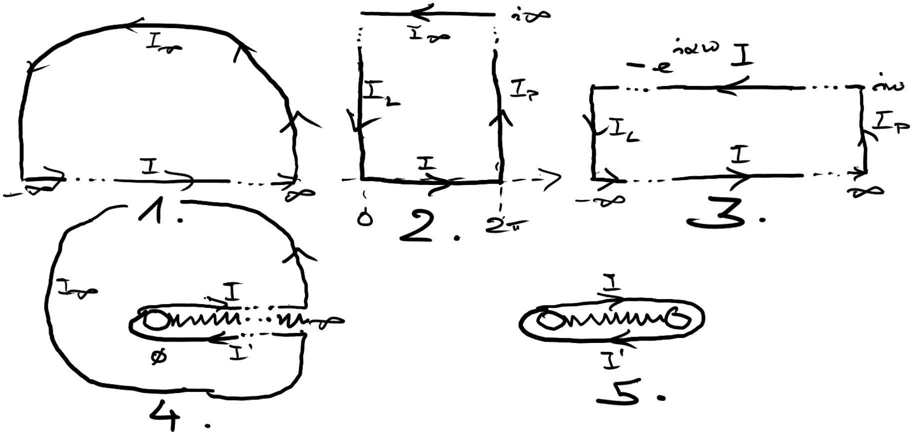
Tahák k residuové větě

Šikovné integrační cesty:



1. Tahle se hodí na racionální funkce. Máme-li tam i $\mathbf{e}^{az}$, je potřeba, aby při $\mathfrak{Im}\, z \to \infty$ šlo $\mathfrak{Re}\, az \to -\infty$.
2. Na 2π-periodické funkce. I_L a I_P se zruší mezi sebou.
3. Na integrály $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbf{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$, kde $f(z)$ je $\mathrm{i}\omega$-periodická funkce.
4. „Pacman“ pro funkce s jedním bodem větvení, třeba $\ln z$.
5. Pro funkce se dvěma body větvení.

Princip argumentu: $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathcal{K}} \frac{f'(z)\,\mathrm{d}z}{f(z)} =$ (počet kořenů uvnitř $\mathcal{K}$) − − (počet pólů uvnitř $\mathcal{K}$).

Rouchéova věta: Je-li na křivce $\mathcal{K}$ $|g(z)| < |f(z)|$, pak $f + g$ má uvnitř $\mathcal{K}$ stejně kořenů mínus pólů jako f.

Lagrangeova inversní formule: Je-li z řešení rovnice $z - z_0 = w\varphi(z)$ při dost malém w, pak $F(z(w)) = F(z_0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \Big[F'\varphi^n\Big]_{z=z_0}$.

Ke sčítání sum: $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ má póly ve všech celých číslech, v každém je residuum 1. $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ má póly ve všech celých číslech s residuem −1 a je mnohem robustnější.

1 Vyčíslete: **1.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 - 2x + 10}$; **2.** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}\, d\varphi$;

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\operatorname{ch} x}\, dx$; **4.** $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{x^2+\lambda^2}\, dx$; **5.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x + \pi^2)}$.

2 Vyčíslete $\displaystyle\int_{\arcsin a/b}^{\pi - \arcsin a/b} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{\sin^2\varphi}}\, d\varphi$. Zkuste nějak zkombinovat dva postupy: ten na odmocniny a ten na goniometrické funkce.

3 Pomocí oddělení $\mathfrak{Re}$ a $\mathfrak{Im}$ vyčíslete: **1.** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|}{a + b\cos\varphi}\, d\varphi$;

2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|^{\alpha}}{a + b\cos\varphi}\, d\varphi$; **3.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+a^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \cos\left(\alpha \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) dx$;

($0 < a < b$ a α jsou konstanty; obor vhodných α zjistěte).

4 Označme $I_k = \displaystyle\int_0^{\infty} R(x) \ln^k x \, dx$.

1. Dokažte rekurenci $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (2\pi i)^{n-k} I_k = -2\pi i \sum_{\text{všechny póly}} \operatorname{\mathfrak{res}} R(z) \ln^n z$.

2. Nechť $\mathcal{I} = \sum \frac{z^n}{n!} I_n$. Dokažte, že $\displaystyle\mathcal{I} = -\frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} \sum_{p \text{ je pól}} p^z \operatorname*{\mathfrak{res}}_{z=p} R(z)$.

3. Ukažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln^{2n} x}{1+x^2}\, dx = (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} E_{2n}$ (E_k jsou Eulerova čísla).

5 Ukažte, že $\displaystyle z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{nk+1}{k}}{nk+1} \frac{1}{w^{nk+1}}$ je řešením rovnice $z^n - wz + 1 = 0$ ($|w| > 1$, $n \in \mathbb{N}$).

6 Sečtěte: **1.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+w^2}$; **2.** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{(n-w)^2}$; **3.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{r^2 - 2r\cos\frac{2\pi k}{n} + 1}$.