Asymptotický tahák

Symbol	Význam
$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad (x \to a)$	Výraz $\left\lvert \frac{f(x)}{g(x)} \right\rvert$ je omezený v některém okolí a.
$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a)$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$
$f(x) \sim g(x) \quad (x \to a)$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$
$f(x) \approx \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu_n(x) \quad (x \to a)$	$\forall N : \left\lvert f(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} \mu_n(x) \right\rvert = o(\mu_N(x))$

Laplaceova metoda: Idea: jestli máme $\int\limits_a^b \varphi(x) H(x, \lambda)\,\mathrm{d}x$ a H má při zvyšujícím se λ velmi ostrý peak, pak do integrálu přispívá jenom malinké okolí tohoto peaku. Budeme dělat hlavně integrály, kde H je nějaká exponenciála.

- Maximum na kraji: $\int\limits_a^b \varphi(x) \mathbf{e}^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x \approx \mathbf{e}^{\lambda h(a)} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n! a_n}{\lambda^{n+1}}.$
- Maximum v c: $\int\limits_a^b \varphi(x) \mathbf{e}^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x \approx \mathbf{e}^{\lambda h(c)} \sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!} \dfrac{a_{2n}}{\lambda^n}.$

Obojí pro $\lambda \to \infty$. Koeficienty a_n jsou dány rozvojem

$$\varphi(c + \psi(u)) \psi'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n,$$

kde c je poloha maxima a ψ je v prvním případě dáno rovnicí $h(c+\psi(u)) = h(c) - u$, v druhém $h(c + \psi(u)) = h(c) - u^2$.

1 Ukažte, že rovnice $\cos x = \frac{1}{x}$ má v každém intervalu $(2n\pi; 2n\pi + \frac{\pi}{2})$ $(n \geq 1)$ právě jeden kořen. Napište přibližný vztah pro n-tý kořen $(n \to \infty)$. Pak můžete totéž udělat i pro intervaly $(2n\pi+\pi+\frac{\pi}{2}; 2n\pi+2\pi)$.

2 Odhadněte integrály (vždy pro λ, resp. $n \to \infty$):

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^n \, dx}{(1+x^2)^n}$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin x} \sin 2mx \, dx$.

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-x\sqrt{n}} \, dx}{(1+x^2)^n}$; **5.** $\displaystyle\int_0^{1} x^{\alpha n}(1-x)^{(1-\alpha)n} \, dx$; $(0 < \alpha < 1)$

6. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2\alpha n}}{(1+x^2)^n} \, dx$; $(0 < \alpha < 1)$ **7.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2 x^2 + x}}{x^2 + \lambda x^4 + 1} \, dx$;

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} \exp\left(-e^x + \lambda x\right) \, dx$; $(m > 0)$

9. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{\lambda x - \frac{x^\alpha}{\alpha}} \, dx$; $(m > 0, \alpha > 1)$