

Písemná zkouška M2010 (vzor) 2020

I. část

max: 12 bodů

Tato část obsahuje obvykle 12 testových příkladů, každý za 1 bod.

1. Najděte řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje počáteční podmínce

$$xy' - y = 0, \quad y(1) = 2.$$

2. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

3. Určete a znázorněte definiční obor funkce

$$z = \sqrt{xy} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

4. Vypočtěte smíšené partiální derivace 2. řádu funkce

$$f(x, y) = \ln(x + y^2).$$

5. Nakreslete graf funkce

$$f(x, y) = 1 - x - y.$$

- a) Má tato funkce partiální derivace v bodě $[0, 0]$? Pokud ano, určete je.
b) Určete absolutní extrémů této funkce na množině

$$M : y \leq 1 - x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

6. Vypočtěte diferenciál funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

v bodě $[3; 4]$.

7. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

v bodě $T = [1, 1, 2]$.

8. V polárních souřadnicích popište oblast

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \leq x.$$

9. Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, \quad M : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

10. Vypočtěte $\iint_M xy dx dy$, kde množina M je obdélník s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [3, 0]$, $C = [3, 2]$ a $D = [0, 2]$.

11. Napište Fubiniovu větu pro dvojný integrál.

12. Do válcových souřadnic transformujte trojný integrál

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

kde V je popsána nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 2$. Integrál nepočítejte!

13. Pomocí dvojného integrálu odvoďte vzorec pro obsah kruhu o poloměru $r = 2$.

14. Určete objem tělesa, které je ohraničené funkcí $z = 1 - x - y$ a rovinami $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$.

15. Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_C (2x + y) ds,$$

kde křivka C je úsečka AB a $A = [0, 0]$ a $B = [1, 2]$.

16. Rozhodněte, zda integrál

$$\int_C 3x^2 \cos y dx - (x^3 \sin y + 3y) dy$$

závisí na integrační cestě C . Pokud nezávisí, uveďte, co toto znamená. Kolik je jeho hodnota, je-li C kladně orientovaná kružnice?

17. Jaký je fyzikální význam křivkového integrálu 2. druhu

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy?$$

II. část

max: 12 bodů

Tato část obsahuje 4 příklady (diferenciální rovnice, lokální nebo globální extrémy, dvojný nebo trojný integrál, křivkový integrál 1. nebo 2.druhu). Příklady jsou za 3-4 body, podle náročnosti.

1. a) Najděte obecné řešení rovnice

$$y' - xy = 2xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

- b) Najděte řešení počáteční úlohy

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 5, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0.$$

2. Vypočtěte lokální extrémy funkce

$$z = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6x - 6y + 6.$$

3. Pomocí transformace do válcových souřadnic vypočtěte objem tělesa, které je ohraničeno částí válcové plochy $x^2 + y^2 = 4$ pro $y \geq 0$ a rovinami $z = -1$ a $z = y + 4$.

4. Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_C x \, dx + (y - 1) \, dy,$$

kde C je horní část kružnice $x^2 + y^2 = 9$ pro $y \geq 0$ z bodu $A = [-3, 0]$ do bodu $B = [3, 0]$.