Posledním tématem je křivkový integrál druhého druhu. Ve skriptu část 9. 3 od strany 107. Jeho význam je fyzikální, dokonce i v písemce bývá někdy zadán jako fyzikální úloha. Již na základní škole jste počítali „práci“. Jistě si vzpomínáte na úlohu typu „vypočtěte práci, kterou konáme, pokud silou velikosti F působíme na těleso a přemisťujeme je po přímé dráze délky s“. Obě veličiny vynásobíme. Později síla nepůsobila ve směru dráhy a ve vzorci se objevil kosinus. Protože v tom okamžiku nebyl k dispozici skalární součin vektorů, nebylo možné počítat práci jako skalární součin vektoru síly a vektoru dráhy. Nicméně vždy bychom pracovali se silou konstantní velikosti a směru a s přímou drahou.

Nyní budeme pracovat s vektorovou funkcí, v rovině nebo v prostoru. Prostoru se nemusíme bát, prostě budeme mít o jednu souřadnici víc, výpočet složitější nebude. V každém bodě roviny (prostoru) je definována vektorová funkce, která má dvě, resp. tři složky P, Q, R. V řešeném příkladu 9. 12 je toto pole explicitně zadáno, v ostatních příkladech složky vyčteme ze zadání příkladu. Křivkový integrál počítáme po orientované křivce, závisí na počátečním a na koncovém bodě. Jistě je rozdíl, pokud pytel brambor neseme ze sklepa a nebo do sklepa. Fyzikální interpretace je popsána na str. 108.

Křivkový integrál druhého druhu je definován v definici 9. 9. Je to poměrně „dlouhá“ definice, z příkladů ji pochopíme. Vzorce v rámečku platí, pokud je křivka orientována souhlasně se svým parametrickým vyjádřením (tím jsme se zabývali v minulém textu). Doporučuji postupovat tak, že v prvním fázi „parametrizujeme, jak umíme“, pak použijeme vzorce v rámečku, vypočítáme určité integrály a „než výsledek podtrhneme“, tak si položíme otázku, zda naše parametrizace odpovídá směru, ve kterém je zadána orientace. Pokud ano, jsme hotovi. Pokud zjistíme, že ne, u konečného výsledku změníme znaménko.

Podívejte se na př. 9. 11, kde počítáme po kladně orientované kružnici (obíháme proti směru hodinových ručiček). Složky vektorové funkce jsou $P = (x+y)$, $Q = -(x-y)$. V této úloze to není třeba ani takto vypisovat, stačí za x a y dosadit z parametrických rovnic křivky, podle definice 9. 9 dosadit za dx a dy do dvou určitých integrálů. Jejich meze jsou stejné, odpovídají mezím pro parametr t. Proto lze integrály spojit do jednoho a vypočítat. V příkladu chybí diskuze o tom, zda výsledek -8π je konečný. Podívejme se na parametrické rovnice kružnice. Pokud je $t = 0$, pak jsme v bodě [2,0], již víme, že parametr t odpovídá souřadnici φ v polárních souřadnicích. Pokud se tedy parametr t zvětšuje, bod na kružnici se pohybuje proti směru hodinových ručiček. Parametrizace tedy odpovídá tomu, že se pohybujeme po kladně orientované kružnici. Výsledek je konečný.

V příkladu 9. 12 je křivkou elipsa, to v žádné písemce nebude. Nicméně takto „fyzikálně“ příklady v písemce být zadané mohou. Bude zadané silové pole, bude zadána orientovaná křivka (úsečka, část kružnice nebo celá kružnice, část paraboly). Z tohoto zadání vyjádříme křivkový integrál druhého druhu, ten převedeme na dva určité, ty na jeden určitý a spočítáme. Vyjděte z toho, že parametrizace vám byla „napovězena“ a příklad si projděte.

Z fyziky střední školy si možná pamatujete, že pokud přemisťujete těleso v gravitačním poli Země, pak vykonaná práce nezáleží na dráze, po které to děláte, ale pouze na počátečním a koncovém bodu. Práci počítáme křivkovým integrálem druhého druhu, takže má smysl se ptát na „nezávislost takového integrálu na integrační cestě“. Na cvičení bychom řešili podobnou úlohu, jako je 9. 16. Ta má tři části. Integrál má stejný tvar (tedy složky vektorového pole jsou stejné), počítáme přes tři orientované křivky, které mají ale vždy stejný počáteční a stejný koncový bod. Spočítali bychom všechny tři integrály – doporučuji, pokud pochopíte příklad 9. 11 a mé příklady, spočítat si jako cvičení také všechny tři. V případě lomené čáry počítáme nejprve po úsečce *AB*, pak po úsečce *BC* a výsledky sečteme. Vyjde to vždy stejně. Poznáme to podle toho, že se rovnají parciální derivace P_y a Q_x . V této úloze jsou obě rovny $2x$. Porovnáním těchto derivací zjistíme, zda integrál závisí na integrační cestě, nebo zda nezávisí. Pokud se derivace rovnají, pak nezávisí a stačí spočítat zadání a). To je nejsnadnější, po úsečce. V této úloze nejsou problém ani zadání b) a c). Mohli bychom ale dostat nějakou složitější křivku, kterou bychom parametrizovat neuměli. Nebo bychom ji parametrizovat uměli, ale po dosazení bychom nevypočítali určité integrály. Pokud by ale integrál nezávisel na integrační cestě, pak bychom na složitou křivku zapomněli, spočítali bychom to po úsečce a byli bychom hotovi.

Příklad, rozhodněte, zda integrál závisí nebo nezávisí na integrační cestě, bývá v písemkách za jeden bod. S rafinovanou otázkou, pokud nezávisí co to znamená, když je křivka uzavřená, tedy počáteční a koncový bod jsou stejné. Pak je integrál roven nule, práci nekonáte, vy, ani pole. Jistě si pamatujete z fyziky, že když vynesete pytel cementu na střechu a pak na vás volají, že ho máte donést zpět, žádnou práci jste z fyzikálního hlediska nevykonali. A máte radost.

Výklad části 9. 4 navazuje na pojem kmenová funkce, který byl zaveden v kapitole o parciálních derivacích funkce dvou proměnných, část 4. 5. Toto letos vynecháme. Rovněž si nevšímejte Greenovy věty.

Všechny části příkladu 2, str. 11, byste měli zvládnout. Zkuste i poslední, kde jsme v prostoru. V úloze 3 ověřte jen nezávislost na integrační cestě, integrály nepočítejte.

Podívejme se ještě na některé příklady v souboru priklady_chemici_9.pdf .

1. Je zadána úsečka AB, počítal jsem tedy směrový vektor také AB. Kdybych v parametrizaci vzal vektor opačný, pak by odpovídal orientaci podle zadání a výsledek by byl správný hned.

3. V prostoru máme tři souřadnice a také křivkový integrál navíc obsahuje i dz. Jinak je postup stejný.

4. Část kružnice, to si promyslete, to se studentům plete. Co je kladný směr? Co znamená *t* ? Práce s goniometrickými funkcemi.

5. Takto by mohl vypadat příklad z písemky. Podívejte jak z pole F sestavíme integrál. To je vlastně jediný rozdíl oproti jiným příkladům.

6. Rozhodnout o tom, zda integrál závisí nebo nezávisí na integrační cestě, je častá úloha. A snadná. Jen je třeba pamatovat, co podle jaké proměnné derivujeme. A když je v integrálu mezi členy mínus, tak s ním pracovat.