí alfa procesu



*vznikem hořčíku efektivnost reakcí tohoto typu končí*

Všeobecně platí, že čím složitější jádra se reakcí účastní, tím vyšší musí být pracovní teplota, při nichž tyto reakce účinně probíhají. Současně se snižuje energetický výtěžek termonukleárních reakcí přepočtený na jeden nukleon. Je to důsledek skutečnosti, že s rostoucím atomovým číslem

stabilních nuklidů roste vazebná energie přepočtená na jeden nukleon v jádru stále pomaleji.

Absolutního minima (8,8 MeV/nukleon) dosáhne u jader prvků skupiny železa, u nichž klidný

termojaderný vývoj v nitrech hvězd končí (pokud se k němu hvězda vůbec dostane). Chceme-li

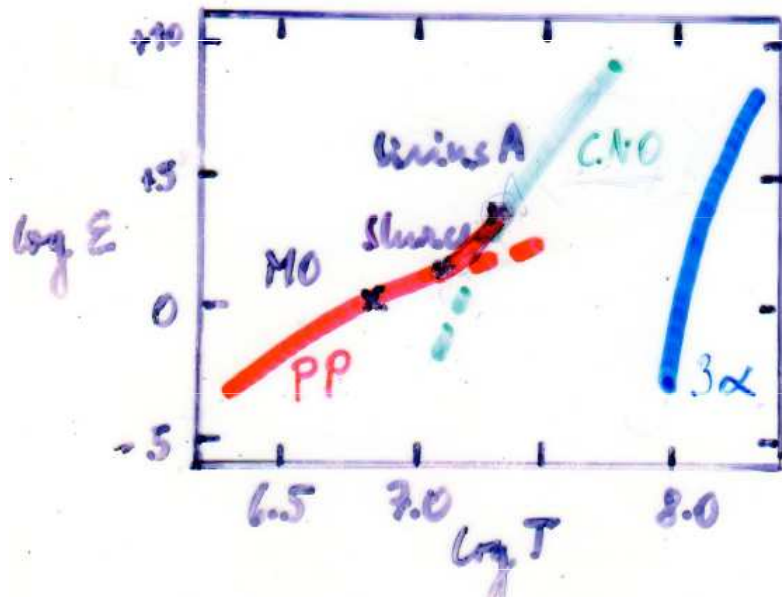
vytvořit těžší prvky, musíme naopak energii dodávat. To je ovšem možné jen při krátkodobých

bouřlivých obdobích hvězdného vývoje, například krátce před vzplanutím supernovy.



# Závislost produkce energie ve hvězdách na teplotě, hustotě

$$\begin{aligned} \epsilon_{pp} &\sim \rho T^5 \\ \epsilon_{CNO} &\sim \rho T^{16} \\ \epsilon_{3\alpha} &\sim \rho^2 T^{30} \end{aligned}$$



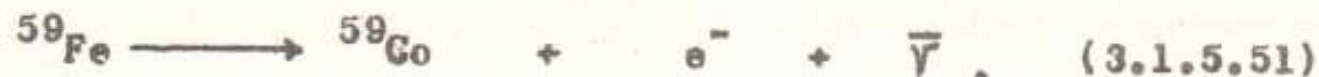
pp řetězec M0  
CNO cyklus A0

energie uvolněná  
1 g látky

# Průběh dalších reakcí - vznik prvků

*při teplotě  $4 \cdot 10^9$  K a poměru počtu protonů/neutronů = 300 nastává tzv. rovnovážný stav, reakce e procesu vedou ke vzniku jader atomů prvků skupiny železa s maximální vazebnou energií na jeden nukleon*

Při tzv. s - procesu, což je pomalé zachycování neutronů, se nestabilní jádro rozpadá dříve, než stačí zachytit další neutron, například



Naopak při rychlém r - procesu je tok neutronů velmi intenzivní a nestabilní jádro zachytí další neutrony dříve, než dojde k jeho rozpadu.

Pro klidný vývoj ve vyhořelých nitrech červených obrů je charakteristický s - proces, zatímco r - proces se uplatňuje u hvězd, kde přestavby nitra jsou náhlé a jsou doprovázeny explozivními změnami, jako například u supernov.

# Termonukleární reakce - vznik chemických prvků v nitru hvězd

## REVIEWS OF MODERN PHYSICS

VOLUME 29, NUMBER 4

OCTOBER, 1957

### Synthesis of the Elements in Stars\*

E. MARGARET BURBIDGE, G. R. BURBIDGE, WILLIAM A. FOWLER, AND F. HOYLE

*Kellogg Radiation Laboratory, California Institute of Technology, and  
Mount Wilson and Palomar Observatories, Carnegie Institution of Washington,  
California Institute of Technology, Pasadena, California*

“It is the stars, The stars above us, govern our conditions”;  
(*King Lear*, Act IV, Scene 3)

but perhaps

“The fault, dear Brutus, is not in our stars, But in ourselves,”  
(*Julius Caesar*, Act I, Scene 2)

B<sup>2</sup>FH, the „Bible“ of Nuclear Astrophysics

**FHB<sup>2</sup>**

# Časové škály nukleárního hoření

Časové škály jednotlivých fází nukleárního hoření

**25  $M_{\odot}$** , výpočty Weaver; práce C.E. Rolfs

a W. S. Rodney 1988

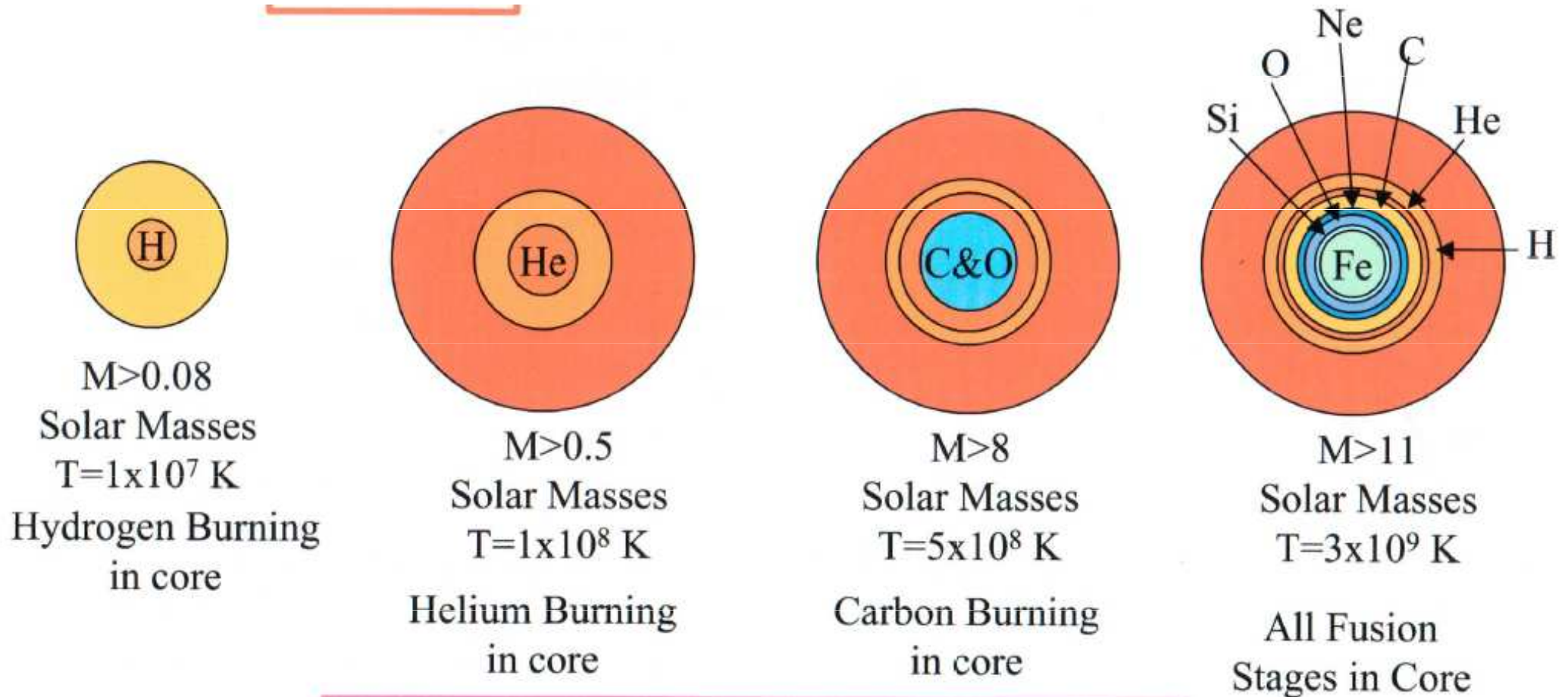
Fáze hoření	Časové škála	Teplota $10^9 K$	Hustota $kg m^{-3}$
vodík	$7 \times 10^6$ r	0.06	$5 \times 10^4$
helium	$5 \times 10^5$ r	0.23	$7 \times 10^5$
uhlík	600 r	0.93	$2 \times 10^8$
neon	1 r	1.7	$4 \times 10^9$
kyslík	6 měsíců	2.3	$1 \times 10^{10}$
křemík	1 den	4.1	$3 \times 10^{10}$

# Přehled vzniku prvků ve hvězdách

Proces	Palivo	Produkt	Teplota	minimální hmotnost M <sub>s</sub>
hoření vodíku	vodík	helium	$2 \times 10^7$ K	0,1
hoření helia	helium	uhlíkykyslík	$2 \times 10^8$ K	1
hoření uhlíku	uhlík	kyslík, neon, sodík, hořčík	$8 \times 10^8$ K	1,4
hoření neonu	neon	kyslík, hořčík	$1,5 \times 10^9$ K	5
hoření kyslíku	kyslík	hořčík → síra	$2 \times 10^9$ K	10
hoření křemíku	hořčík ↓ síra	prvky kolem železa	$3 \times 10^9$ K	20

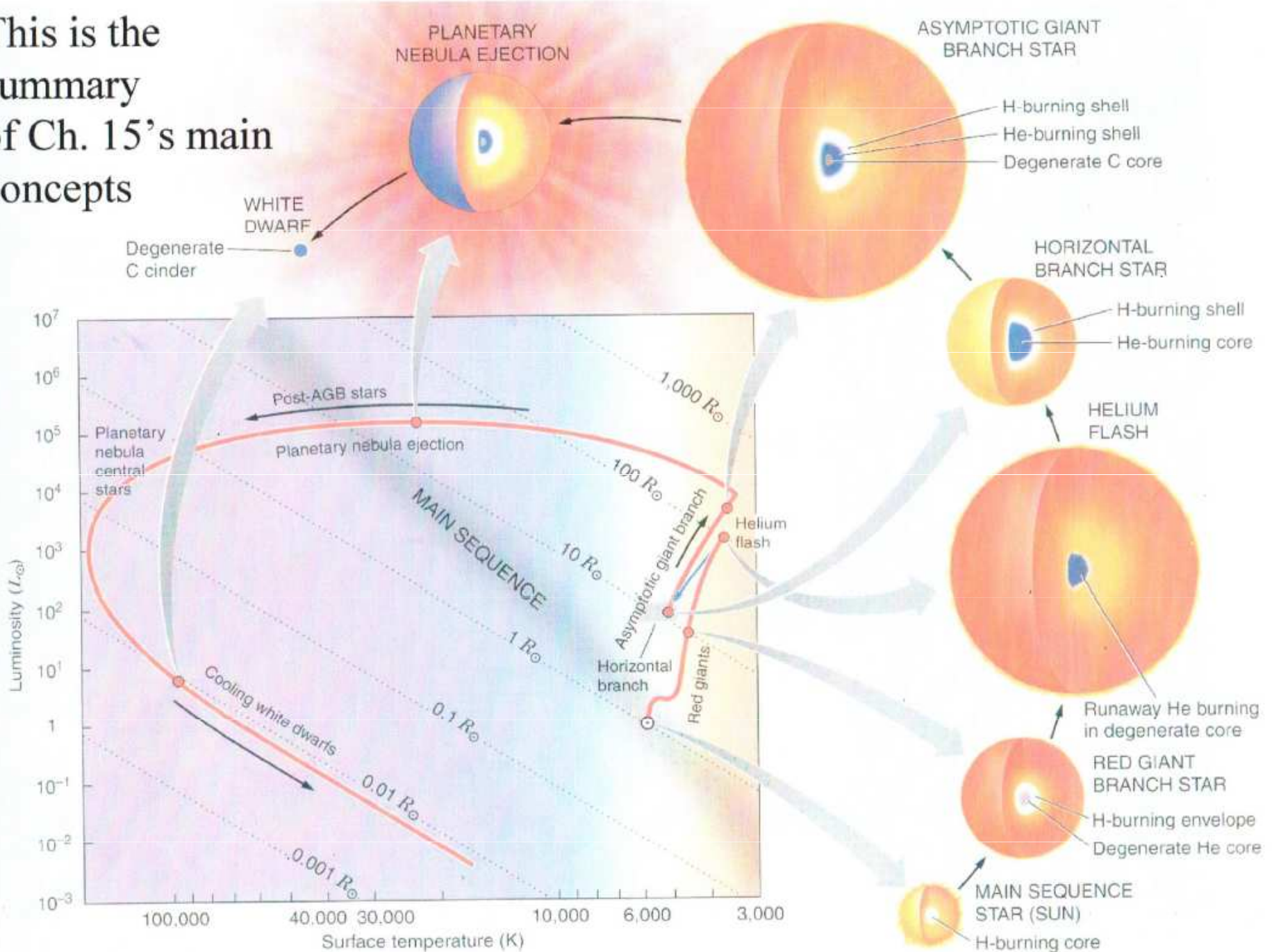
# Stavba nitra hvězd v závěrečných fázích vývoje

*hmotnost určuje teplotu, typy probíhajících cyklů ve hvězdách*



# Odchod z hlavní posloupnosti

This is the summary of Ch. 15's main concepts



# Odchod z hlavní posloupnosti

Vývoj hvězd po odchodu z hlavní posloupnosti závisí na hmotnosti. U hvězd s hmotností větší než  $3 M_{\odot}$  existuje v centrální oblasti konvektivní jádro, které umožňuje dokonalé promíchávání hvězdné látky, takže celé jádro je chemicky stejnorodé. Hvězdy s menší hmotností, jež nemají v centrální oblasti konvektivní jádro, se vyznačují chemickou nestejnou hmotností hvězdné látky. Proto hvězdy různých hmotností mají po odchodu z hlavní posloupnosti relativně odlišný vývoj. Souhrnně je tento vývoj zachycen na vývojových křivkách v H-R diagramu, viz obr. 18, pro hvězdy s hmotností  $1 M_{\odot}$  až  $15 M_{\odot}$ .

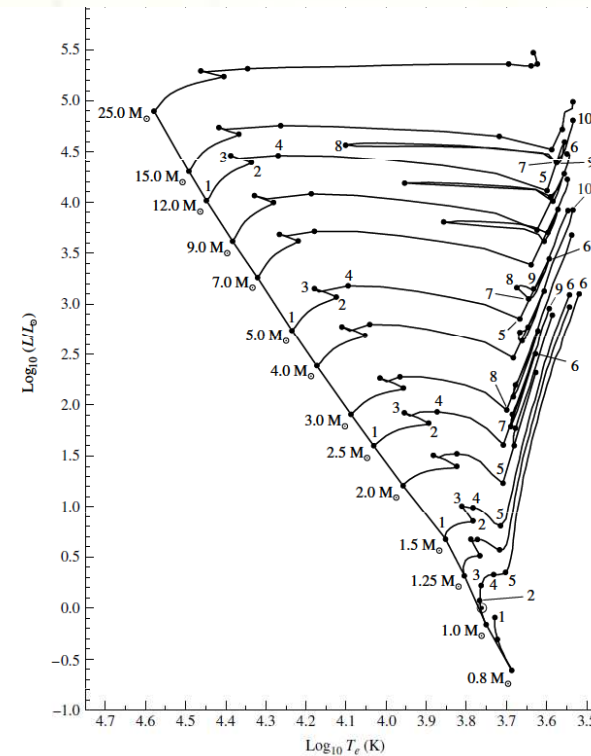


FIGURE 1 Main-sequence and post-main-sequence evolutionary tracks of stars with an initial composition of  $X = 0.68$ ,  $Y = 0.30$ , and  $Z = 0.02$ . The location of the present-day Sun (see Fig. 2)



# Proč a jak vznikají červení obři

1. Nárůst zářivého výkonu jádra.
2. Existenci gradientu střední hmotnosti připadající na jednu částici  $\mu$  mezi jádrem a obalem.
3. Existenci atmosférické opacity, která je rostoucí funkcí teploty.

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_f^4$$

$L \uparrow$  - problém zářivého výkonu  $T$  nebo  $R \uparrow$ ?

$$L = -4\pi r^2 \frac{4acT^3}{3k\rho} \frac{dT}{dr} \quad , T, \kappa, \rho \dots \text{fotosféra}$$

teplotní gradient  $-\frac{dT}{dr} = \frac{\mu GM}{r^2 A} \frac{1}{1+n}$  - optimální index polytropy

univ. plysn. konst.

kombinováno rovnice

obdržíme 
$$L = \left(\frac{16\pi}{3}\right) \left(\frac{acG}{A}\right) \left(\frac{\mu M}{1+n}\right) \left(\frac{T^3}{k\rho}\right)$$

# Proč a jak vznikají červení obří

aplikujeme na atmosféry hvězd  $k = C \rho^{\alpha} T^{\omega}$

dele platí  $\rho \sim \frac{M}{R^3}$  ;  $\rho \sim R^{-3}$

Kramersův  
zákon

$$\frac{\Delta L}{L} = (3 - \omega) \frac{\Delta T}{T} + \gamma(1 + \alpha) \frac{\Delta R}{R}$$

$\bullet$   $\frac{\Delta L}{L} = 4 \frac{\Delta T}{T} + 2 \frac{\Delta R}{R}$  ; úpravou získáme

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\alpha}{\omega + 5} \frac{\Delta L}{L} \quad \frac{\Delta R}{R} = \frac{\omega + 1}{\gamma(\omega + 5)} \frac{\Delta L}{L}$$

$L \uparrow$  při  $T \uparrow, R \uparrow$ ;  $\rho \downarrow$  opacita  $\downarrow$   $k \uparrow$  při  $T \uparrow$

při  $\frac{\Delta T}{T} \rightarrow 0$  a  $\frac{\Delta R}{R} \rightarrow \gamma^{-1} \frac{\Delta L}{L}$   $\omega \rightarrow \infty$   $\bullet$

při  $L \uparrow$   $T = \text{konst.}$   $R \uparrow$

# Podmínky vzniku červených obrů



pro  $M_c \gg M_{\text{ob}}$

$$|W_p| \approx \frac{G M_c^2}{R_c} + \frac{G M_c M_{\text{ob}}}{R}$$

roděním není jádro a obálka tvoří

$$\frac{dW_p}{dt} = 0 \quad 0 = -\frac{G M_c^2 dR_c}{R_c^2 dt} - \frac{G M_c M_{\text{ob}} dR}{R^2 dt}$$

obálka expanduje, jádro se smršťuje

$$\frac{dR}{dR_c} = -\left(\frac{M_c}{M_{\text{ob}}}\right) \left(\frac{R}{R_c}\right)^2$$

...simplify  
to 3 chem.  
relevance  
with body



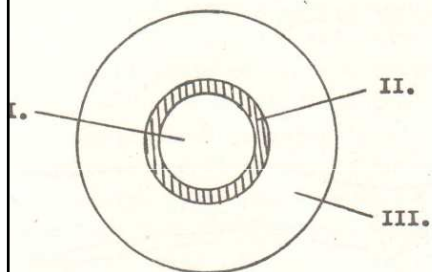
# Odchod z hlavní posloupnosti

## Odchod hvězdy 5% z hlavní posloupnosti

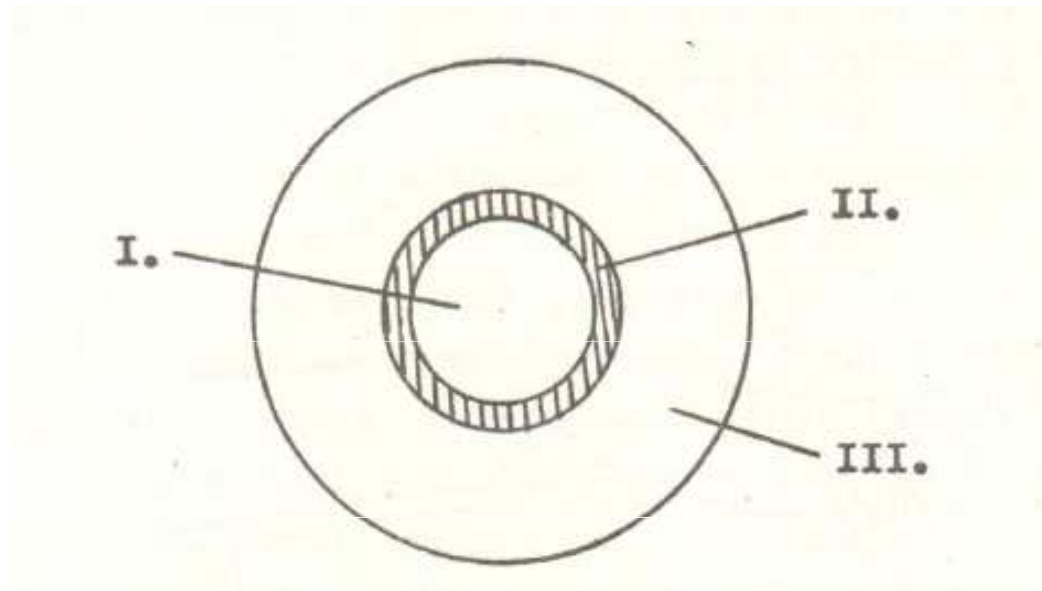
1-2: HP, CNO cyklus v konvekčním jádře, znečištění  
 $X=0.71$  hustoty v centrální části 22% → 8% hustoty  
 $Y=0.27$  hvězdy, zvláštní teploty, hustoty, růst produkce  
 $Z=0.02$  energie → změna výkonnosti, poloměru 2,4 → 4,3  $R_{\odot}$   
 rovinná teplota klaví

2-3: Od 2 celkové kontroly hvězdy, rovinná  
 teplota nastává, konvekční jádro se zmenšuje,  
 3 - opouští HP; 3,9  $R_{\odot}$ ,  $T_c = 3,6 \cdot 10^7 K$ ,  
 $L = 1,3 \cdot 10^3 L_{\odot}$

3-4: konvekční jádro mizí, kolem heliového jádra se  
 vytváří vodíkový slupkový zdroj, 4 - vyhořelé  
 heliové jádro, 7% hustoty hvězdy, zářivý  
 výkon jádra hvězdy  $L_c \approx 0,6 L_{\odot}$ , slupky  
 $L_{sl} \approx 1,3 \cdot 10^3 L_{\odot}$ , rovnováha a stabilizace hvězdy



# Hvězdy s vodíkovým slupkovým zdrojem



aktivní slupkový zdroj - zrcadlový efekt  
mezi jádrem a obalem

smiřování jadra → expanze obalky  
expanze jadra → smiřování obalky

# Odchod z hlavní posloupnosti

4-5: vodíková slupka ztuhne hvězka, obsahuje cca 5% hmotnosti, stěhuje se směrem k povrchu hvězdy, exprese hvězdy,  $L_c \approx 6L_s$ ,  $L_{se} \approx 9L_s$ , 36% energie a spotřebování na expansi hvězdy,  $\rightarrow 5$ , hmotnost dep. intermedieho jádra -10% hmotnosti hvězdy Schönbergova - Chandrasekharova mez, jádra se smršťují, zahušťují, obálka expanduje, R.T.,  $L \downarrow$

5-6: hvězda slupka se ztenčuje, hmotnost ubývá  
⑤ 3,5%  $M_h \rightarrow 0,5\% M_h$  ⑥, exprese, ochlazení obálky, ztuhnutí nepuřičnosti,  $\rightarrow 6$  .. přenos energie konvekční a obálka

# Schoenbergova-Chandrasekhara limitní hmotnost izotermického jádra

## THE ASTROPHYSICAL JOURNAL

AN INTERNATIONAL REVIEW OF SPECTROSCOPY AND  
ASTRONOMICAL PHYSICS

VOLUME 96

SEPTEMBER 1942

NUMBER 2

### ON THE EVOLUTION OF THE MAIN-SEQUENCE STARS

M. ŠCHÖNBERG<sup>1</sup> AND S. CHANDRASEKHAR

#### ABSTRACT

The evolution of the stars on the main sequence consequent to the gradual burning of the hydrogen in the central regions is examined. It is shown that, as a result of the decrease in the hydrogen content in these regions, the convective core (normally present in a star) eventually gives place to an isothermal core. It is further shown that there is an upper limit ( $\sim 10$  per cent) to the fraction of the total mass of hydrogen which can thus be exhausted. Some further remarks on what is to be expected beyond this point are also made.

1. *General considerations.*—The problem of stellar evolution is intimately connected with that of energy production in the stars. Both Bethe and Weizsäcker<sup>2</sup> showed that the source of the energy radiated by the main-sequence stars is the transformation of hydrogen into helium through the so-called “carbon cycle.” On the basis of the Bethe-Weizsäcker theory, G. Gamow<sup>3</sup> outlined a picture of stellar evolution.

The Gamow theory is based on three fundamental assumptions: (a) the stars evolve gradually through a sequence of equilibrium configurations; (b) the successive equilibrium configurations are homologous; and (c) the nuclear reaction continues to take place until the entire hydrogen in the star is exhausted.



# Schoenbergova-Chandrasekhara limitní hmotnost izotermického jádra

- ❑ The reason for this maximum in stable isothermal core mass is basically the virial theorem.
- ❑ Maximum fraction of mass in core (Schoenberg and Chandrasekhar, 1942):

$$\begin{aligned}\frac{M_{\text{isoth. core}}}{M} &\approx 0.37 \left( \frac{\mu_{\text{envelope}}}{\mu_{\text{isoth. core}}} \right)^2 \\ &= 0.37 \left( \frac{0.61}{1.34} \right)^2 = 0.08 \quad \text{for the Sun}\end{aligned}$$

# Schoenbergova-Chandrasekharova limitní hmotnost izotermického jádra

maximální hmotnost izotermického jádra  $M_J$   
vzhledem k celkové hmotnosti hvězdy  $M$

Schoenbergova - Chandrasekharova limita

Márió  
1914  
1990

$$\left( \frac{M_J}{M} \right) \approx 0,37 \left( \frac{\mu_{ob}}{\mu_J} \right)^2$$

1910  
1995

Ap J, 1942  
p. 161

při přechodu - směřování heliového jádra

$$\mu_J \uparrow \Rightarrow M_J \downarrow$$

$$\mu = \frac{2}{3X + 0,5Y + 1}$$

# Schoenbergova-Chandrasekharova limitní hmotnost izotermického jádra - úloha

Úloha: Hledá se formulu při překročném chem. složení  $X = 0,68$ ;  $Y = 0,30$ ;  $Z = 0,02$ ;  $\mu_{\text{He}}$  v jádře  $\rightarrow$  helium,  $\mu_{\text{He}} = ?$

• obálka  $\mu_{\text{ob}} \approx 0,63$ ,  $\mu_{\text{He}} \approx 1,34$   
( $Y = 0,98$ ;  $Z = 0,02$ )

$$\left( \frac{\mu_{\text{He}}}{\mu} \right) \approx 0,08$$

obecně kolem  
10%

# Odchod z hlavní posloupnosti

6. červený obr,  $T_c \approx 10^8 \text{ K}$ ,  $L \approx 8,8 \cdot 10^4 L_\odot$ ,  
helium flash - záblesk, krátkou dobu,  
mstant korektivní obléky se mění, jak se  
přibližuje ke slupce, tak k povrchu hvězdy,

6.-7. nízká teplota a hustota ve slupce  $\rightarrow$  rozřívání  
produkce energie, nastává zděný výbuch, pokles  
opacitý podrovnou do vrstev s  $T \downarrow$ , iont  $H^-$ ,  
nízká zděná výbuš,  $\textcircled{7}$  -  $74 R_\odot$ , korektivní  
vrstva nachází do vrstev odlišných  
termodynamických vlastností  $\Rightarrow$  změny chem.  
střední na povrchu, pokles obsahu  $Li$  a dalších  
prvků, nízká obsah prvků, kterých původ  
při term. reakcích, např.  ${}^3_2\text{He}$ , korektivní  
vrstva se přibližuje k odlišné slupce  $\textcircled{7}$ ,

# Odchod z hlavní posloupnosti

roste obsah  ${}^{14}_7\text{N}$  (včetně z  ${}^{12}_6\text{C}$ ) a roste  
klesá obsah  ${}^{12}_6\text{C}$ ,  $\Rightarrow$  změna poměru  
izotopů  ${}^{12}_6\text{C} / {}^{13}_6\text{C}$  a poměru  ${}^{14}_7\text{N} / {}^{12}_6\text{C}$  na  
povrchu hvězdy, nárost centrální teploty  $\Rightarrow$   
změna hustoty - rychlé

7. - 9.

⊕ - 3x proud, náhle explozivní, veškerá  
energie se nestihá převést k povrchu, jádro  
expanduje, vnější obilka se smršťuje,  
povrchová teplota roste, vodíková slupka je  
hlavním zdrojem energie, dodává 85% energie

# Odchod z hlavní posloupnosti

energetická rovnováha mezi výdejem a  
produkci vyžaduje slábní slupky  $\Rightarrow$   
dostatečná teplota, centrální jádro se při 3x  
procesu rozpíná a ochlazuje, směřování  
vnějš! obálky mezi body ⑧ - ⑨

10.

při hoření helia ⑦ - ⑩ roste s čarem  
konvektivní jádro, v maximum dosahuje  
6%  $M_{\odot}$ , teplota stále stoupá v jádru,  
produkce energie z helionů a vodíkových  
hoření stále roste 0,05  $\rightarrow$  0,36, počet  
reagujících částic v jádru klesá, začne se  
směšovat; opouští v expandujícím vnějším  
obalu narušit, intenzita hoření vodíkové  
slupky klesá

11.

obsah He ve střední oblasti klesá stejně  
jako konstant konvektivním jádrem, ze  
bodem ⑪ se zvyšuje obsah He v jádru,  
vytvorí se heliový slupkový závoj, kádrla  
se smršťuje

# Časová škála při odchod z hlavní posloupnosti

Časová škála vyvojených etap po odchodu z HP 5

Body	Doba trvání v letech	Vývojová etapa
1-2	$6,4 \times 10^7$	krém vodík v jádře
2-3	$2,2 \times 10^6$	celkové smíšené krém
3-4	$1,3 \times 10^6$	krém ve vodíkovém skeletu
4-5	$0,8 \times 10^6$	maximální konvekční ob
5-6	$0,5 \times 10^6$	sudý ob
6-7	$6,0 \times 10^6$	krém helia v jádře
7-8	$1,0 \times 10^6$	znik konvekční ob
8-9	$9,0 \times 10^6$	krém helia v jádře je v maximum
9-10	$1,0 \times 10^6$	opět smíšené konvekční ob

# Časová škála při odchodu z hlavní posloupnosti

Časová škála vývojových etap při odchodu hvězdy z hlavní posloupnosti

Body	Doba trvání v rocích	Vývojová etapa
1 - 2	$6,44 \cdot 10^7$	hoření vodíku v jádře
2 - 3	$2,2 \cdot 10^6$	celkové smršťování hvězdy
3 - 4	$1,34 \cdot 10^6$	hoření ve vodíkovém slupkovém zdroji
4 - 5	$0,8 \cdot 10^6$	rozšiřování konvektivní obálky
5 - 6	$0,5 \cdot 10^6$	rudý obr
6 - 7	$6,0 \cdot 10^6$	hoření helia v jádře
7 - 8	$1,0 \cdot 10^6$	zánik konvektivní obálky
8 - 9	$9,0 \cdot 10^6$	hoření helia v jádře je v maximu
9 - 10	$1,0 \cdot 10^6$	opětne rozšiřování konvektivní obálky



# Časová škála doby pobytu na HP a ve stádiu červených obrů

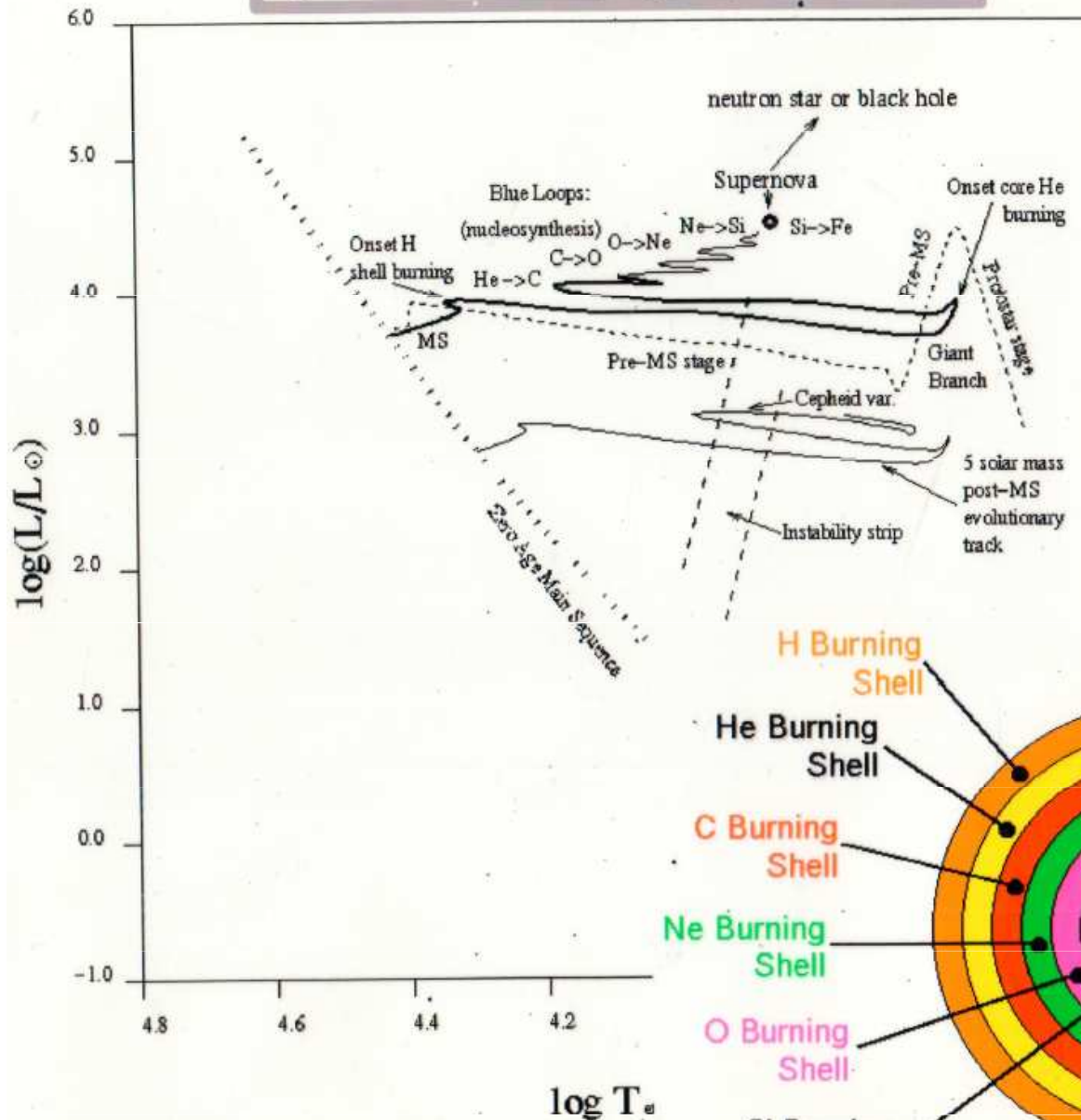
Doba pobytu hvězd na hlavní posloupnosti a ve stádiu červených obrů a veleobrů pro různé hmotnosti

Hmotnost hvězd v $M_{\odot}$	Doba pobytu na hlavní posloupnosti v rocích	Doba pobytu ve stádiu červených obrů, veleobrů v rocích
64	$2,5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^3$
32	$4 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^4$
15	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^6$
10	$2 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^6$
5	$7 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$
3	$2 \cdot 10^8$	$7 \cdot 10^7$
1,5	$1,5 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^8$
1,0	$7 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^9$
0,75	$2 \cdot 10^{10}$	*
0,5	$1,2 \cdot 10^{11}$	

\* Výpočty nebyly prováděny.

# Odchod z hlavní posloupnosti, 9 Ms

High Mass Star Evolutionary Track (9 solar mass)

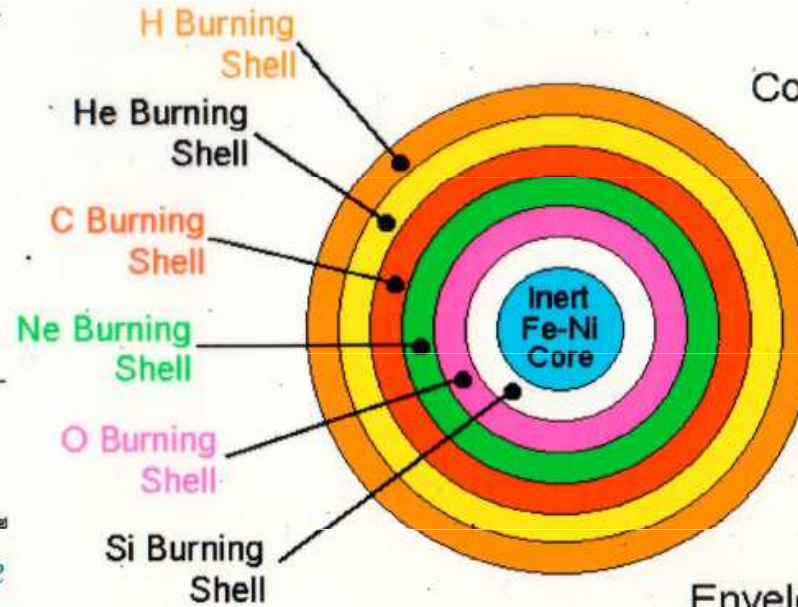


$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4$$

*const. L -->  
every turn to the right (cooler)  
accompanied by expansion*

Onion-shell burning

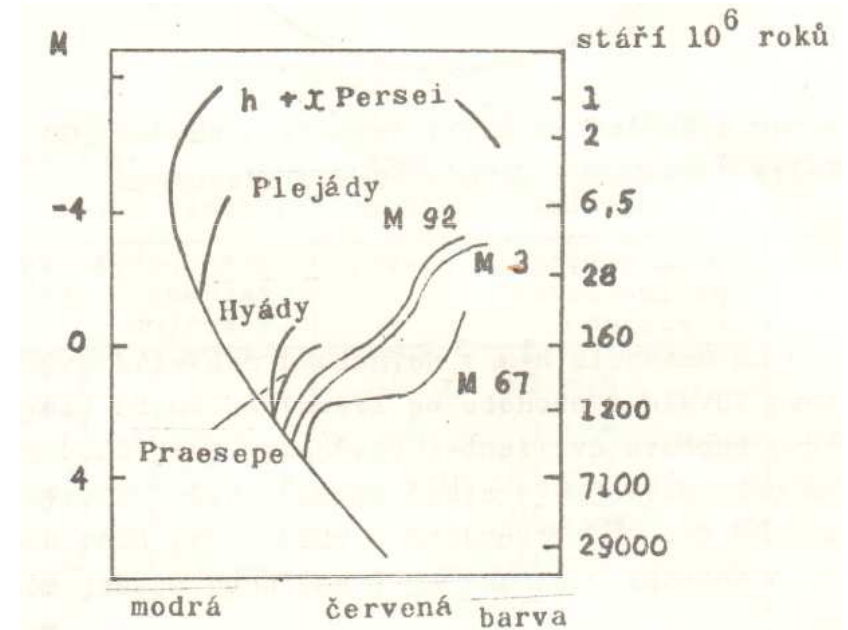
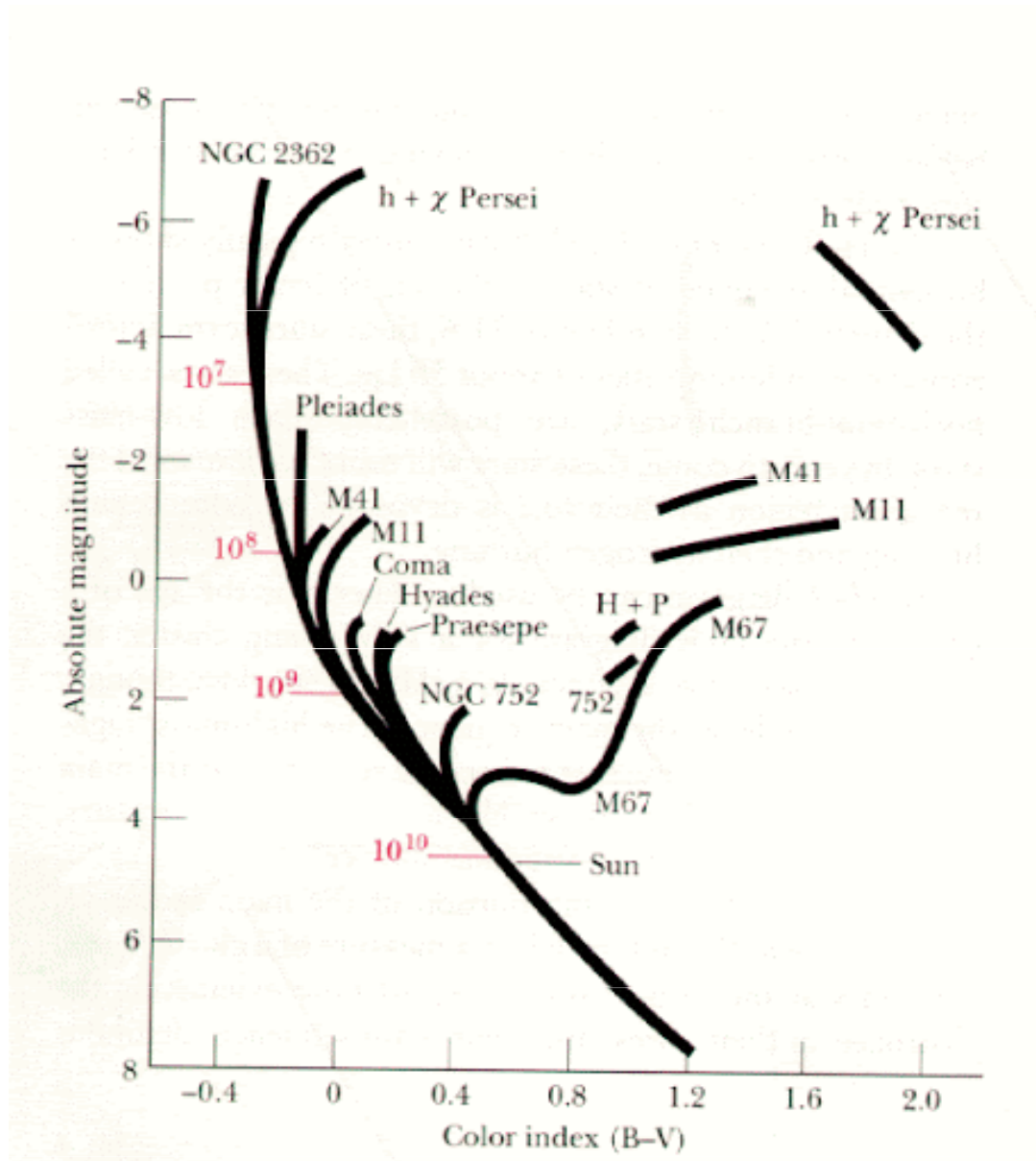
Core Radius:  $\sim 1 R_{\text{earth}}$



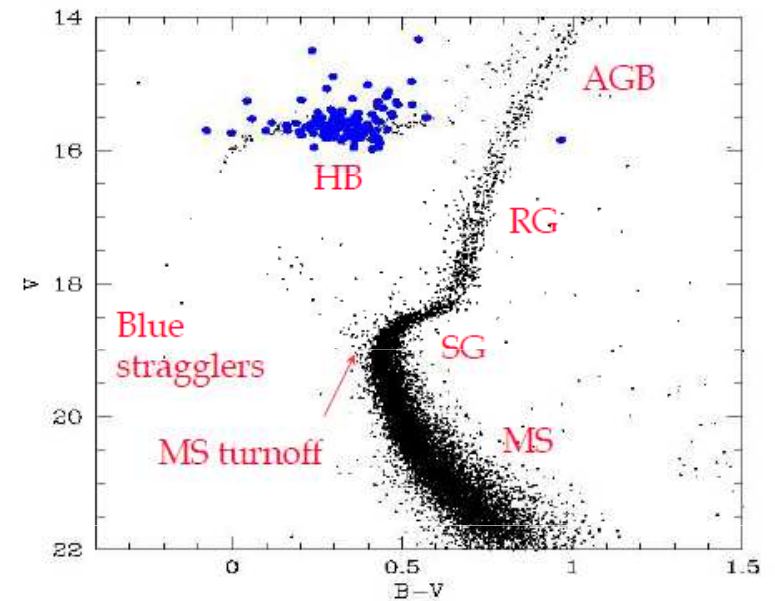
Envelope Radius:  $\sim 5 \text{ AU}$

From <http://www.ngcsu.edu/Academic/Science/astr1020home/evoltracks.htm>

# Odchod z hlavní posloupnosti

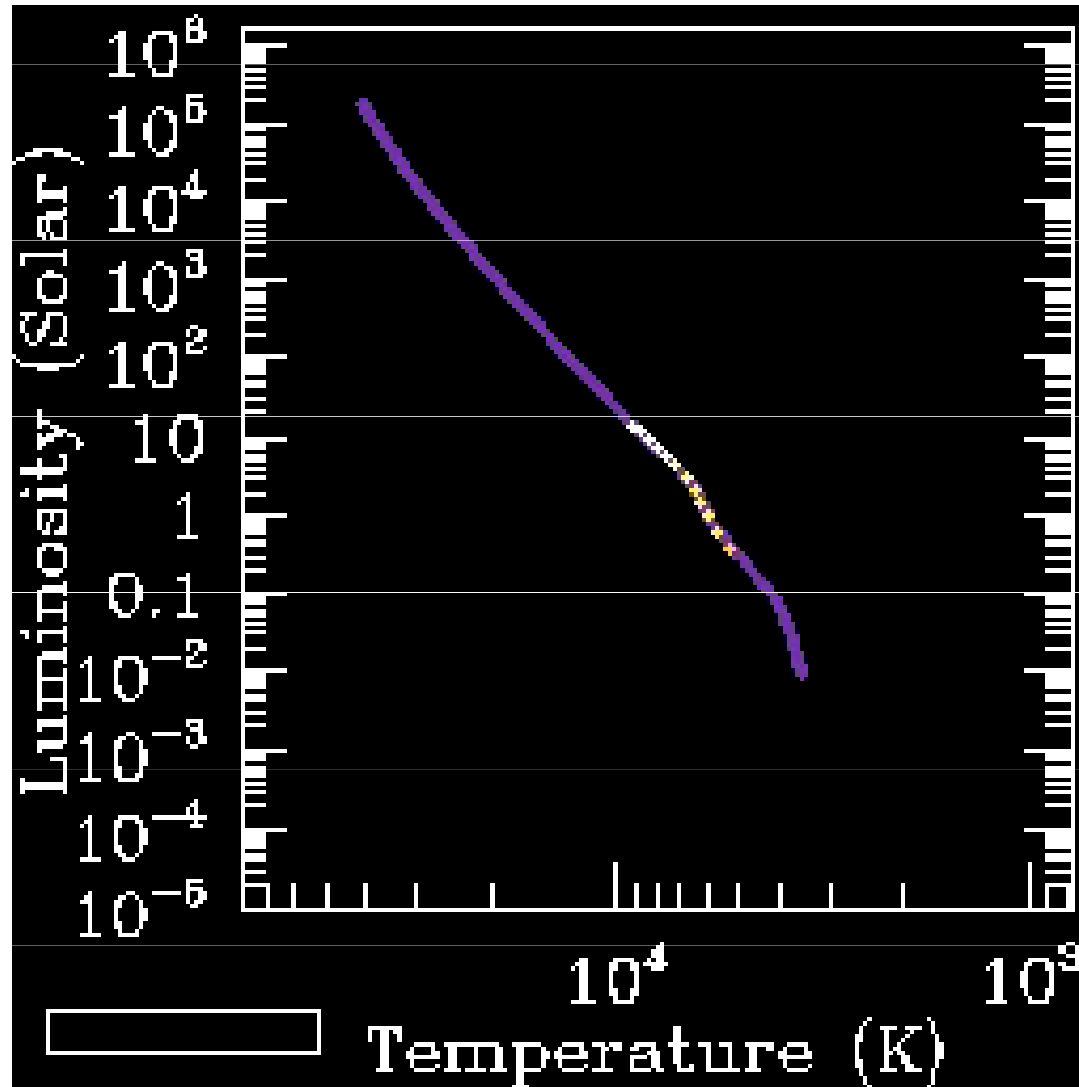


M3 color-magnitude diagram



\* RR Lyrae (pulsating HB stars are highlighted)

# Odchod z hlavní posloupnosti



# Kulové hvězdokupy - červení obři

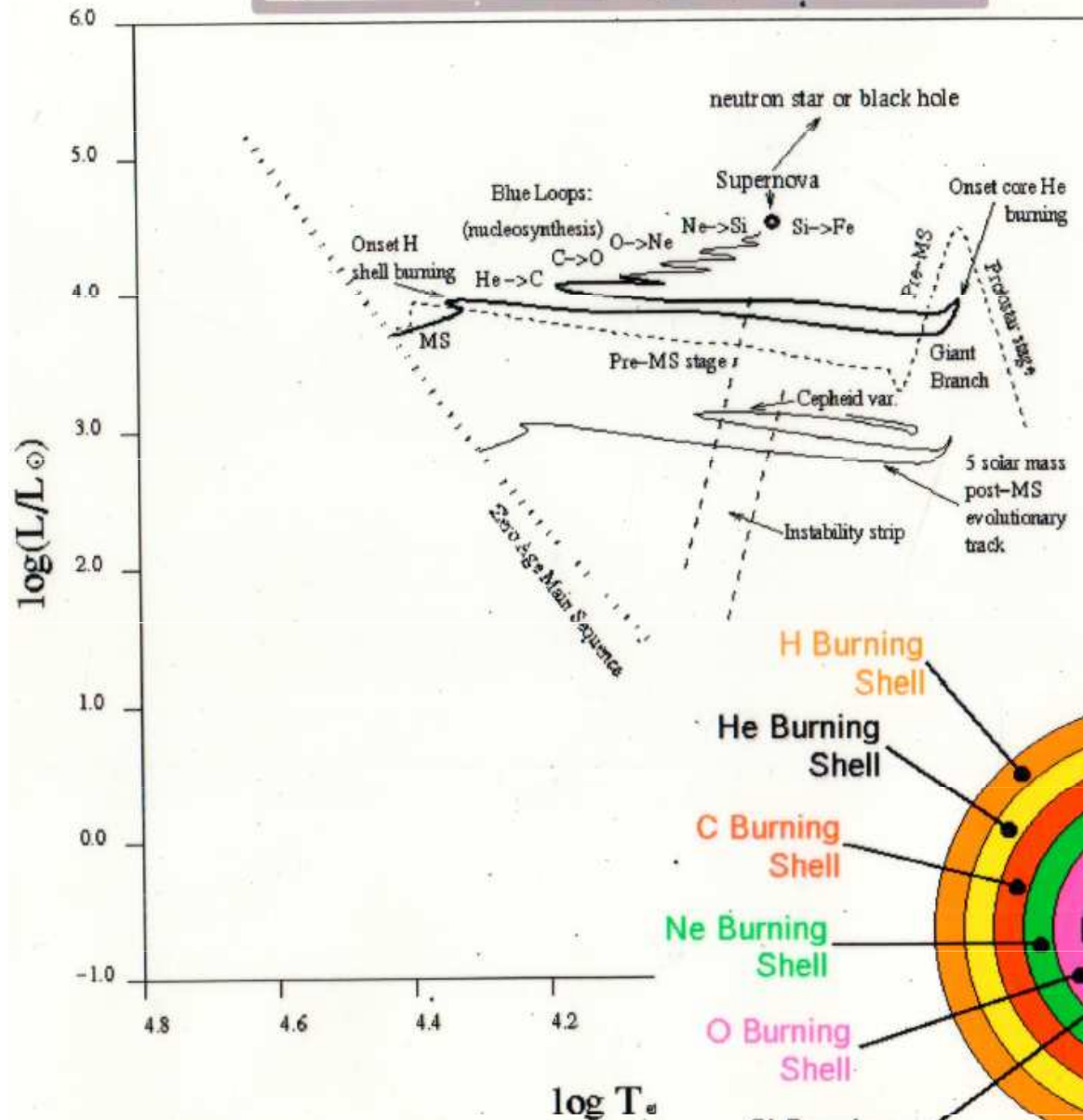


# Kulová hvězdokupa M 55 - červení obři



# Odchod z hlavní posloupnosti, 9 Ms

High Mass Star Evolutionary Track (9 solar mass)

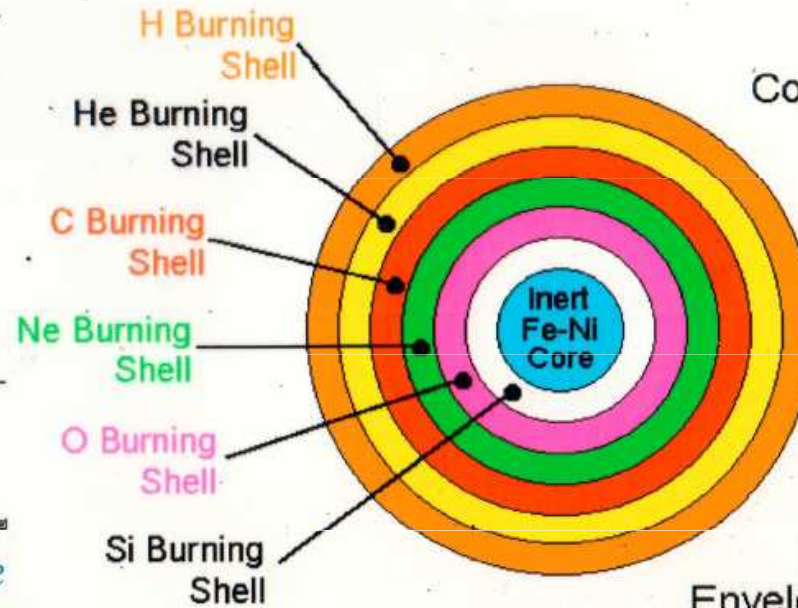


$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4$$

const.  $L \rightarrow$   
every turn to the right (cooler)  
accompanied by expansion

Onion-shell burning

Core Radius:  $\sim 1 R_{\text{earth}}$



Envelope Radius:  $\sim 5 \text{ AU}$

From <http://www.ngcsu.edu/Academic/Science/astr1020home/evoltracks.htm>

# Planetární mlhoviny

při hmotnosti jádra hvězdy menší než 1,4 Ms při průchodu pásmem nestability se formuje vnější obálka, která přibližně 10 – 20 tisíc roků obklopuje hvězdu, rozpíná se, vzniká

**tzv. planetární mlhovina M 72 Helix**



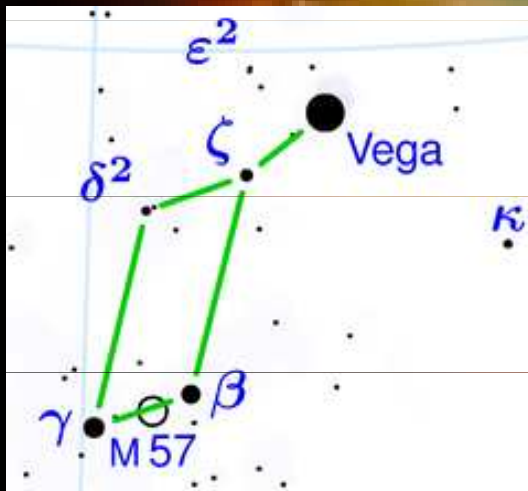


# Planetární mlhovina M 57

$r = 700 \text{ pc}$

$t \approx 20\,000 \text{ roků}$

$v \approx 30 \text{ km.s}^{-1}$



**modrá barva** He II 468.3 nm

**zelená barva** O III 500.7 nm

**červená barva** N II 658.3 nm

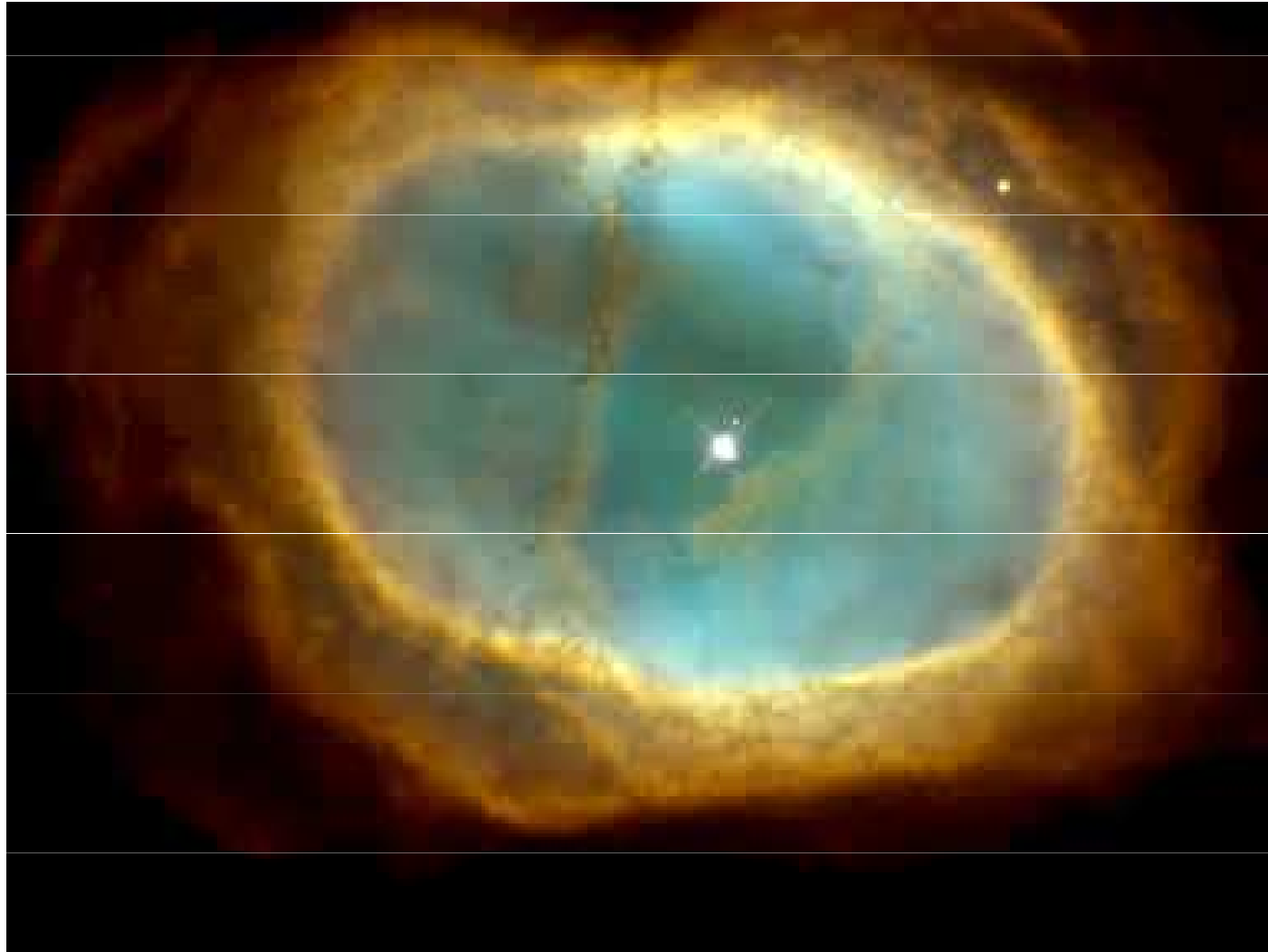
# Planetární mlhovina Abell 39



# Vznik planetární mlhoviny



# Vznik planetární mlhoviny



# Tlak v nitru hvězd při degeneraci

d... průměrná vzdálenost mezi elektronový plyn

Heisenbergův princip neurčitosti

$$d \cdot p_F \approx \hbar \quad \Delta x \Delta p \approx \hbar$$

$p_F$  Fermiho hybnost - průměrná

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{redukováni Planckova konst.}$$

energie elektronu - Fermiho energie

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e d^2}$$

$$d \downarrow \quad E_F \uparrow$$

$$E_F \gg kT$$

$$E_F \sim \rho$$

degenerovaný elektronový plyn

Skrit  $\sim$  měs ... neutrony

$$P = f [(1+x)\rho]$$

$$K_1 \rho^{5/3} \rightarrow K_2 \rho^{4/3}$$

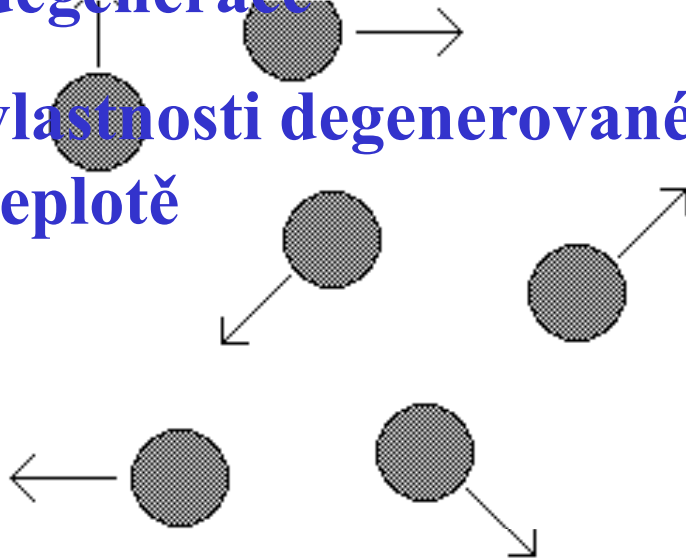
tlak degenerovaného elektronového plynu

# Bílí trpaslíci – elektronová degenerace

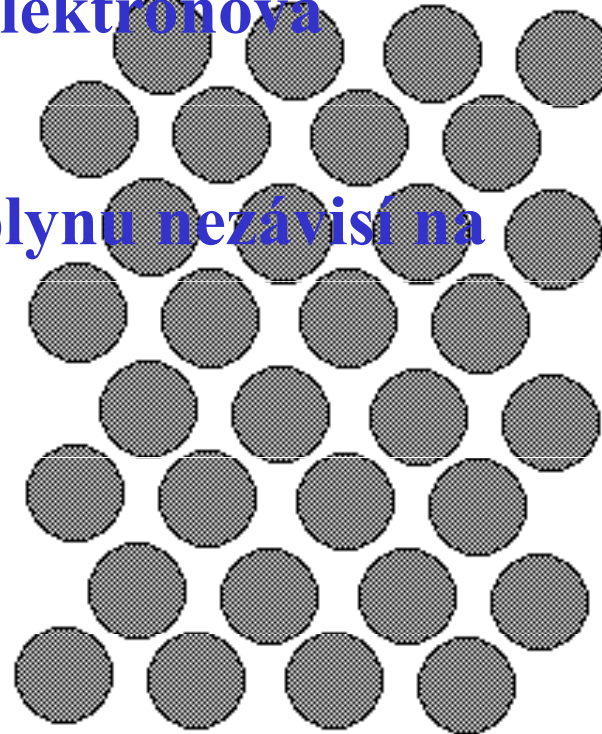
When a gas becomes extremely high in density, the atoms are not as free to move and they become degenerate.

při  $\rho > 10^6 \text{ kg.m}^{-3}$  nastává elektronová degenerace

vlastnosti degenerovaného plynu nezávisí na teplotě



Normal Gas



Degenerate Gas

the result is that you can increase the temperature of the gas (the atoms can wiggle more) but the pressure stays constant (they have no where to move).

# Bílí trpaslíci

## 5.1. Bílí trpaslíci

Při hmotnosti jádra hvězdy  $M < 1,4 M_{\odot}$  se v závěrečných vývojevých stádiích hvězd formuje vnější obálka, která v průběhu přibližně 10 - 20 tisíc roků obklopuje hvězdu jako planetární mlhovina a dále se pomalu rozšiřuje do okolního prostoru. Jádro se smršťuje na poloměr řádově  $10^7$  m a z hvězdy se stává bílý trpaslík. Uvedeným způsobem zakončuje svůj vývoj asi 95 % hvězd. Bílý trpaslík je hvězda stabilní konfigurace, tlaková síla vyvolaná degenerovaným elektronovým plynem je v rovnováze s gravitační silou.

... platí obecný vztah

# Tlak v nitru hvězd při degeneraci

Pro tlak degenerovaného elektronového plynu platí obecný vztah

$$P = f [(1 + X)\rho], \quad (5.1.1)$$

kde funkce  $f$  se mění od  $K_1 \rho^{\frac{5}{3}}$  při nízkých hodnotách  $\rho$  do  $K_2 \rho^{\frac{4}{3}}$  při vysokých hodnotách  $\rho$ .

V nerelativistickém případě, jak bude dále odvozeno, platí vztah

$$P = K_1 \rho^{\frac{5}{3}}, \quad (5.1.2)$$

kde  $K_1$  je konstanta.

Pro relativistický případ platí vztah

$$P = K_2 \rho^{\frac{4}{3}}, \quad (5.1.3)$$

kde  $K_2$  je konstanta.

Připomínáme, že tlak degenerovaného plynu nezávisí na teplotě a na rozdíl od stavové rovnice pro ideální plyn je závislost mezi tlakem a hustotou výraznější. To je přirozené, neboť tlak je úměrný koncentraci částic a jejich rychlosti, koncentrace částic je úměrná hustotě a rychlost částic degenerovaného plynu roste současně s hustotou, neboť v důsledku platnosti Pauliho principu roste počet částic pohybujících se velkými rychlostmi.

Kritériem použitelnosti rovnice (5.1.2) pro degenerovaný plyn je její srovnání se stavovou rovnicí (3.1.1.1) pro nede degenerovaný ideální plyn. Podmínku degenerace plynu lze vyjádřit nerovností

$$K_1 \rho^{\frac{5}{3}} > \frac{A \rho T}{\mu}, \quad (5.1.4)$$

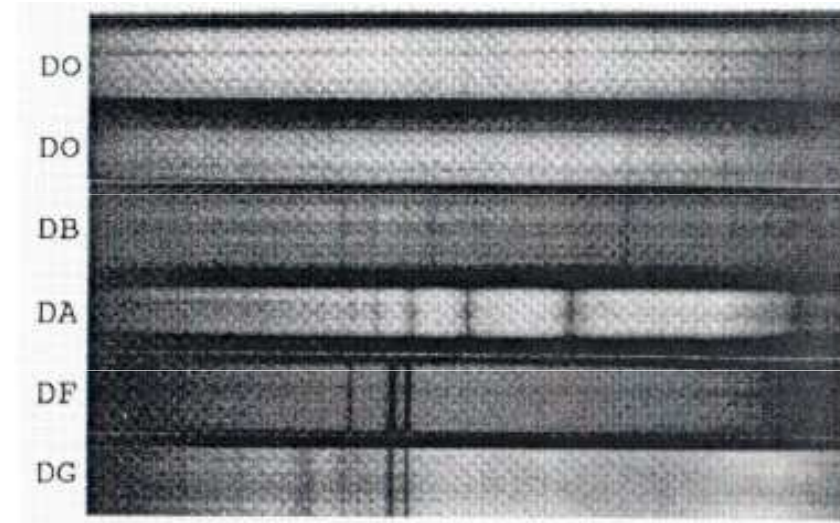
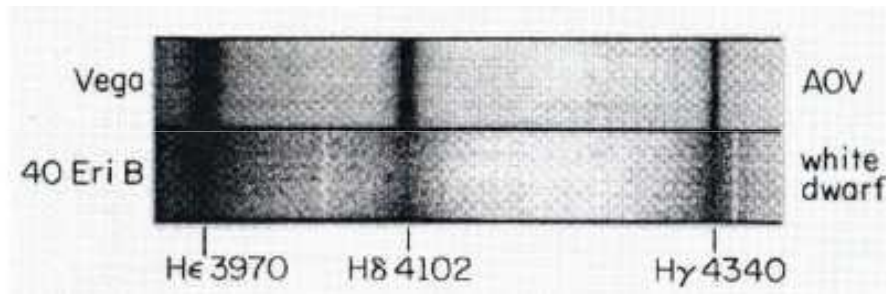
*podmínka degenerace:*

$$K_1 \rho^{\frac{5}{3}} > \frac{A \rho T}{\mu}$$

$$\rho > \left( \frac{A T}{\mu K_1} \right)^{\frac{3}{2}}$$



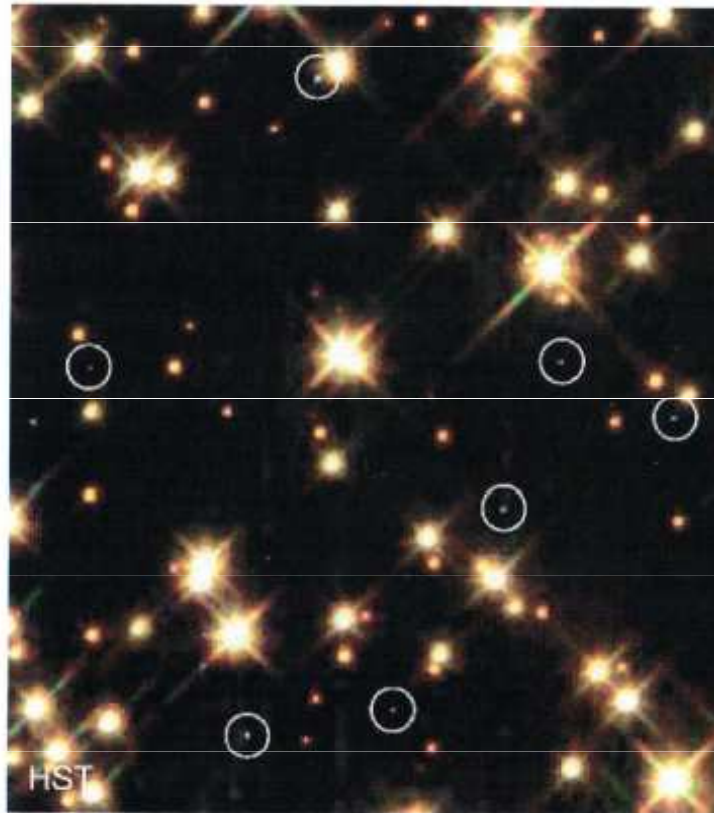
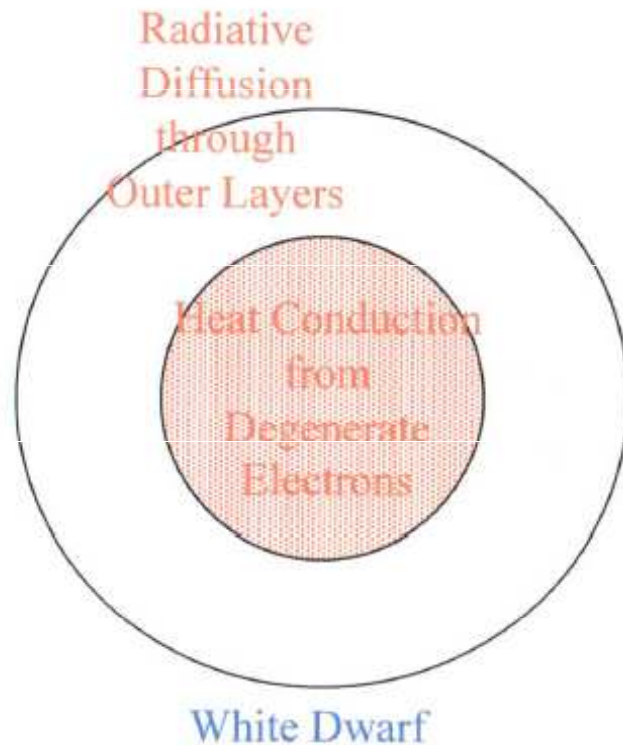
# Bílí trpaslíci – spektrum



- **White Dwarfs – DO, DB, DA, DF, DG, DM, DC**
- **Classifications NOT analogous to MS – reflect compositions, not temperature**
  - DA – hydrogen lines (no other lines, pure H atmosphere)
  - DB – neutral He lines (no hydrogen at all, pure He)
  - DO – ionized He lines (no hydrogen at all, hotter DBs)
  - DC – continuous spectrum, no lines
  - DF, DG, DM ...

# Bílí trpaslíci

Cooling white dwarfs  
as seen by the  
Hubble Space Telescope



This image was copied from H. Richer (UBC) and NASA.  
Go to <http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap971102.html>  
for the updated and corrected version.

Isothermal  
Interior Temperature

$$L \approx \left[ \frac{T_I}{7 \times 10^7 \text{ K}} \right]^{7/2} \left[ \frac{M}{M_{Sun}} \right] L_{Sun}$$

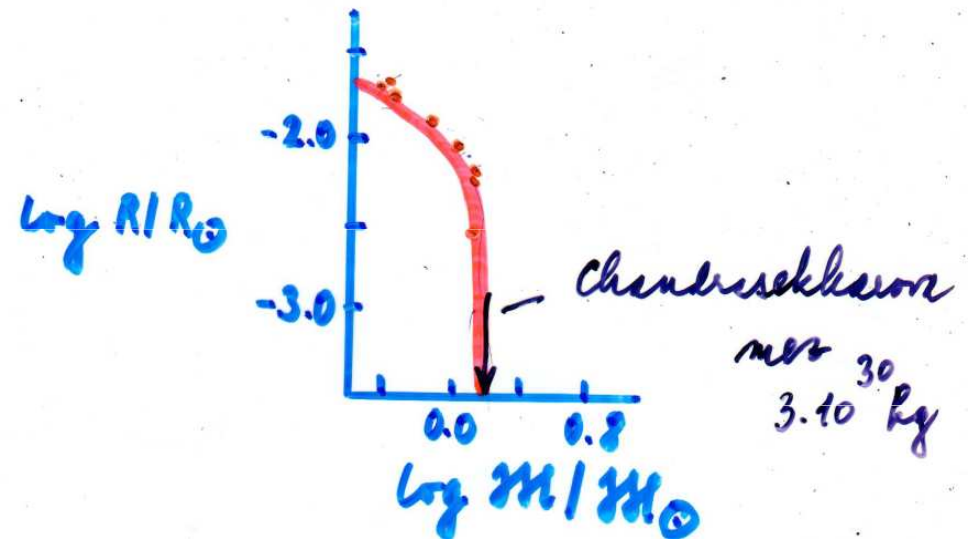
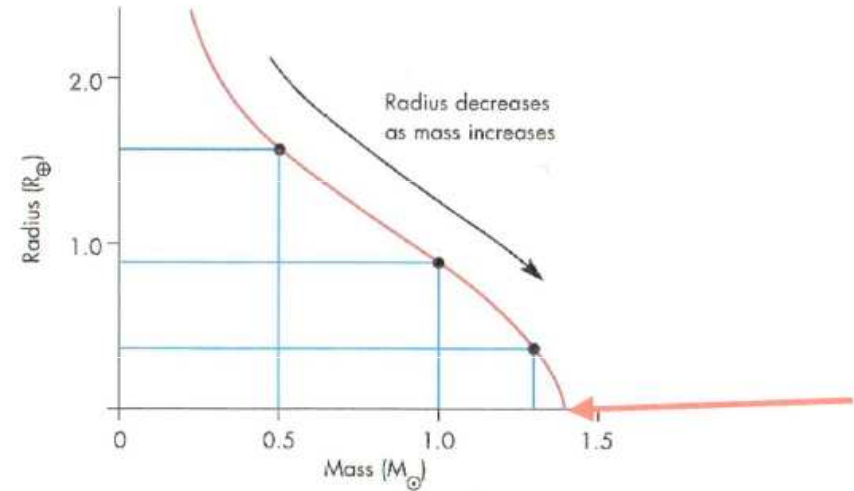
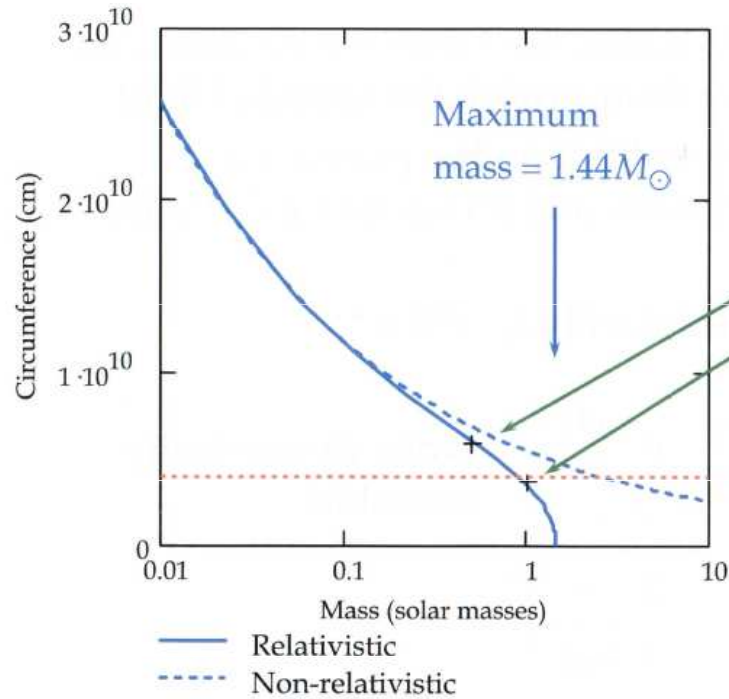
$$E \approx \frac{3}{2} M k T_I = \frac{3}{2} \left[ \frac{M}{12 m_H} \right] k T_I$$

$$E \approx 8 \times 10^{40} \text{ J}$$

Mass = 0.4 Solar Masses  
T = 10<sup>8</sup> K

Time from L<sub>sun</sub> to 10<sup>-4</sup> L<sub>sun</sub>  
is 1 x 10<sup>9</sup> years

# Bílí trpaslíci - Chandrasekharova limita



# Bílí trpaslíci

$$\frac{dP}{dr} = -6 \frac{3M_r \rho_r}{r^2}$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho_r$$

$$P = 10^{12} \left( \frac{\rho}{\rho_{\odot}} \right)^{5/3}$$

$\frac{1}{\rho}$  ... průměrné číslo  
... volných elektronů

$$\rho = \frac{2}{1+x}$$

musí

# Bílí trpaslíci

3 rovnice pro 3 proměnné  $\rho_r, P, \mathcal{H}_r$

thermické podmínky:

$$\text{při } \lambda = 0$$

$$\mathcal{H}_r = 0, \quad \rho = \rho_c$$

$$\lambda = R$$

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H}, \quad \rho = 0$$

integrace od středu hvězdy k povrchu

sférická tloušťka hvězdy  $\Delta r$

$n$ -lá hvězda má poloměr  $r_n = n (\Delta r)$

hustota  $\rho_n$ , hustota  $\rho_c$  a hustota  $\mathcal{H}_n$

# Bílí trpaslíci

$$r_{n+1} = r_n + \Delta r$$

$$P_{n+1} = P_n + \left(\frac{dP}{dr}\right)_n (\Delta r)$$

$$\rho_{n+1} = \rho(P_{n+1})$$

$$M_{n+1} = M_n + 4\pi r_{n+1}^2 \rho_n \Delta r$$

(□)

řídící podmínka  $p_c$ , rovnice (\*)  $\rightarrow P_c$

$\rightarrow$  rovnice (□) hodnoty  $r_n, P_n, \rho_n, M_n$

integrace přesňuje k povrchu, kde  $P=0$

# Bílí trpaslíci

hydrostatická rovnice

$$n m_p G \frac{M}{R^2} = \frac{P}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{R} \sim \left( \frac{M}{R^3} \right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow R \sim M^{-1/3}$$

$$v \sim c, \quad P \sim n^{4/3}$$

degenerovaná odhadne

$$n m_p G \frac{M}{R^2} = \frac{P}{R}$$

$n \dots$  hustota elektronů

$$P \sim n^{5/3}$$

nerelativistická degenerace

relativistická degenerace

$$\Rightarrow M_{\text{crit}} = \left( \frac{hc}{G m_p^2} \right)^{3/2} m_p$$

charakteristická

$$M_{\text{crit}} = 1,4(1+x) M_{\odot}$$

# Bílí trpaslíci

slabě bílého trpaslíka:

**vnitřní část** ... degenerovaný elektronový plyn

$$\rho \sim 10^9 \text{ kg m}^{-3}$$

$$g_{\text{int}} \sim 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

opuště velmi rychle, rychle ležel odložit  
deg. elektronový plyn, lepta je tedy kromě  
kmit.

**vnitřní část** ... nízké % helia, je složen

z degenerovaného ideálního plynu s rychlou  
opuště, rychlý lepta gradient

$$3 \cdot 10^7 \text{ K na } 10^9 \text{ K na povrchu hvězdy}$$

uvolně se pohybují konvulzivní reakce



# Bílí trpaslíci - stavba

Stavba bílých trpaslíků se liší od stavby klasických hvězd hlavní posloupnosti. Vnitřní část bílých trpaslíků je složena z degenerovaného elektronového plynu, jehož hustota v centrálních oblastech dosahuje až  $10^9 \text{ kg m}^{-3}$ , ve vnějších oblastech hvězdy zhruba  $10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . Hvězdná látka je průhledná pro procházející záření, neboť v degenerovaném plynu je převážná většina energetických hladin obsazena. Při absorpci záření tudíž nemůže docházet k přechodu elektronů mezi energetickými hladinami, což je základní zdroj opacity u hvězd hlavní posloupnosti. Pouze malý počet elektronů s velkou energií může ještě přecházet mezi hladinami, proto opacita hvězdné látky bílých trpaslíků dosahuje nízkých hodnot. Hvězdná látka se dále vyznačuje velmi dobrou tepelnou vodivostí. Vzhledem k nízké opacitě a velmi dobré tepelné vodivosti degenerovaného elektronového plynu je teplota v nitru bílého trpaslíka téměř konstantní, neboť se rychle vyrovnává.

Povrchová vrstva tvořící několik procent poloměru, je složena z nedegenerovaného ideálního plynu s vysokou opacitou. Tato vrstva zadržuje tok tepelné energie z nitra a je v ní velmi výrazný teplotní gradient, teplota klesá z  $10^7 \text{ K}$  na  $10^4 \text{ K}$  na povrchu hvězdy.

# Bílí trpaslíci - stavba

V povrchové vrstvě se zachoval vodík, přibližně do 0,05 %, mohou zde probíhat termonukleární reakce. Malá tloušťka této vrstvy objasňuje, proč v bílých trpaslicích se uvolňuje tak málo energie, přestože teplota je stejná jako u klasických hvězd hlavní posloupnosti. Povrchová vrstva vyzařuje energii na úkor ochlazování, neboť vnitřní energie z nitra hvězdy pomalu prostupuje přes málo průhlednou vrstvu.

Celkové množství vnitřní energie v bílém trpaslíku lze přibližně určit pomocí následující úvahy. V 1 gramu jednoatomového plynu je množství vnitřní energie, které je rovno  $\frac{3}{2} \frac{A T}{\mu}$ , kde  $\mu$  je střední molekulová hmotnost plynu, skládajícího se ze zbytků atomů - iontů, jež zůstaly po ionizaci elektronů. Vztah pro celkovou vnitřní energii ve hvězdě má tvar

$$W = \frac{3}{2} \frac{A T}{\mu} M. \quad (5.1.26)$$

Přibližné jednoduché vyjádření vztahu pro teplotu v nitru bílého trpaslíka lze odvodit za předpokladu zářivé rovnováhy ve vnějších nede degenerovaných vrstvách bílého trpaslíka, kde opacita je dána Kramerovým zákonem (3.1,3.2), ve kterém platí závislost  $\kappa \sim T^{-\frac{3}{2}}$ . Podle Kaplana [3] vztah pro teplotu v nitru bílého trpaslíka stanovenou pomocí svítivosti a hmotnosti má tvar

$$T = 5 \cdot 10^7 \left( \frac{L}{L_{\odot}} \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{\frac{2}{7}}. \quad (5.1.27)$$

# Bílí trpaslíci

centrální tlak

$$\frac{dP_r}{dr} = -G\rho \frac{M_r}{r^2} = -G \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} \rho = -\frac{4}{3}\pi G \rho^2 r$$

pro  $P=0$  na povrchu obdržíme tlak jako funkci  $r$

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 (R^2 - r^2)$$

delší volbou  $r=0 \Rightarrow$

$$P_c \approx \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R^2 \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ Pa}$$

# Vývoj bílých trpaslíků - ochlazování

vnější obálka - atmosféra, ideální plyn

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M \rho(r)}{r^2} ; \quad \frac{dT}{dr} = - \frac{3\rho(r)k(r)}{4acT^3} \frac{L}{4\pi r^2}$$

$m(r) \rightarrow M$ , kruhová obna rovnice

$$\frac{dP}{dT} = \left[ \frac{16\pi acG}{3} \frac{M}{L} \right] \frac{T^3}{k}$$

$k \sim \rho, T, c_H c$ , vlnění - vlnová absorpce,  $\nu = 0.9$ ,  
 $z = 0.1$

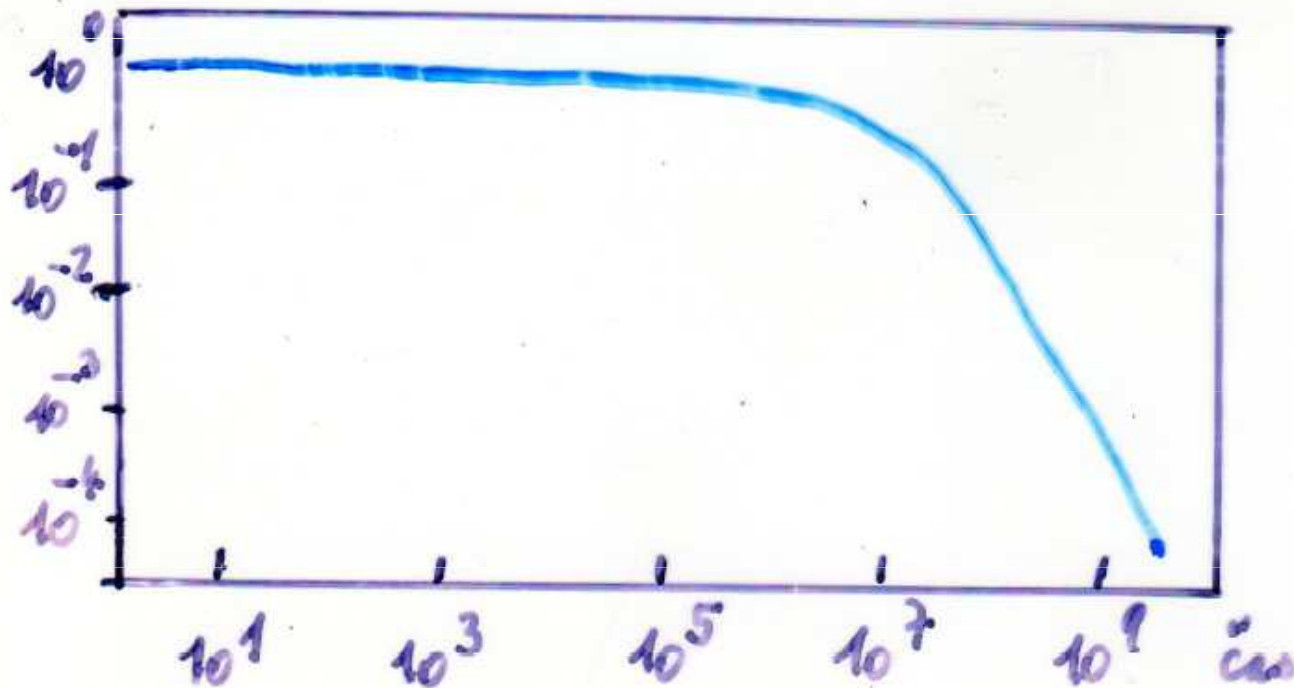
$$k = k_0 \rho T^{-7/2} = 4,34 \times 10^{19} \rho T^{-7/2} \text{ [m}^2 \text{kg}^{-1}\text{]}$$

# Vývoj bílých trpaslíků - ochlazování

ochlazování

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{2}{3k} \left[ \frac{12 \text{ MN}}{M_s} \right] L_s \left[ \frac{T}{5 \times 10^7} \right]^{7/2}$$

$H/L_s$

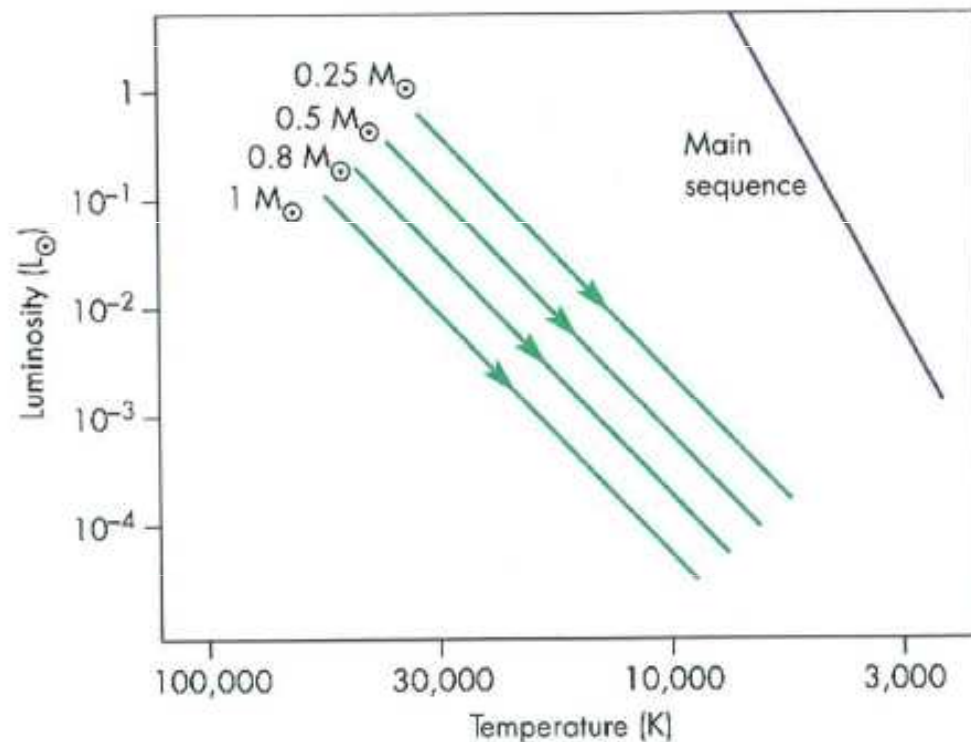


$0,4 M_s$   
 $T_i \sim 10^8 \text{ K}$   
 $c \sim \text{b.t.}$

# Vývoj bílých trpaslíků - ochlazování

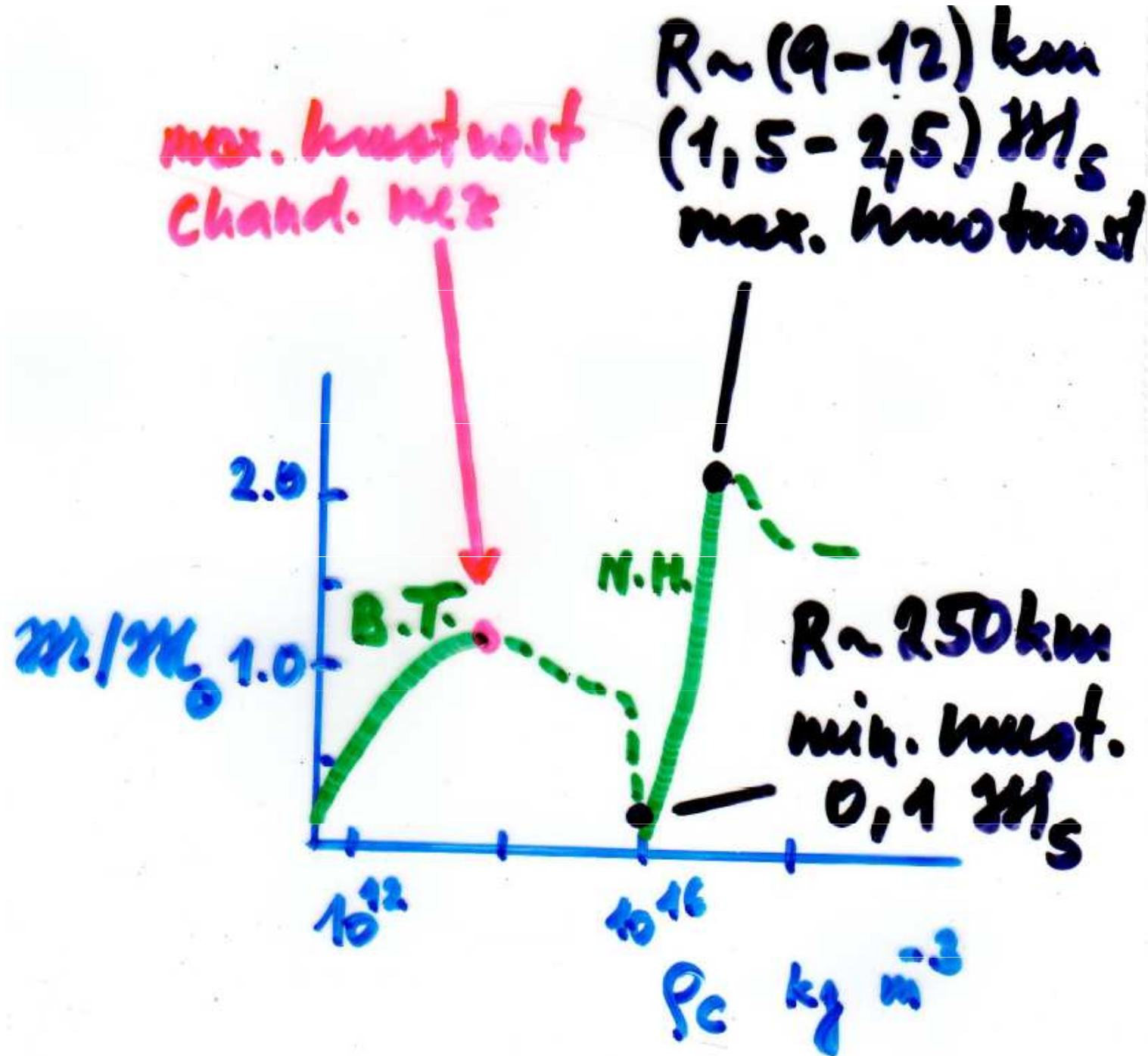
## Cooling of White Dwarfs

- no nuclear fuel source
- large supply of internal heat
- just cools at constant radius



- 0.6 solar mass star declines
  - to 0.1 solar L in  $20 \times 10^6$  y
  - to 0.01 solar L in  $300 \times 10^6$  y
  - to 0.001 solar L in  $10^9$  y
- old white dwarfs are difficult to detect

# Závislost mezi hmotností a hustotou, degenerované hvězdy



# Neutronové hvězdy



neutronizace

$$\rho \sim 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$$

## Neutronové hvězdy

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho r}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{P}{c^2 \rho r}\right) \left(1 + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2 M_r}\right)}{\left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r}\right)}$$

$\approx 2 \text{ MHz}$

$\Rightarrow$

rotičím periody:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\omega_f = \omega_i \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2$$

magnetické pole:

$$B_i 4\pi R_i^2 = B_f 4\pi R_f^2$$

$$\int B dS = \text{const.}$$

$$B_{nh} \approx 10^{10} \text{ T}$$



# Neutronové hvězdy -

## Neutronové hvězdy

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho_r}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{P}{c^2 \rho_r}\right) \left(1 + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2 M_r}\right)}{\left(1 - \frac{2G M_r}{c^2 r}\right)}$$

22 MHz

⇒

rotičím periody:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\omega_f = \omega_i \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2$$

magnetické pole:

$$B_i 4\pi R_i^2 = B_f 4\pi R_f^2$$

$$\int B dS = \text{const.}$$

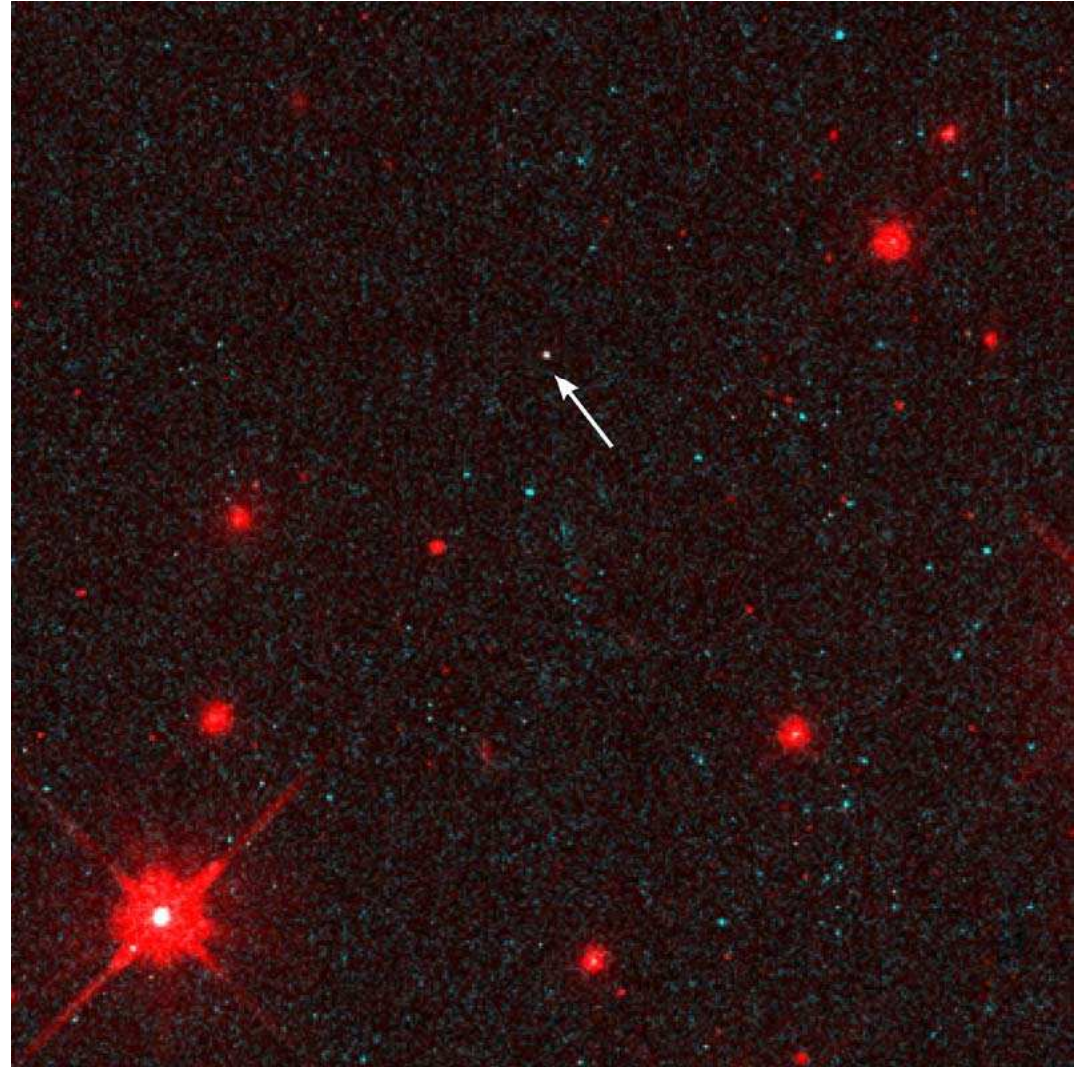
$$B_{nh} \approx 10^{10} \text{ T}$$

# Neutronová hvězda

15 km

1,5  $M_{\odot}$

$10^6$  K



# Neutronové hvězdy

při  $\rho > 10^{12} \text{ kg.m}^{-3}$  nastává neutronová degenerace

neutronizace  $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$



**výrazné gravitační a magnetické pole neutronových hvězd**



# Neutronové hvězdy

srovnání neutronových hvězd a obrů básníkem

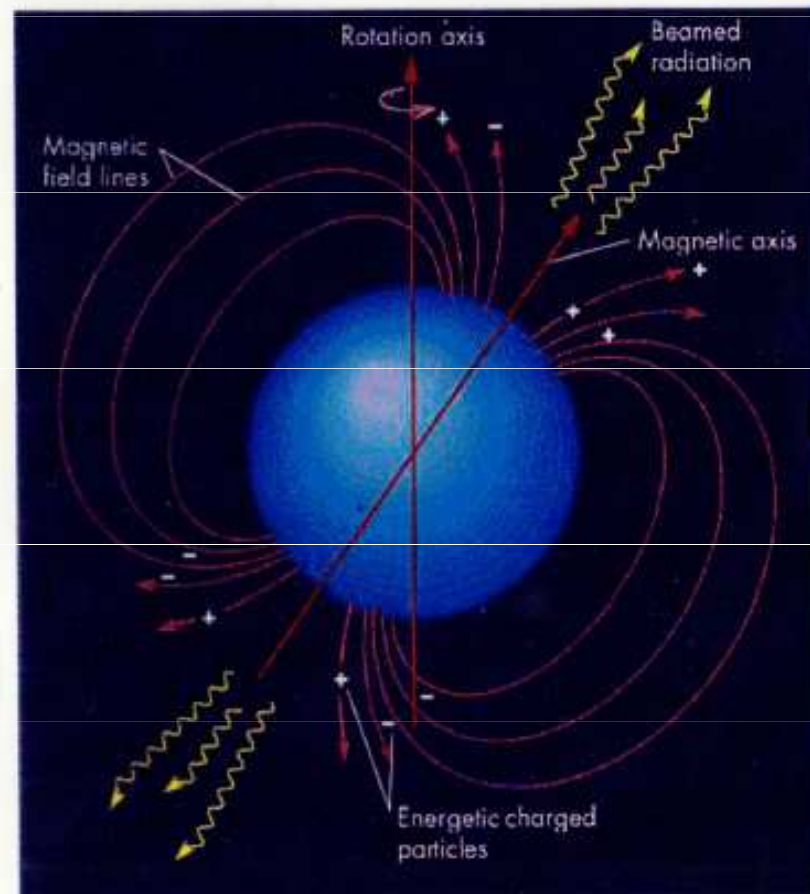
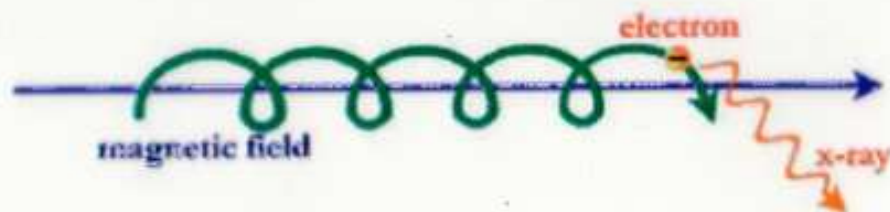
**Jan Neruda**  
**Písně kosmické**

*Tot' prostě tím: ty maličké  
z jaderného jsou fládru,  
ale ty velké a poslušné  
jen z plynových jsou hadrů.*

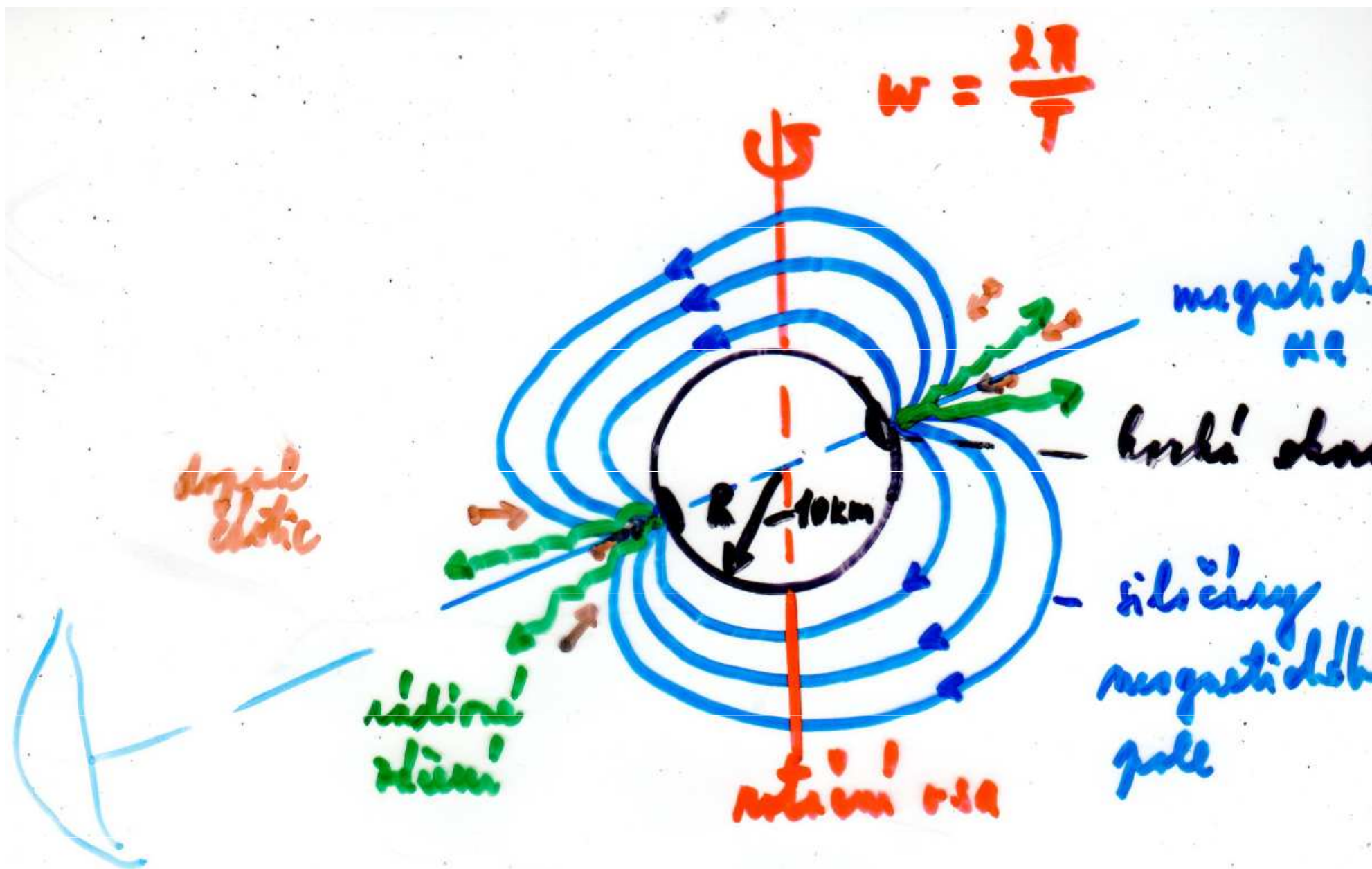


# Neutronové hvězdy - pulsary

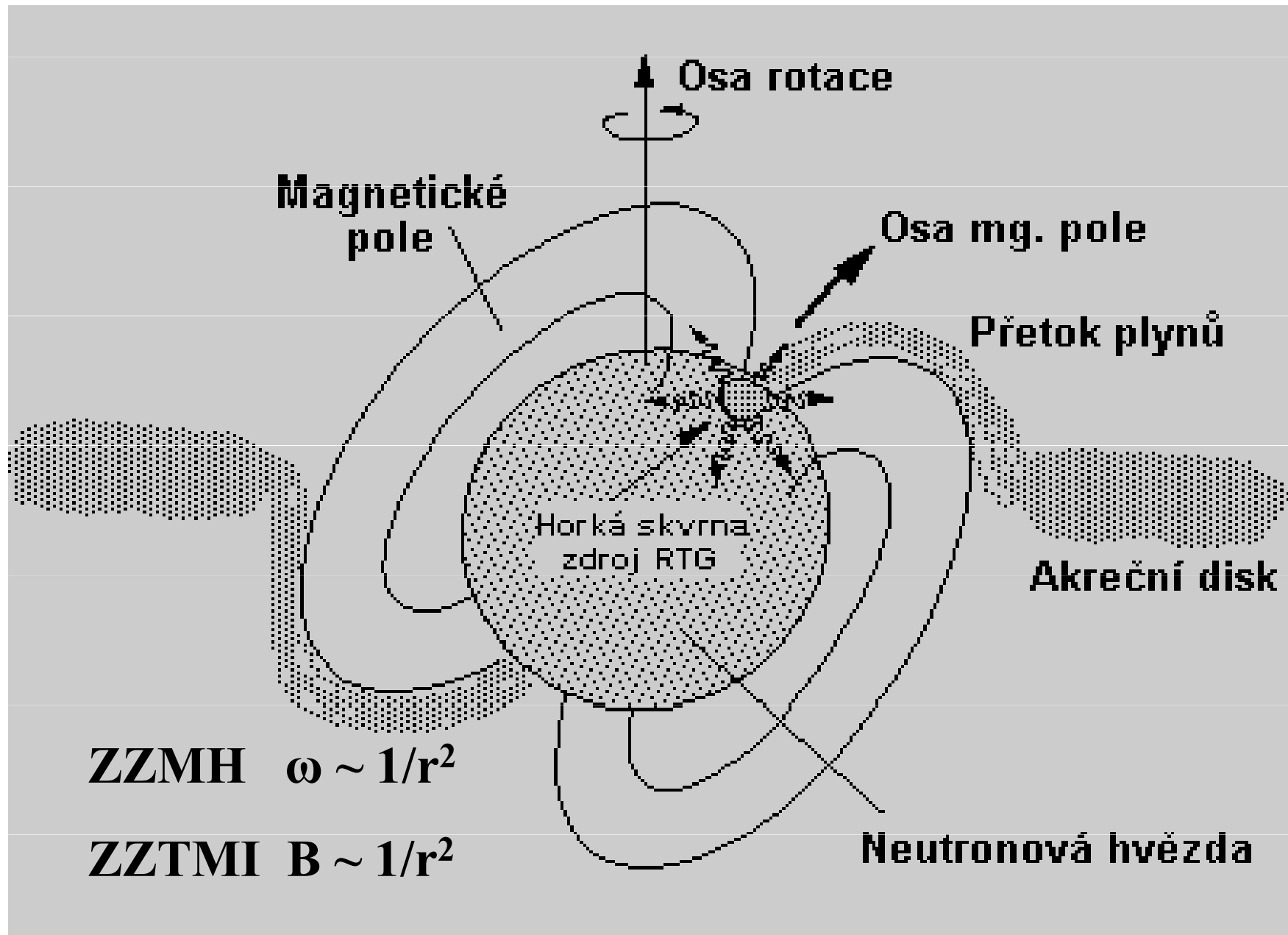
- 1968: T. Gold & F. Pacini
- Magnetic axis is tipped to rotation axis
- Charged particle can move along magnetic field lines only
  - escape along open field lines
  - trapped along closed field lines



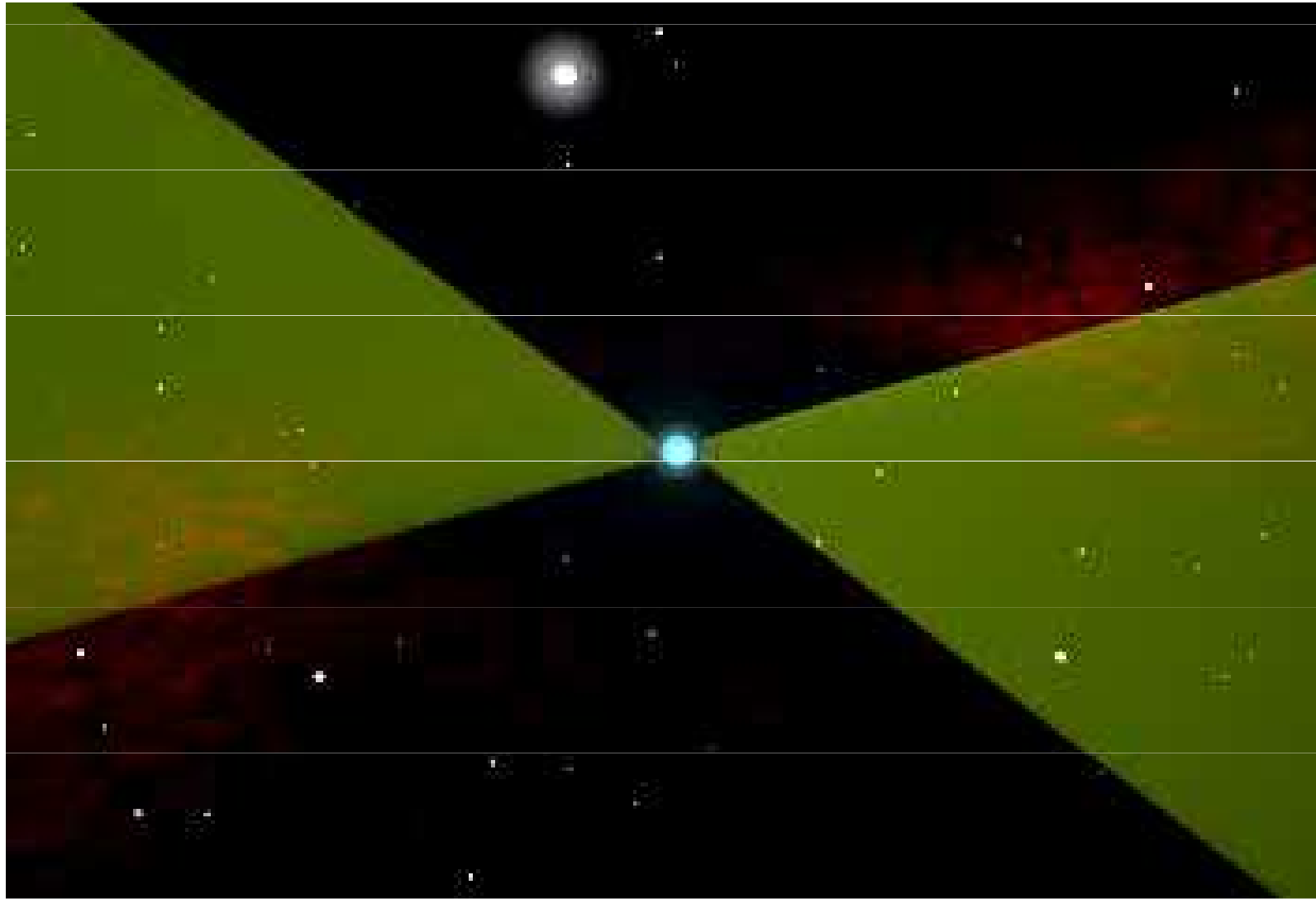
# Neutronové hvězdy - pulsary



# Majákový model pulsaru



# Majákový model pulsaru





# Neutronové hvězdy

## Neutronové hvězdy

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho_r}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{P}{c^2 \rho_r}\right) \left(1 + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2 M_r}\right)}{\left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r}\right)}$$

22 MHz

⇒

rotičím periody:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\omega_f = \omega_i \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2$$

magnetické pole:

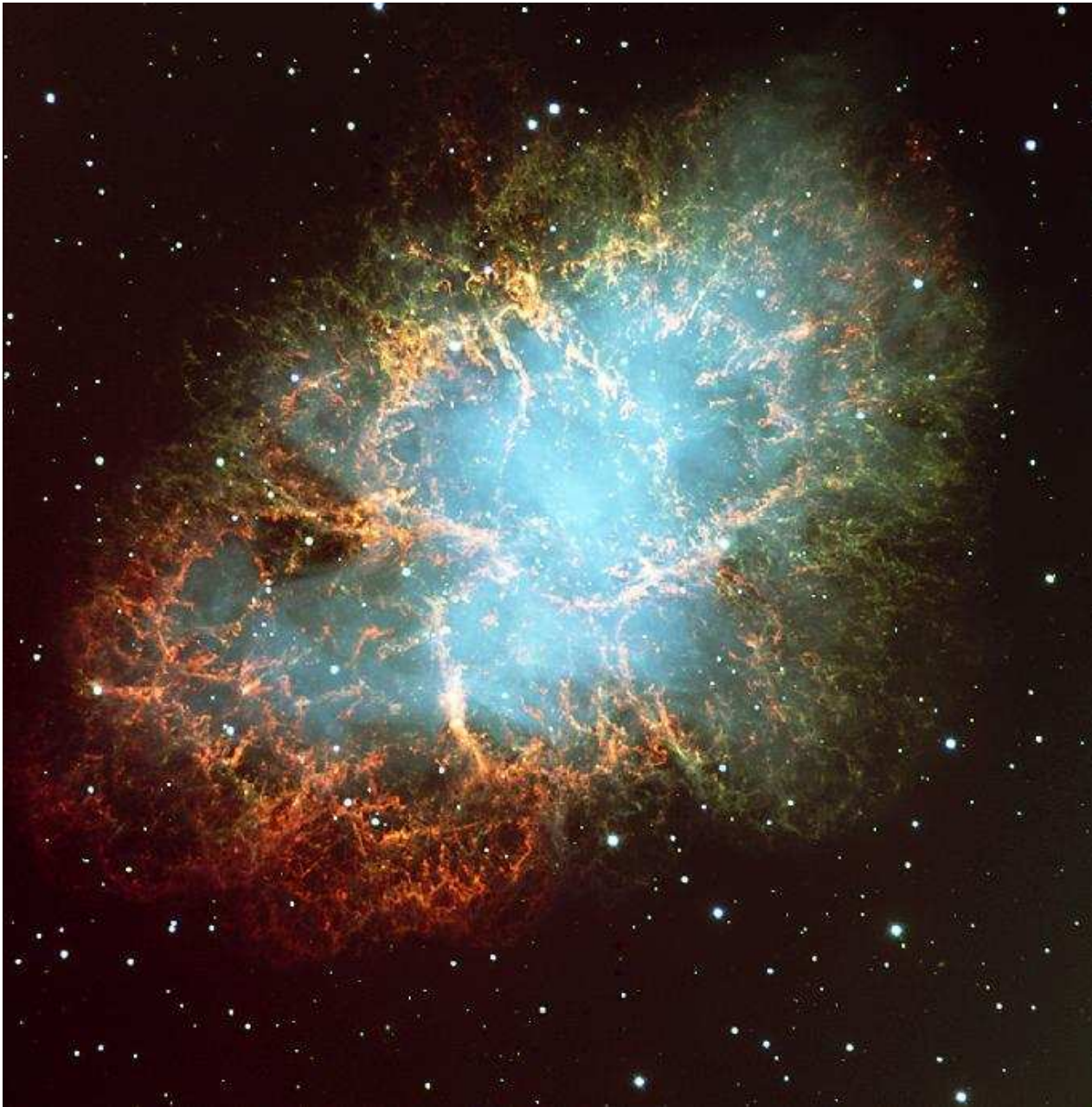
$$B_i 4\pi R_i^2 = B_f 4\pi R_f^2$$

$$\int B dS = \text{konst.}$$

$$B_{nh} \approx 10^{10} \text{ T}$$

pulsary – rychle rotující neutronové hvězdy se silným magnetickým polem

# Krabí mlhovina



vznik r. 1054

$r = 2 \text{ kpc}$ ,  $d = 3 \text{ pc}$

hmotnost  $3,5 M_{\odot}$

pulsar  $1,4 M_{\odot}$

$P = 0,033 \text{ s}$

$L = 5 \cdot 10^{31} \text{ W}$

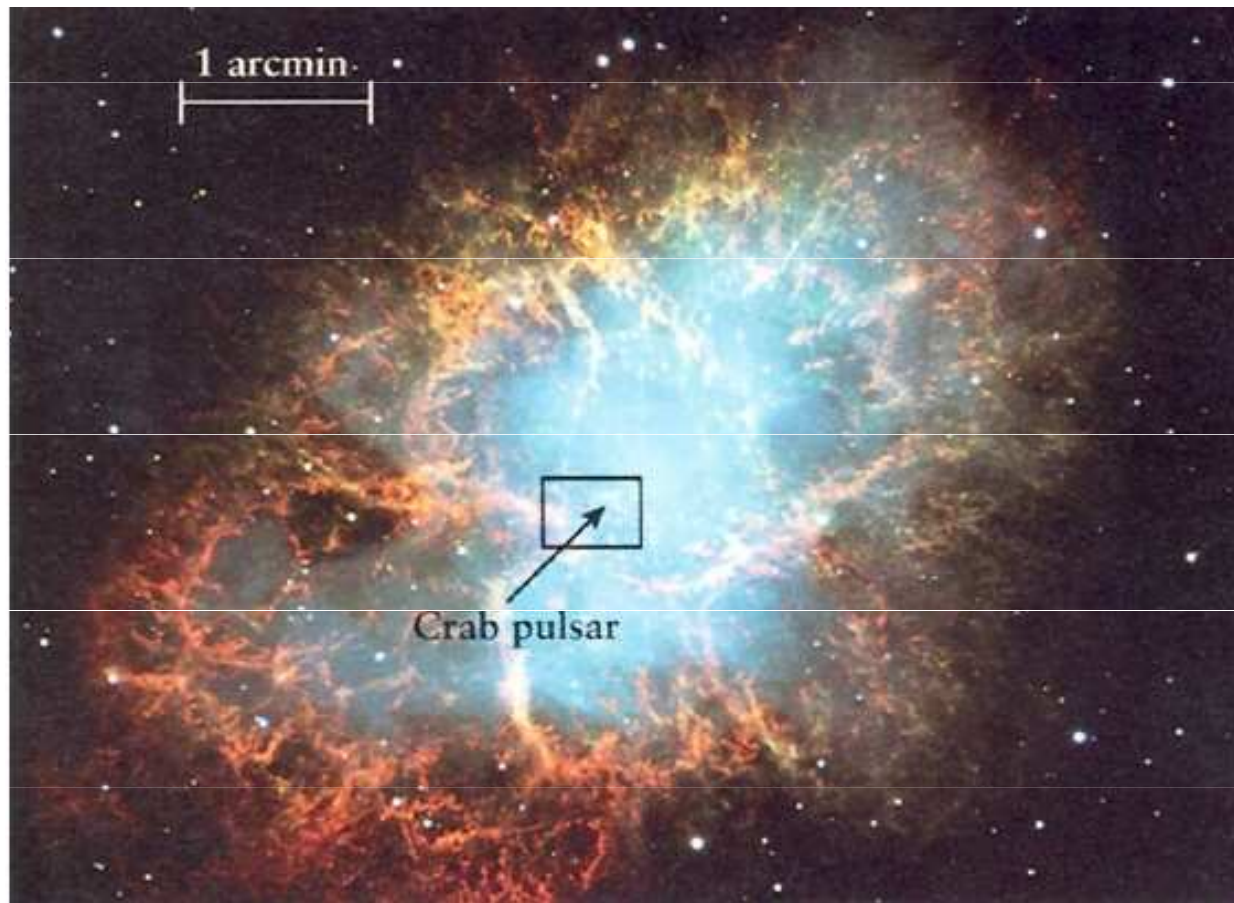
$v_{\text{exp}} = 1\,500 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$

vodíkové čáry - II typ  
supernovy

# Krabí mlhovina



# Vznik neutronové hvězdy – pulsaru



**Krabí mlhovina – *M 1***

# Vznik Krabí mlhoviny



# Pulsar v Krabí mlhovině

úbytek kinetické rotační energie = vyzářená energie

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = \frac{dE_{zar}}{dt}$$

zářivý výkon Krabí mlhoviny  $\frac{dE_{rot}}{dt} = -5 \cdot 10^{31} W$

- odpovídá změně rotační energie za sekundu

rotující magnetický dipól, ve vnitřní části mlhoviny

produkce vysoce energetických elektronů

# Pulsar v Krabí mlhovině

Proč má **takové** extrémní vlastnosti ?

jeho vznik - zákon zachování momentu hybnosti  $L = mrv$

při  $M = 1,4 M_{\odot}$ ,  $R = 10 \text{ km}$ ,  $P = 0,033 \text{ s}$ ,  $dP/dt = 4 \cdot 10^{-13}$

moment setrvačnosti tuhého tělesa - koule  $J = \frac{2}{5} MR^2$

rotační kinetická energie  $E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$

úhlová rychlost  $\omega = \frac{2\pi}{P}$

změna rotační energie

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = -\frac{8}{5} \pi^2 MR^2 P^{-3} \frac{dP}{dt}$$



# Vlastnosti neutronových hvězd

## Neutronové hvězdy

$$M \approx (1-2) M_{\odot}$$

PSR J 1614-2230

$$(1,97 \pm 0,04) M_{\odot}$$

$$R \approx (10-14) \text{ km}$$

$$\rho \approx 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

teoretické modely - interpretace měření,  
analýza

relativistické objekty, významnost

parametr kompaktnosti  $x_g = \frac{r_g}{R}$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \approx \frac{2,95}{M_{\odot}} M \text{ [km]}$$

$$g = \frac{GM}{R^2 \sqrt{1-x_g}}$$

kanonická n. hvězda  $1,4 M_{\odot}$ ,  $R \approx 12 \text{ km}$

relativistické efekty ~ desítky %

většina n. hvězd - pozorování efekty OTR



# Vývoj neutronových hvězd

pro neutronové zářiví,  $W \downarrow$ ,  $T \downarrow$

ochlazování v kvazistacionárním

režimu: 1. Neutronové ochlazování  
 $10^5$  roků

2. Fotonové ochlazování  
při  $t \geq 10^5$  roků

$$\frac{dW}{dt} = c \frac{dT}{dt} = -L_V - L_f$$

$$L_f = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

teorie  $\times$  pozorování  $\rightarrow$   $M, R$  n. h.

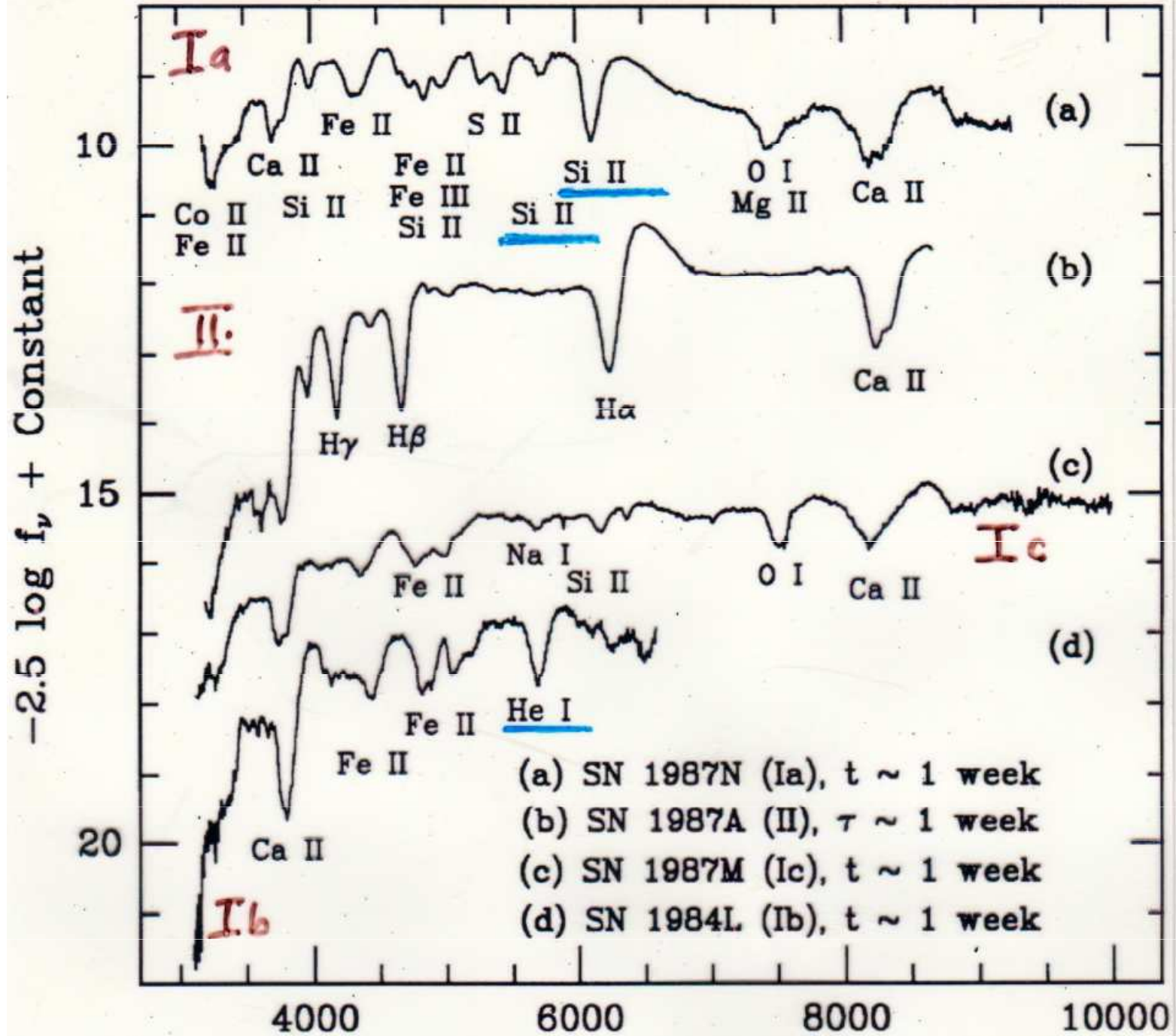
# Supernovy Ia typ

**první scénář** - bílý trpaslík, těsná dvojhvězda, **přenos hmoty z druhé složky**, nárůst hmotnosti  $\approx 10^{-6} - 10^{-8} M_S/\text{rok}$   
**překročení Chandrasekharovy meze, nestabilita,**

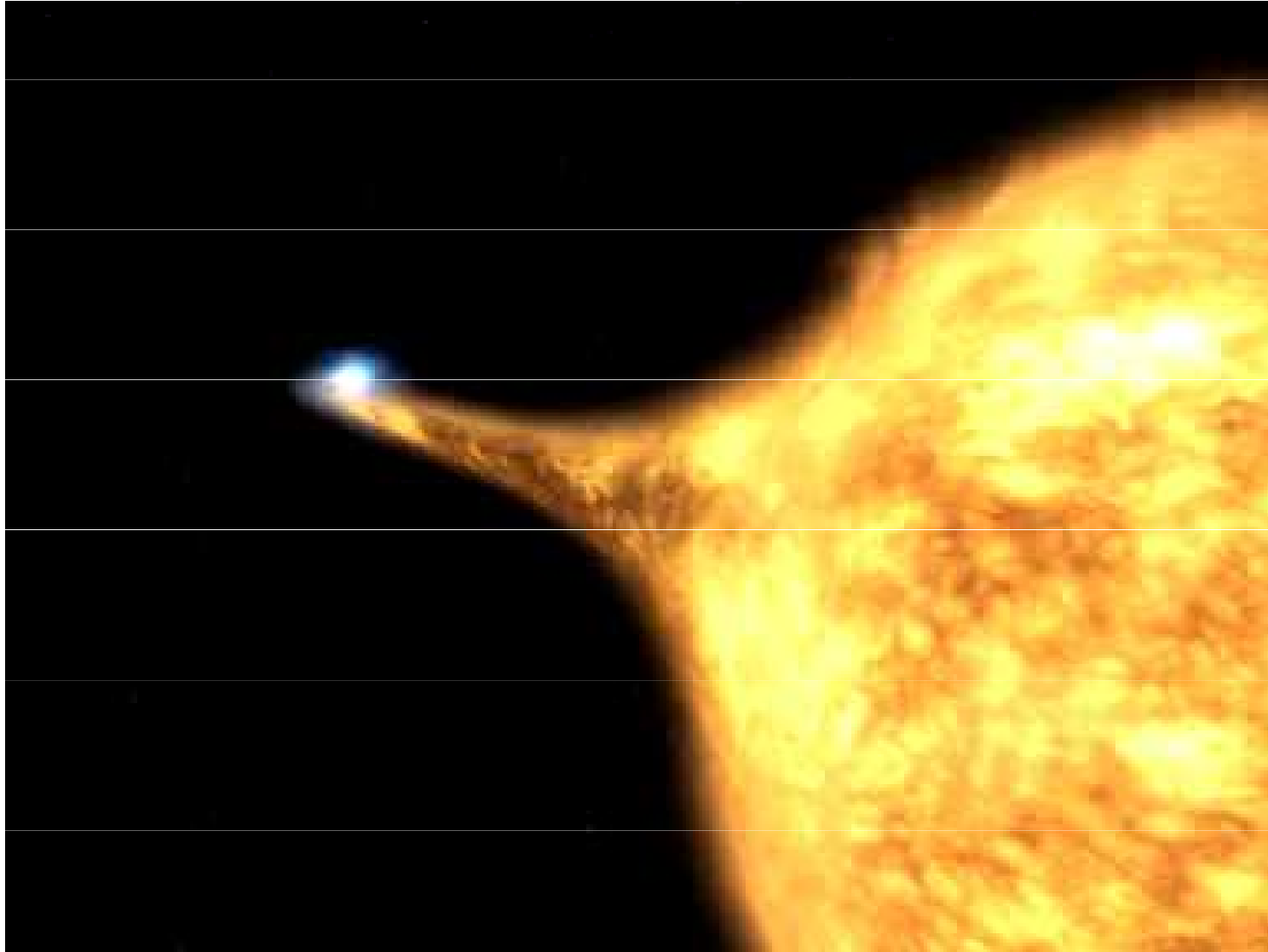
$T \approx 3 \cdot 10^8$  K hoří uhlík,  $\rightarrow T \uparrow \approx 10^9$  K, spalování explozivní, šíří se rychlostí 100 km/s, vznikají Fe, Co, Ni, Si, P, S, ... **exploze celého bílého trpaslíka**, zjasnění hvězdy o  $10^{12}$ , plyn expanduje rychlostí až 25 000 km/s, ve spektru chybí vodík (b.t. – C,O), maximální zářivý výkon  $10^9 L_S$ , Chandrasekharova mez je téměř stejná, po maximu jasnosti exponenciální pokles v průběhu řádově měsíce,

**druhý scénář – srážka neutronové hvězdy a bílého trpaslíka**

# Supernovy

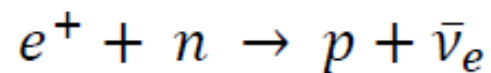
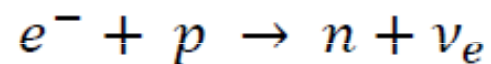
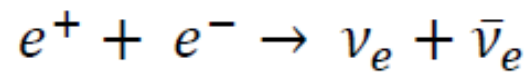


# Supernovy Ia typ



# Supernovy II. typu

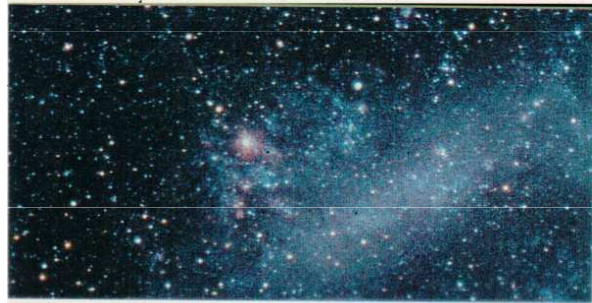
předchůdce červený, modrý velebobr,  $\approx (10 - 25) M_S$ , nestabilní stav, efekty obecné teorie relativity -  $T \approx 10^{11}$  K, hustoty  $\approx 10^{18} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  nejprve imploze, zhroucení do jádra  $(1-2) M_S$ ,



neutrino odnáší energii

následně exploze, maximální zářivý výkon  $10^8 L_S$ , rychlost expanze  $(6\,000 - 20\,000) \text{ km/s}$ , silné vodíkové čáry ve spektru

# Supernova 1987 A



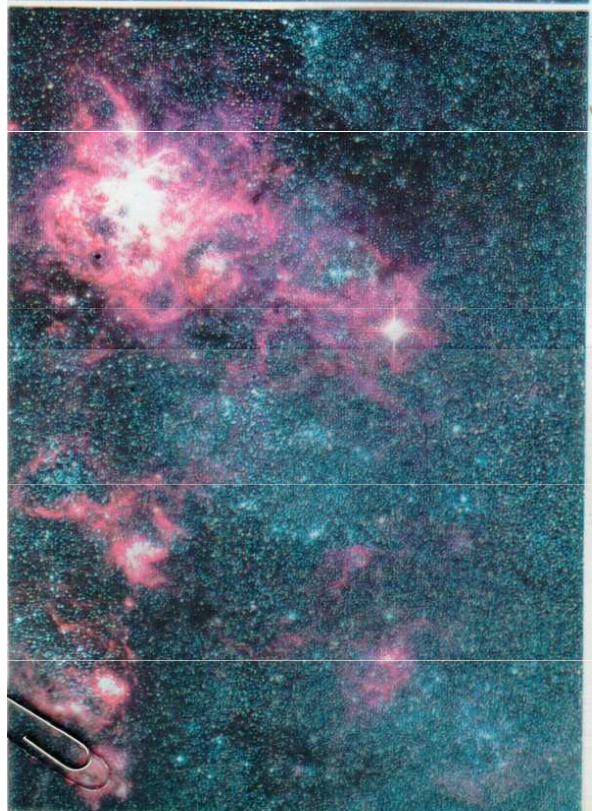
23. 2. 1987

modrý veleobr,  $18 M_{\odot}$   
 $8 \times 10^4 L_{\odot}$ , 12,3 mag



25. 2. 1987

supernova, v maximu  
 $2 \times 10^8 L_{\odot}$ , 2,8 mag



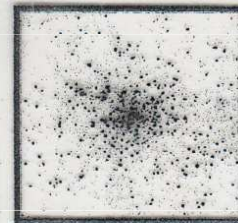
Tarantule NGC 2070

$3 \times 10^5 M_{\odot}$

1500 sv. r. 12 hvězd  $\sim$

150  $M_{\odot}$

oblast  $H II$  50 000 K



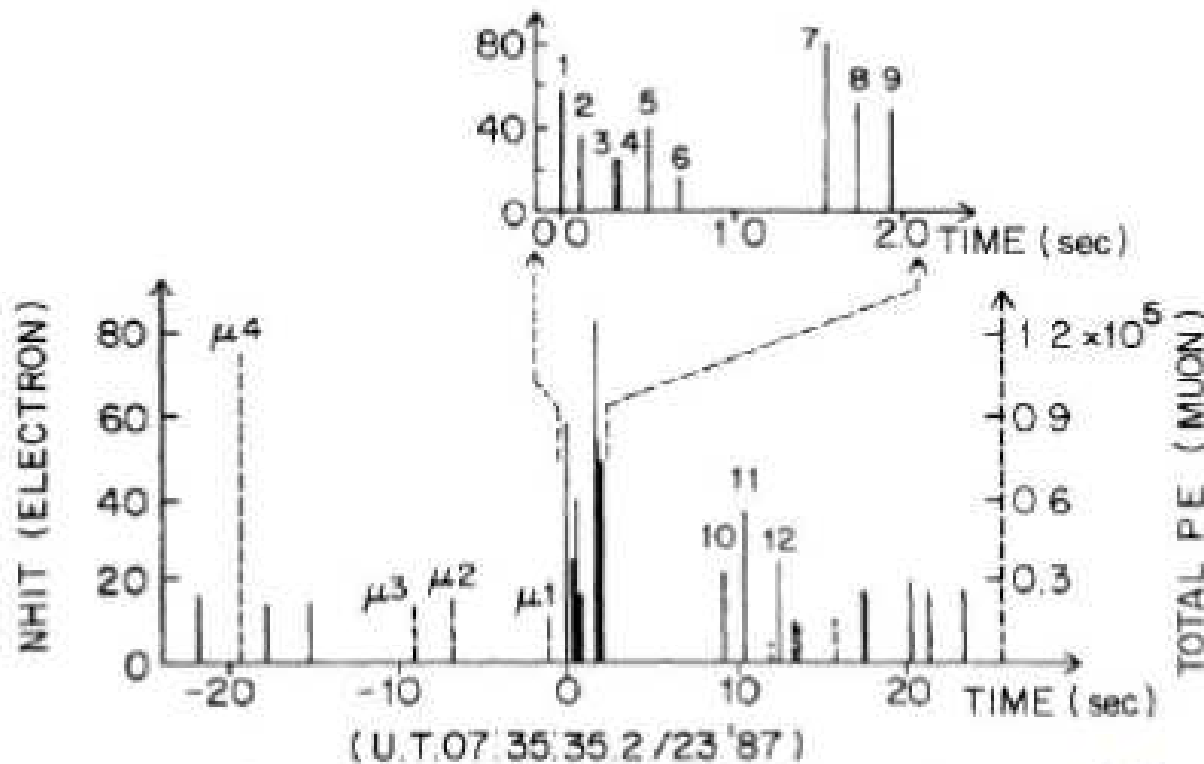
1

Hubble Space Telescope • WFPC2 • FOS  
WFPC2 Science Team and NASA / P. Massey (NGAO), D. Hunter (Lowell Obs.)

# Supernova 1987 A

## Neutrina se supernovy SN1987A

23. února 1987 byl ve Velkém Magellanově mraku pozorován výbuch supernovy SN1987A. Kamiokande zaznamenal 3 hodiny před optickým signálem shluk 11 případů během 13 vteřin.

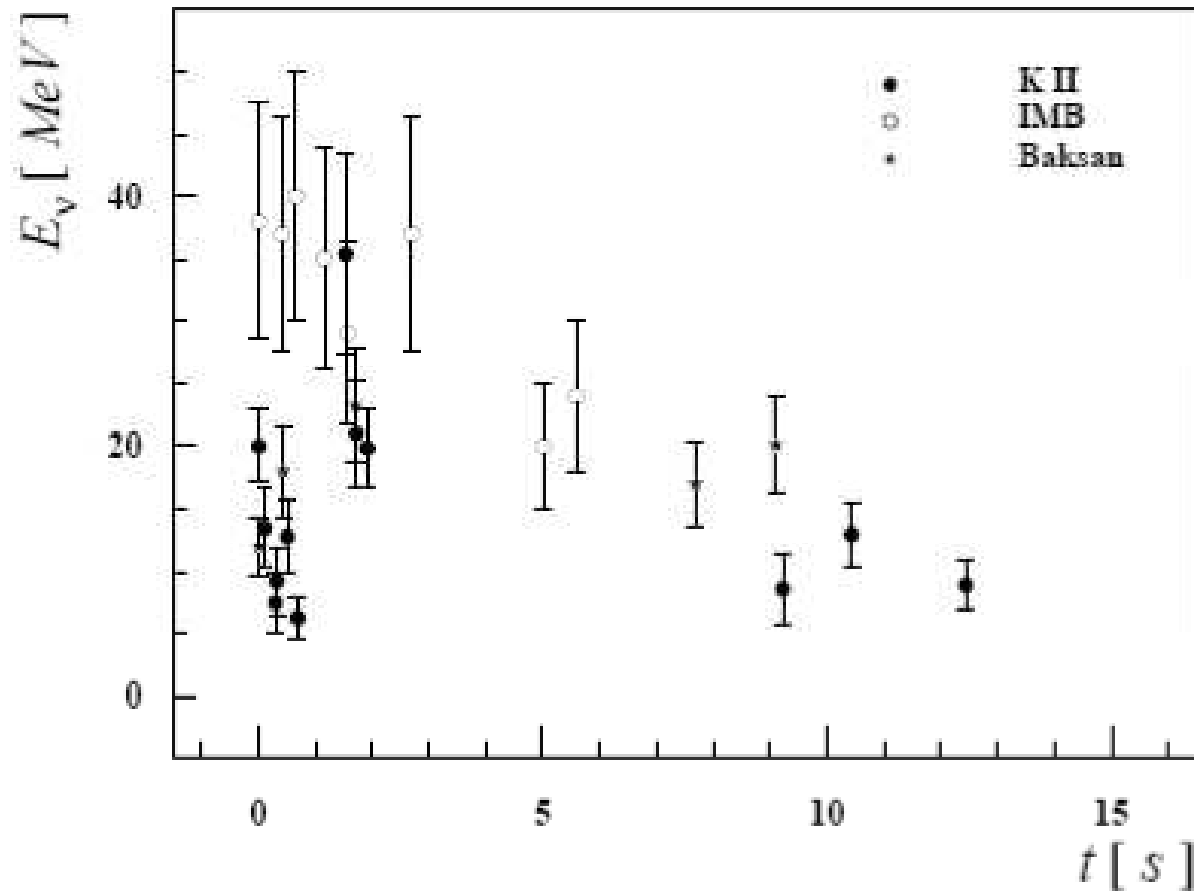


Interpretace: neutrina doprovázející vznik neutronové hvězdy u supernov typu II v procesu:  $e^- + p \rightarrow \nu_e + n$

# Supernova 1987 A

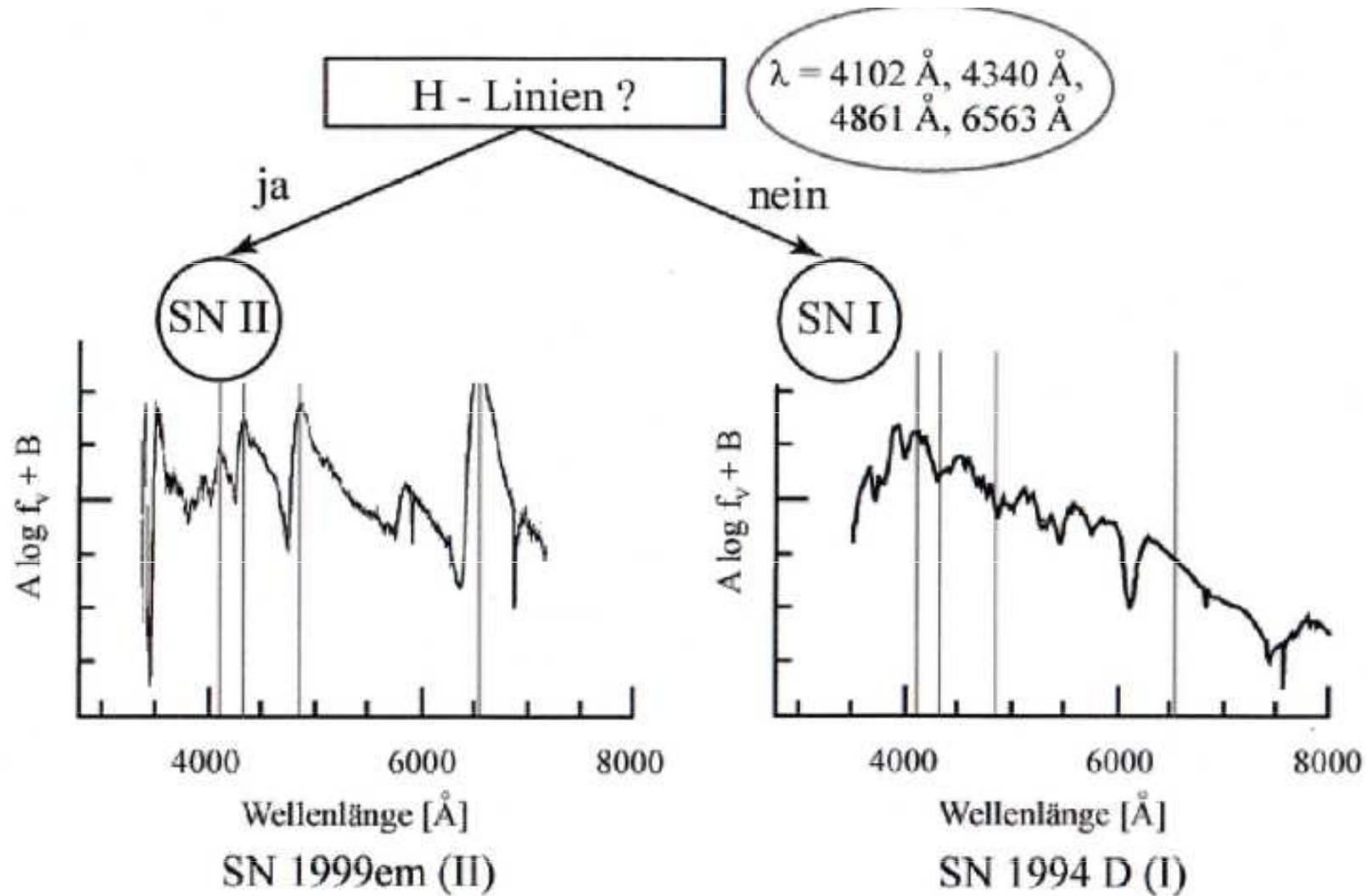
## Neutrino ze supernovy SN1987A

37



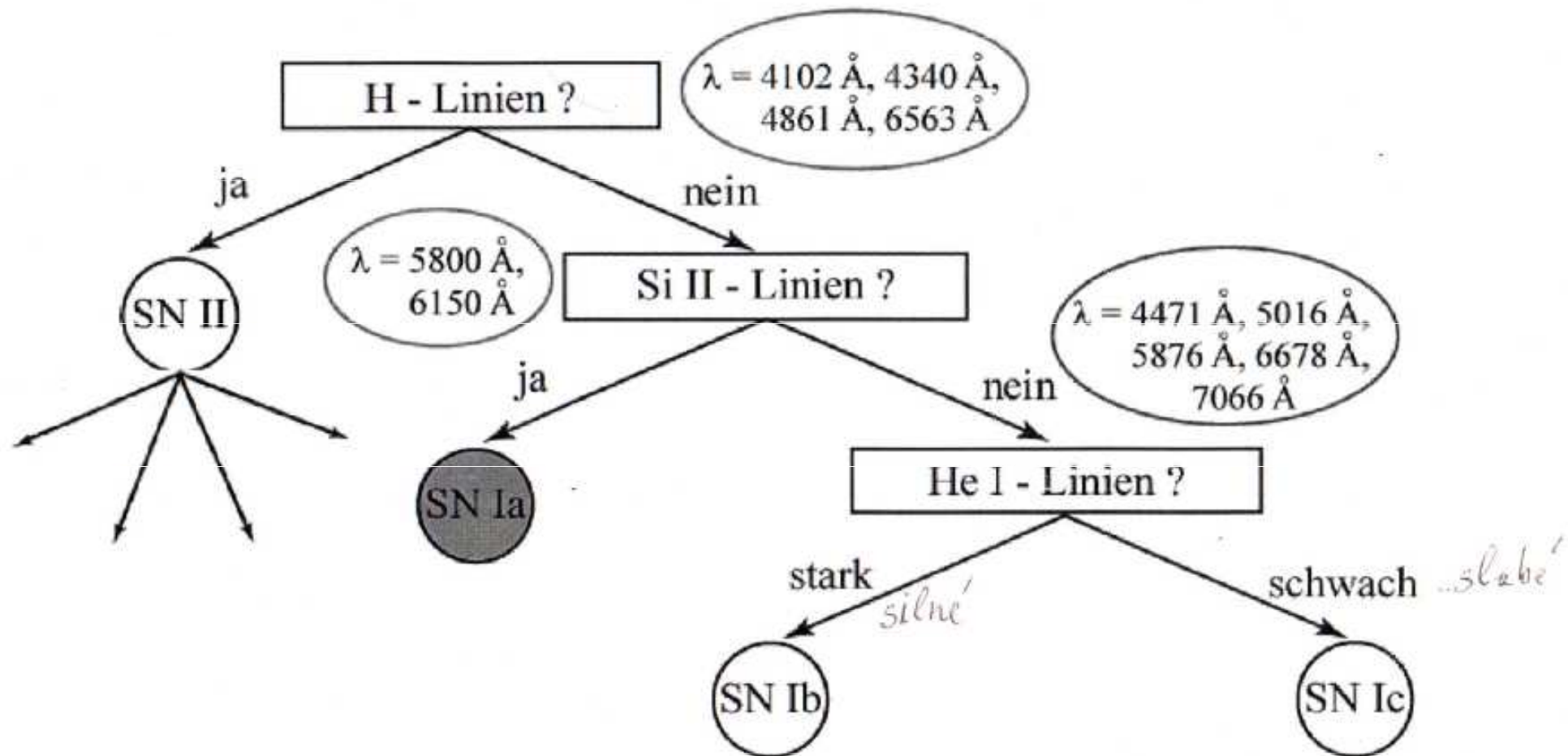


# Supernovy – klasifikace



*SN 1987 A*

# Supernovy – klasifikace



# Černé díry - vznik

Jestliže se smršťování jádra hvězdy nezastaví při elektronovém degenerovaném plynu jako u bílých trpaslíků respektive při neutronovém degenerovaném plynu jako u neutronových hvězd a pokračuje dále, pak hvězda přechází do stavu tzv. černé díry. Ta vzniká jako závěrečné stádium vývoje hvězdy při relativistickém gravitačním smršťování - kolapsu hvězdy, jejíž hmotnost jádra v okamžiku smršťování převyšuje určitou kritickou hodnotu hmotnosti z intervalu  $2,5 M_{\odot} - 3,0 M_{\odot}$ , v závislosti na přijaté stavové rovnici. Při zrychlujícím se smršťování jádra hvězdy se uvolňuje gravitační potenciální energie, jejíž podstatná část je z jádra hvězdy odnášena prostřednictvím neutrin.

Pokud pro poloměr hvězdy platí, že  $r > 10 R_g$ , smršťování probíhá rychlostí volného pádu za čas

$$t = (6\pi G \rho)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.3.1)$$

Uvedený vztah lze zjednodušeně odvodit z volného pádu částice na povrch kolabující koule o poloměru  $r$ , hmotnosti  $M$  a hustotě  $\rho$ . Ze zákona zachování mechanické energie pro jednotkovou hmotnost platí

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{G M}{r}, \quad (5.3.2)$$

odkud úpravou obdržíme

$$dt = \left( \frac{r}{2GM} \right)^{\frac{1}{2}} dr. \quad (5.3.3)$$

# Černé díry - vznik

Dosazením za hmotnost  $M = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$  a další úpravou dostaneme vztah (5.3.1).

Při  $r < 10 R_g$  se stávají výraznými efekty obecné teorie relativity a k popisu dalšího smršťování volným pádem použijeme povrchu jádra hvězdy, přičemž popis však nyní závisí na volbě vztažné soustavy, ve které se nachází pozorovatel. V případě, že pozorovatel je ve vztažné soustavě spojené s povrchem smršťujícího se jádra, naměří tzv. vlastní čas. Zaregistruje, že od počátku pohybu ze vzdálenosti  $r = 10 R_g$  do vzdálenosti  $r = R_g$  uběhlo řádově několik sekund. Rychlost smršťování vzrostla prakticky až na rychlost světla. Průchod přes povrch sféry o Schwarzschildově poloměru proběhne okamžitě. Pro vnějšího pozorovatele, spojeného se vztažnou soustavou kosmických těles vně černé díry, rychlost smršťování povrchu jádra hvězdy nejprve roste, ale potom se pohyb zpomaluje a při  $r \rightarrow R_g$  rychlost klesá k nule. Časový interval přechodu povrchu jádra hvězdy přes povrch sféry o Schwarzschildově poloměru je nekonečně velký.

# Černé díry - vznik

Charakter řešení rovnic popisujících gravitační pole ve sféricko-symetrickém případě byl nalezen K. Schwarzschildem. Podle jeho řešení je závislost poloměru kolabující hvězdy na čase z hlediska vztažné soustavy spojené s vnějším pozorovatelem dána vztahem

$$r = R_g + (r_1 - R_g) e^{-\frac{c(t-t_1)}{2R_g}}, \quad (5.3.4)$$

kde  $r_1$  je poloměr hvězdy v čase  $t_1$  a ve vztahu se předpokládá, že  $(r_1 - R_g) \ll R_g$ . Ze vztahu vyplývá, že z hlediska vnějšího pozorovatele při přibližování  $r \rightarrow R_g$  rychlost smršťování se asymptoticky zmenšuje k nule. Schwarzschildovo řešení kolapsu nerotující hvězdy vede k tomu, že pohyb každého bodu na povrchu kolabujícího jádra je zkoumán jako volný pád ve sféricko-symetrickém gravitačním poli.

Rovněž svítivost kolabující hvězdy klesá s časem podle vztahu

$$L = L_0 e^{-\frac{2c}{3\sqrt{3}R_g}(t-t_1)}, \quad (5.3.5)$$

kde  $L_0$  je svítivost hvězdy v čase  $t_1$ , při  $t \rightarrow \infty$  svítivost  $L \rightarrow 0$ .

# Černé díry

Kerrova černá díra

hmotnost  $M$ , moment hybnosti  $J$ ,  
elektrický náboj  $Q$

↓  
charakterizujeme  
bezrozměrným parametrem

$$a = \frac{cJ}{GM^2}$$

max...  $a = 1$

$$a_0 = 0.185$$

Schwarzschildova černá díra

$$J = 0, Q = 0$$

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

# Černé díry - vznik

Nechť  $\Delta\mathcal{T}$  je časový interval mezi dvěma událostmi, které probíhají ve vzdálenosti  $r$  od středu černé díry, pro konkrétnost zvolme že  $r$  je poloměr černé díry. Čas naměřený pozorovatelem na povrchu černé díry je vlastní čas  $\mathcal{T}$ . Dále nechť  $\Delta t$  je časový interval mezi stejnými dvěma událostmi, který je naměřen pozorovatelem v tzv. souřadnicovém čase  $\tau$  nekonečně velké vzdálenosti od černé díry. Oba časové intervaly jsou mezi sebou vázány vztahem

$$\Delta t = \frac{\Delta\mathcal{T}}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Delta\mathcal{T}}{\left(1 - \frac{R_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.3.6)$$

Jestliže je vzdálenost  $r$  od středu černé díry podstatně větší než gravitační poloměr  $R_g$ , pak platí  $\Delta t = \Delta\mathcal{T}$ , tedy ve velkých vzdálenostech od černé díry je souřadnicový čas shodný s vlastním časem. Při  $r \rightarrow R_g$  pro libovolný interval vlastního času  $\Delta\mathcal{T}$  platí, že  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Jinými slovy časový interval mezi dvěma událostmi je nekonečně velký.

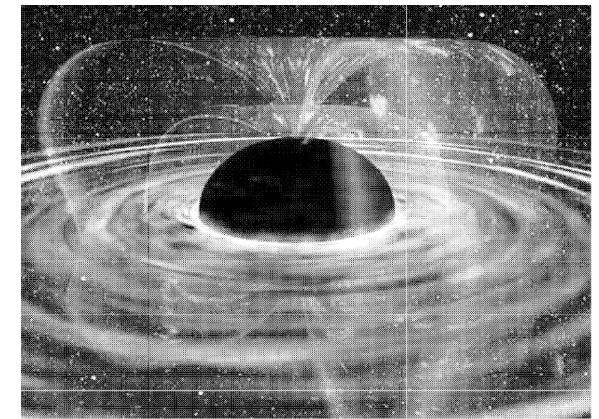
Pod časovým intervalem  $\Delta\mathcal{T}$  můžeme rozumět periodu elektromagnetické vlny  $T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c}$ . Ze vztahu (5.3.6) vyplývá, že vlnová délka  $\lambda$  registrovaná pozorovatelem bude větší než vlnová délka  $\lambda_0$ , kterou emituje atom ve vzdálenosti  $r$  od černé díry, přičemž platí

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\left(1 - \frac{R_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.3.7)$$

Ze vztahu vyplývá, že při  $r \rightarrow R_g$  dostáváme  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Relativistický efekt gravitačního rudého posuvu vlnových délek v blízkosti hvězd s velkou hmotností je nutno uvažovat při studiu smršňování jader hvězd v závěrečných stádiích vývoje hvězd.

# Černé díry



Další aplikaci rozměrové analýzy spojujeme s astrofyzikálně exotickými objekty - černými děrami (obr. 2), zpracováno podle [7]. Nechť  $A$  je plocha horizontu událostí. Vyjádříme ji pomocí konstant  $G$ ,  $c$  a hmotnosti černé díry  $M$ . Platí vztah  $A \sim G^x c^y M^z$ . Rozměr jednotlivých parametrů je  $[A] = \text{m}^2$ ,  $[G] = \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $[c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $[M] = \text{kg}$ . Srovnáním rozměrů levé a pravé části vztahu obdržíme  $\text{m}^2 = \text{m}^{3x} \cdot \text{kg}^{-x} \cdot \text{s}^{-2x} \cdot \text{m}^y \cdot \text{s}^{-y} \cdot \text{kg}^z$ . K platnosti rozměrové rovnice musí být splněny podmínky algebraických rovnic:

$$[\text{m}] \quad 2 = 3x + y$$

$$[\text{kg}] \quad 0 = -x + z$$

$$[\text{s}] \quad 0 = -2x - y$$

Řešením rovnic obdržíme  $x = 2$ ,  $y = -4$ ,  $z = 2$ , hledaný vztah má tvar  $A \sim G^2 c^4 m^2$ .



# Černé díry

Předpokládejme, že plocha povrchu černé díry odpovídá ploše horizontu událostí. V roce 1971 *Hawking* v [8] na základě úvah vyplývajících z obecné teorie relativity dospěl k závěru, že plocha horizontu událostí černé díry se při libovolných klasických procesech nemůže zmenšovat, tj. chová se jako entropie,  $\Delta A \geq 0$ . Platí tvrzení analogické druhému zákonu termodynamiky konstatujícímu, že celková entropie uzavřeného systému se nezmenšuje. *Bekenstein* [9] formuloval názor, že entropie černé díry je úměrná ploše jejího povrchu,  $S = \eta A$ . Při znalosti rozměru entropie  $[S] = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  vyjádřete prostřednictvím konstant  $c$ ,  $G$ ,  $h$  a  $k$  o rozměrech:

$$[c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$[G] = \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$[h] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$[k] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Úpravou obdržíme  $\eta = \frac{S}{A}$ ,  $[\eta] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Platí  $\eta \sim C^x G^y h^z k^w$ . Srovnáním rozměrů levé a pravé části máme:

$$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} = \text{m}^x \cdot \text{s}^{-x} \cdot \text{m}^{3y} \cdot \text{kg}^{-y} \cdot \text{s}^{-2y} \cdot \text{kg}^z \cdot \text{m}^{2z} \cdot \text{s}^{-z} \cdot \text{kg}^w \cdot \text{m}^{2w} \cdot \text{s}^{-2w} \cdot \text{K}^{-w}$$

# Černé díry

K platnosti rozměrové rovnice musí být splněny podmínky algebraických rovnic:

$$[\text{m}] \quad 0 = x + 3y + 2z + 2w$$

$$[\text{s}] \quad -2 = -x - 2y - z - 2w$$

$$[\text{kg}] \quad 1 = -y + z + w$$

$$[\text{K}] \quad -1 = -w$$

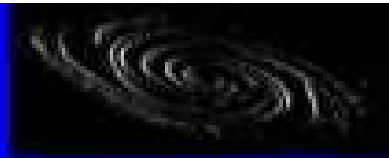
Řešením systému obdržíme  $x = 3$ ,  $y = -1$ ,  $z = -1$ ,  $w = 1$ . Odtud pro  $\eta = \frac{c^3 k}{Gh}$ , tedy platí  $S = \frac{c^3 k}{GH} A$ . Až na numerický faktor jde o stejný vztah, který obdržel v původním historickém odvození [9] Bekenstein.

[8] *Hawking, S.*: Gravitational radiation from colliding black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 26, (1971), p. 1344.

[9] *Bekenstein, J.*: Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7 (1973), p. 2333.

# Černé díry

## Černé díry



- Konečné stadium hvězd s hmotností  $> 25 M_{\text{Slunce}}$ 
  - hvězdné černé díry s hmotností 3-15  $M_{\text{Slunce}}$
- Jádra galaxií
  - hmotnost  $10^6 - 10^9 M_{\text{Slunce}}$
- Mikroskopické černé díry ( $10^{11} \text{ kg} =$  hmotnost hory)



John A. Wheeler  
(1911-)

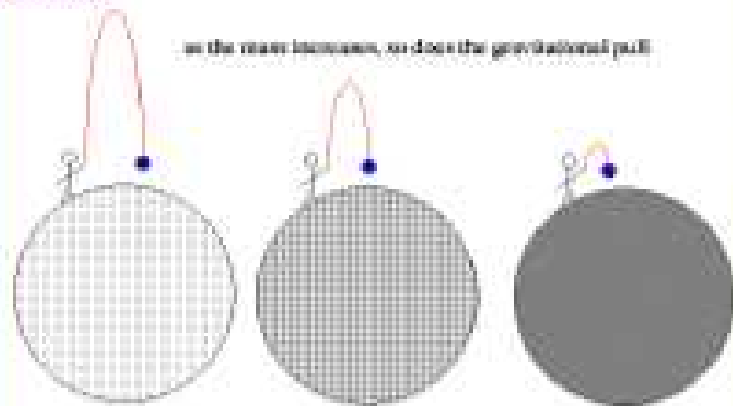


Karl Schwarzschild  
(1873-1916)

Poloměr černé díry s danou hmotou

Objekt	Hmotnost	Poloměr černé díry
Země	$5.98 \times 10^{27} \text{ g}$	0.9 cm
Slunce	$1.989 \times 10^{33} \text{ g}$	2.9 km
Hvězda $5x M_{\odot}$	$9.945 \times 10^{33} \text{ g}$	15 km
Jádro galaxie	$10^6 M_{\odot}$	$3 \times 10^6 \text{ km}$

Black Hole

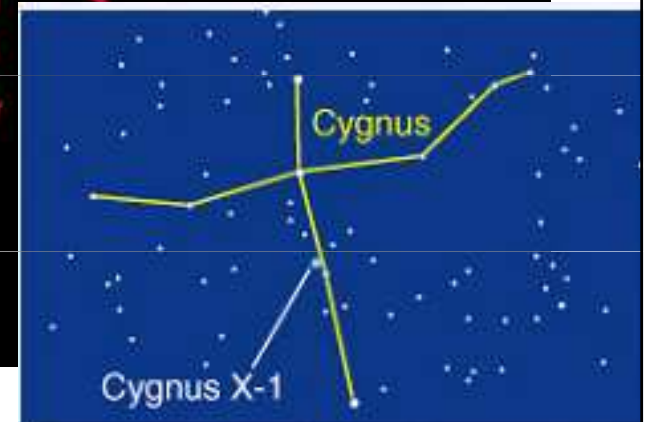
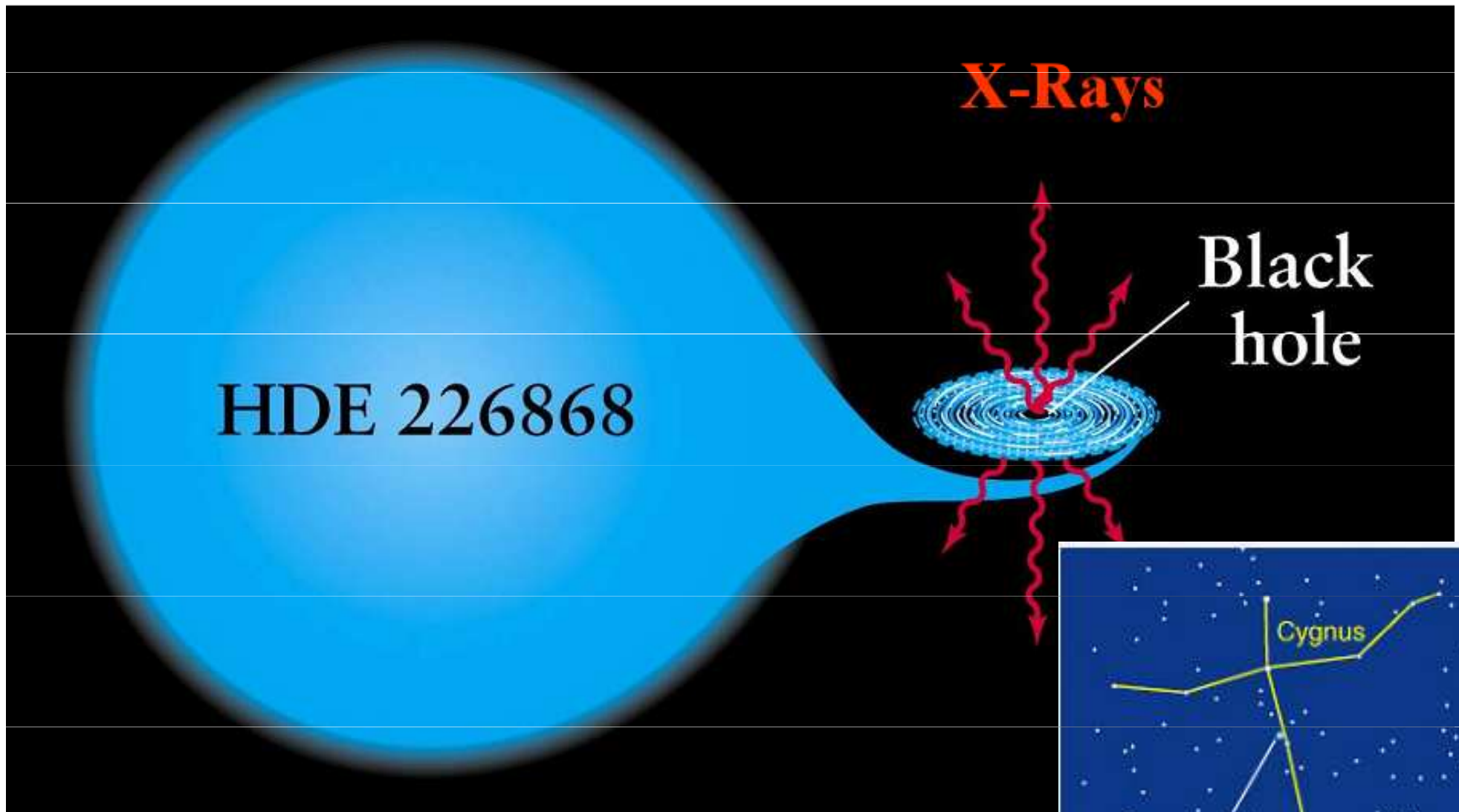


If the gravitational pull is such that even light cannot escape, then a black hole forms

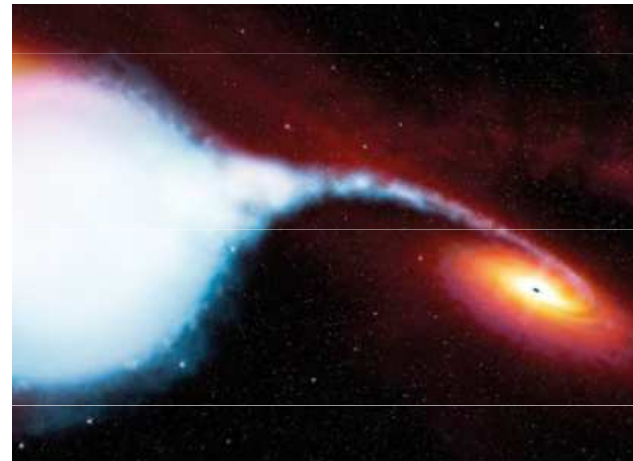


# Dvojhvězda Cygnus X - 1

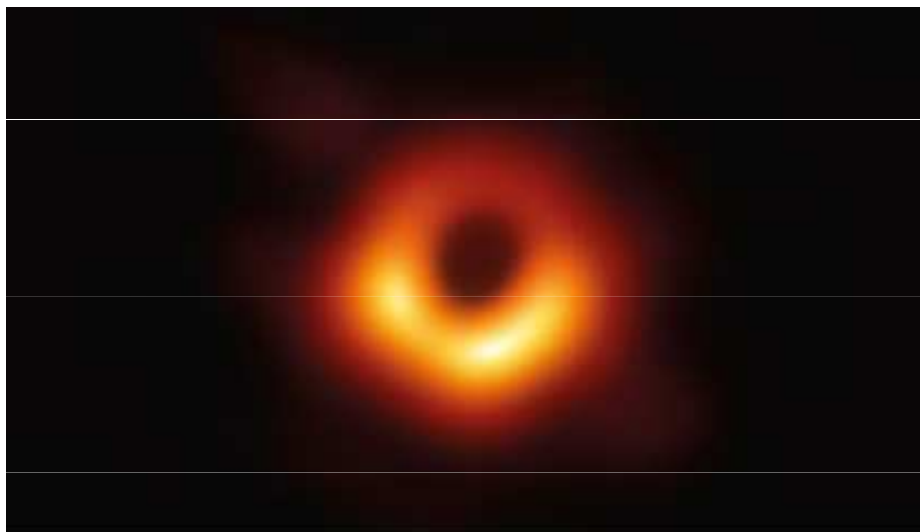
## Model of Cygnus X-1



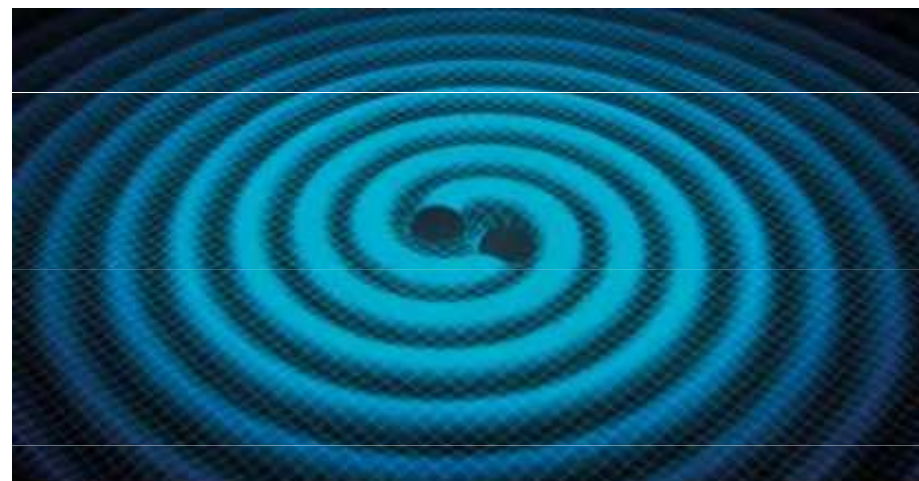
# Černé díry



**Obr. 7** Umělecká představa černé díry v rentgenové dvojhvězdě Cygnus X-1. Jedná se o první objevenou černou díru. Váží okolo 15 hmot Slunci – stejně jako hvězda, spolu s níž obíhají okolo společného těžiště. *Kredit: NASA*

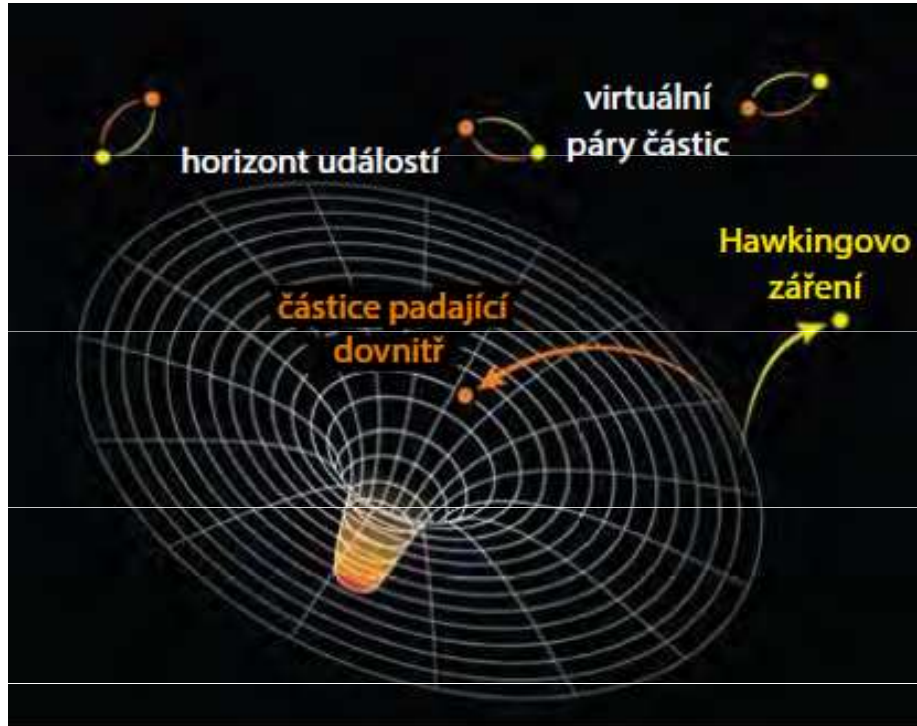


**Obr. 1** První snímek černé díry v centru galaxie M87 pořízený radioteleskopy zapojenými do sítě Event Horizon Telescope. Černá díra vytváří stín – tmavší místo uprostřed obrázku, okolo nějž svítí plyn, který zřejmě obíhá. Dopplerovým jevem je pak zjasněná ta část disku, kdy se hmota k nám přibližuje. *Kredit: EHT*



**Obr. 2** Když se dvě černé díry k sobě přibližují, uvolňuje se energie ve formě gravitačních vln, které rozvlní okolní prostoročas. Tato porucha se pak rychlostí světla šíří do vesmírného okolí. Nejintenzivnější je pak těsně před samotným splnutím černých děr do sebe za vzniku větší černé díry. *Kredit: LIGO*

# Černé díry – vypařování, S. Hawking



$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 kGM}$$

**Obr. 6** Schematická představa, jak by mohlo vznikat Hawkingovo záření. Virtuální pár částice–antičástice se rozdělí na horizontu událostí. Zatímco jedna částice zůstane v černé díře, druhé se podaří uniknout.

*Kredit. ESO*

Evaporation takes this long –  
 $10^9 M_{\odot}$  black hole:  $10^{94}$  years.  
 $2 M_{\odot}$  black hole:  $10^{67}$  years.  
 $10^8$  gram black hole: 1 second (!)

# Přehled vývoje hvězd

