1 Metrické prostory - opakování přednášky

M je množína a ρ zobrazení $\rho : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$, poté (M, ρ) je metrický prostor pokud platí

1. $\rho(x, y) \geq 0$ a $\rho(x, y) = 0 \iff$ x=y
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

2 Metrický prostor polynomů

Mějme prostor polynomů nad intervalem $[0, 1]$ libovolného stupně.

$$Pol = \{a + bx + cx^2 + \cdots, x \in [0, 1], a, b, c, \ldots \in \mathrm{R}\}$$

Definujme metriku ρ pomocí integrálu, následujícím způsobem, nechť $A(x)$ a $B(x)$ jsou dva polynomy pak

$$\rho(A, B) = \int_0^1 |A(x) - B(x)| \mathrm{d}x$$

1. Jaká je dimenze toho prostoru?
2. Dokažte, že ρ je metrika na prostoru Pol
3. Je tento prostor úplný? Pokud ne ukažte, alespoň jeden příklad posloupnosti, která má limitu mimo tento prostor.
4. Mějme podmnožinu polynomů druhého řádu

   $$Pol_2 = \{a + bx + cx^2, x \in [0, 1], a, b, c, \ldots \in [-1, 1]\}$$

   Je tato množina uzavřená nebo otevřená? Jaký je průměr této množiny?
5. Mějme prostor spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$ s integrální metrikou. Jsou tyto dva prostory izomorfní? Jak musíme prostor spojitých funkcí omezit abychom dostali izomorfismus?
6. Je množina polynomů hustou podmnožinou v prostoru funkcí?
7. Mějme dvě zobrazení $f : (Pol, \rho) \to (Pol, \rho)$ definované takto:

   (a)
   $$a + bx + cx^2 + \cdots \to \int \left(a + bx + cx^2 + \cdots\right) \mathrm{d}x$$

   S tím, že integrační konstantu z integrálu položíme rovnu nule.

(b)

$$a + bx + cx^2 + \cdots \to \frac{1}{x} \int \left(a + bx + cx^2 + \cdots\right) \mathrm{d}x$$

Znovu položíme integrační konstantu rovnu nule.

Ukažte, že druhé zobrazení zachovává řád polynomu. Postupnou iterací najděte nějaké pevné body těchto zobrazení? Existence těchto pevných bodů je zaručena Banachovou větou, ale důkaz že tato zobrazení jsou kontrakce není triviální, přesto můžeme pevné body najít.

3 Limity a parciální derivace funkcí více proměnných

3.1 limity

Dokažte že následující limity neexistují

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Vypočtěte následující limity nebo dokažte, že neexistují

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad \text{(dom. ukol)} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2 + y(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$$

3.2 Funkce a derivace

Příklady na definiční obory a vrstevnice najdete ve sbírce.
Mějme funkci dvou proměnných $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Načrtněte graf této funkce, jaký geometrický objekt ji odpovídá?
2. Vypočítejte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$
3. Napište vzorec pro gradient této funkce, dokážete výsledné vektorové pole načrtnout?
4. Vypočtěte druhé derivace této funkce a dokažte, že smíšené derivace jsou záměnné (symetrické) (domácí úkol, na příští cvičení)
5. Převeďte funkci do polárních souřadnic a ověřte si, že predchozí výsledky dávají smysl.

Řešení:

Prostor polynomů

$$P = \{a + bx + cx^2 + \dots,\ x \in [0,1],\ a, b, c, \dots \in R\}$$

jiný zápis: $P = \{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\ x \in [0,1],\ c_n \in R\}$

1) dimenze.

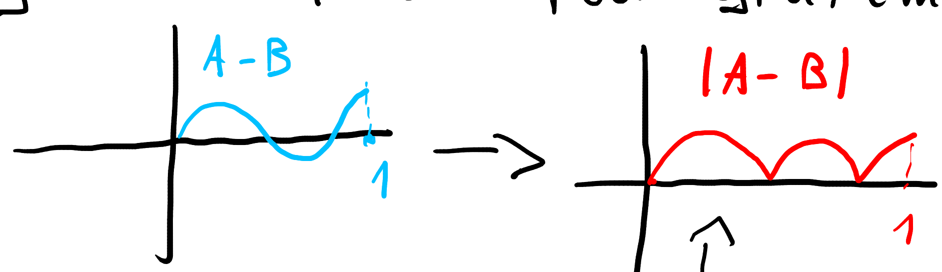
Prostor je parametrizován koeficienty c_n

$\Rightarrow$ polynomy řádu $k \cong R^k$, ale řád je neomezený $\rightarrow \dim(P) = \infty$ (když je dimenze neomezená říkáme že je ∞)

2) je $\rho(A,B) = \int_0^1 |A(x) - B(x)|\, dx$ metrika na P?

ANO: 1) $\rho(A,B) \geq 0$ díky abs hodnotě

$\int$ udává plochu pod grafem $|A-B|$



vždy ≥ 0

také platí $\quad \rho(A,B)=0 \iff A=B$

$|\text{cokoliv}|=0$ jen tehdy když vnitřek $=0$

$\Rightarrow$ když $A=B$

2) $\rho(A,B)=\rho(B,A)$ ✓ znovu díky abs. hodn.

$$\int_0^1 |A-B|\,dx = \int_0^1 |(-1)\cdot(B-A)|\,dx$$

$$= \int_0^1 |-1|\cdot|B-A|\,dx$$

$$= \int_0^1 |B-A|\,dx = \rho(B,A) \checkmark$$

3) trojúhelníková nerovnost znovu platí díky vlastnostem abs. hodnoty, zejména

$|x+y| \leq |x|+|y|$ (ověřte sami)

$$\rho(A,B) \leq \rho(A,C)+\rho(B,C)$$

$$\rho(A,B) = \int_0^1 |A-B|\,dx = \int_0^1 |A-\underbrace{B+C-C}_{\text{přidáme nulu}}|\,dx$$

$$\leq \int_0^1 |A-C|+|B-C|\,dx = \int_0^1 |A-C|\,dx + \int_0^1 |B-C|\,dx$$

$= \rho(A,C) + \rho(B,C)$ ✓

3) je tento prostor úplný?

$\forall$ Cauchy posl. má limitu v P.

Není:

posloupnost:

$F_0(x) = 1$; $F_1(x) = 1 + x$, $F_2(x) = 1 + x + x^2$

... $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$

Ukázáno na cvičení že $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \frac{1}{1-x}$, díky Taylorově rozvoji platí $\rho\left(\frac{1}{1-x}, F_n(x)\right) \to 0$

lepší příklad je:

$F_0(x) = 1$, $F_1(x) = 1 + x$, $F_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

tato posloupnost

je Cauchyovská

její limita je e^x

což není polyno

Důkaz

Cauchyovskost: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $m, n > n_0$ platí $\rho(F_m, F_n) < \varepsilon$

(vzdálenosti prvků se snižují)

zvolme $\varepsilon > 0$ hledáme $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tak

aby $\rho(F_m, F_n) < \varepsilon$ pro $\forall\ m, n > n_0$

Předpokládejme že $m > n$

$$\rho(F_m, F_n) = \int_0^1 \left| 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^m}{m!} - \left(1 + x + \dots \frac{x^n}{n!}\right)\right|$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| dx$$

pro $x \in [0,1]$ jsou všechny kladné $\Rightarrow$ absolutní hodnota není třeba

$$= \int_0^1 \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{x^m}{m!} + \dots + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \right]_0^1 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{m!} + \dots + \frac{1}{(n+2)!}}_{\text{Počet členů je } m-n}$$

lze zapsat jako sumu $\displaystyle\sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{1}{k!}$

chceme aby $\rho(f_m, f_n) < \varepsilon$, zafixujeme $n = n_0$, $m \to \infty$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{1}{k!} < \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}}_{=e} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = e - \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}}$$

pro $n \to \infty$ se toto blíží e a výsledek nule

$\Rightarrow$ lze vždy najít dostatečně velké n aby $\rho(f_m, f_n) < \varepsilon$

f_m konverguje k e^x; $\rho(f_m, e^x) \to 0$ pro $m \to \infty$

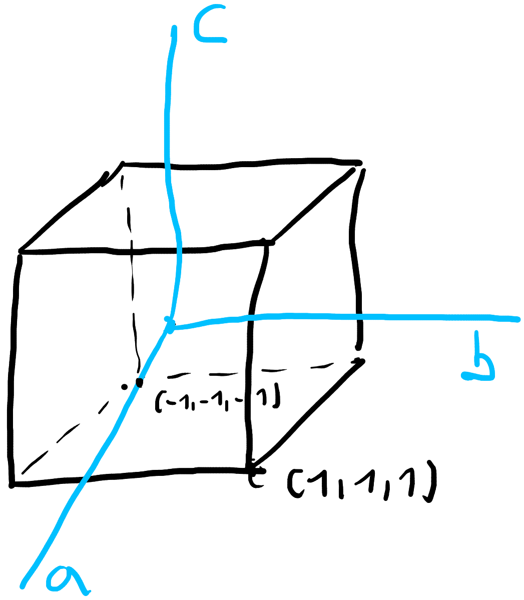
ale e^x není polynom $\Rightarrow P$ není úplný prostor.

4) Podmnožina

$$Pol_2 = \{a+bx+cx^2,\ x\in[0,1],\ a,b,c\in[-1,1]\}$$

⇒ všechny polynomy druhého řádu s omezenými koeficienty

a,b,c tvoří krychli

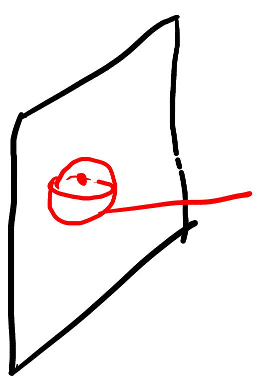


- je tato množina uzavřená/otevřená?

⇒ co je hranice?

→ bude to hranice této krychle

Př: stěna $b=1$, $a,c\in[-1,1]$



lib okolí obsahuje body uvnitř i vně

⇒ Pol_2 je uzavřená protože $\overline{Pol_2} = Pol_2$

(množina obsahuje svoji hranici)

alternativně můžeme ukázat že doplněk je otevřená množina

$P \setminus Pol_2$; pro uzavřené množiny platí: každá konvergentní posl prvků uz. množiny má v této množině limitu → ukážeme, že P / Pol_2 není uzavřená, limita polynomů $\{(1+\frac{1}{n})x\}$ je pro $\forall n \in \mathbb{N}$ uvnitř P / Pol_2 ale konvergu je do x což je uvnitř Pol_2 ⇒

P / Pol_2 je otevřená a Pol_2 je uzavřená.

• průměr množiny spočítame jako největší možnou vzdálenost prvků této množiny

polynomy: $-1-x-x^2$ a $1+x+x^2$

$$\mathrm{diam}(P_2) = \int_0^1 |1+x+x^2-(-1-x-x^2)| =$$

$$= 2\int_0^1 1+x+x^2\,dx = 2\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{11}{3}}}$$

$\Rightarrow$ množina je ohraničená (diam $< \infty$) a uzavřená $\Rightarrow$ je kompaktní

5) je P izomorfní s prostorem spojitých funkcí $C[0,1]$ s integrální metrikou

izomorfismus: bijektivní zobrazení

$F: P \to C[0,1]$ takže platí

$$\rho(F(A), F(B)) = \rho(A, B)$$

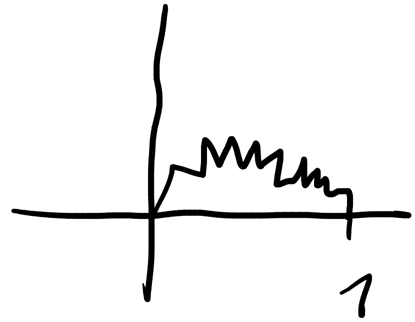
zachovává délky

$$\text{Polynom} \overset{\text{Taylor}}{\Longleftrightarrow} \text{Funkce}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \dots$$

Funguje jen pokud existují derivace $f', f'', \dots$ $\Rightarrow$

nelze pro „zubaté" funkce nemají definované derivace



⇒ potřebujeme prostor diferencovatelných funkcí $C^\infty[0,1]$

6) je P hustá podmnožina v $C[0,1]$

Podmnožina P je hustá v $C[0,1]$

$\Leftrightarrow \forall f(x) \in C[0,1]$ a $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \in P$ tak, že

$\rho(f, A) < \varepsilon$ (ke každé funkci existuje polynom takový, že $\int_0^1 |A(x) - f(x)| < \varepsilon$)

ANO: Stone-Weistrassova věta

7) zobrazení mezi polynomy dané

$$a + bx + cx^2 + \dots \xrightarrow{f} \int (a + bx + cx^2 + \dots)$$

$$= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \dots$$

Pevný bod (pokud existuje) dostaneme iterací zobrazení F;

obecný polynom $A = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$F^2(A) = F \circ F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)}$$

k-krát:

$$F^k(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+k}}{\underbrace{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)}_{(n+k)!}}$$

$\Rightarrow$ konverguje k 0

$$\lim_{k\to\infty} F^k(A) = 0$$

$$\frac{c_0 x^k}{k!} + \frac{c_1 x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{c_2 x^{k+2}}{(k+2)!}$$

omezené

$\to \infty$

pro $k \to \infty$

$$\frac{\text{omez}}{\infty} = 0$$

0 se zobrazí na

$$\int 0\, dx = 0 \ \checkmark$$

Opravdu je to pevný bod.

Pro druhé zobrazení

$$a+bx+cx^2+\dots \longrightarrow \frac{1}{x}\int (a+bx+cx^2+\dots)\,dx$$

$$= a+\frac{bx}{2}+\frac{cx^2}{3}$$

řád se zachová

ale každý člen se zmenšuje

Po k-iteracích: $a+\frac{bx}{2^k}+\frac{cx^2}{3^k}$

$A=a$ je pevný bod

(dělí se 1 a $1^k \to 1$)

$2^k \to 0$, $3^k \to 0$ pro $k\to\infty$

---

limity

možnosti co se může stát viz

přednáška: označme $L_{xy}=\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} F(x,y)\right)$

$$L_{yx}=\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} F(x,y)\right)$$

se nazývají *dvojnásobné* (popř. postupné). Potom pro L_{xy}, L_{yx} a $L := \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ platí:

(i) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} = L_{yx}$, pak limita L *nemusí* existovat;

(ii) existuje-li limita L (i nevlastní), pak L_{xy} a L_{yx} *nemusí* existovat;

(iii) existuje-li L a některá z limit L_{xy} nebo L_{yx}, pak se obě *rovnají*;

(iv) existují-li limity L_{xy}, L_{yx} a L, pak $L_{xy} = L_{yx} = L$;

(v) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} \neq L_{yx}$, pak limita L neexistuje.

ve zkratce: limita existuje pokud nezáleží na tom jak se k limitnímu bodu blížime.

zopakujeme a upřesníme na příštím cvičení.