5 cvičení – extrémy a stac. body

Připomenutí: funkce 1 proměnné:

$f(x)$ má v bodě x_0 extrém $\Leftarrow$

$f'(x_0) = 0$ pak je-li $\begin{cases} f''(x_0) < 0 & x_0 \text{ maximum} \\ f''(x_0) > 0 & x_0 \text{ minimum} \end{cases}$

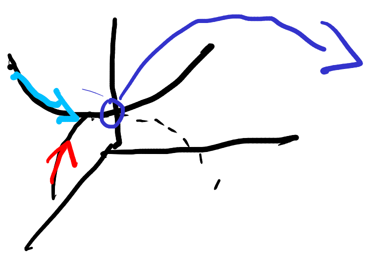
Pro funkce $f(x,y)$ a více proměnných je situace daleko složitější

1) místo f'' musíme vzít matici Hess

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

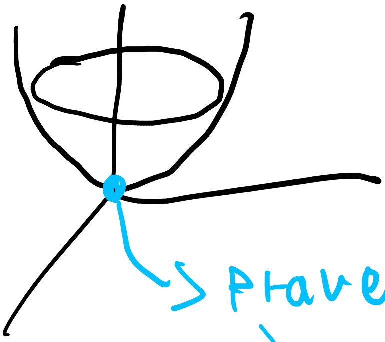
a řešit zda je positivně/negativně definitní.

2) může se stát že fce má v jednom směru maximum a v jiném minimum $\rightarrow$ tzv. sedlový bod (čím více proměnných tím větší šance na sedlové body)



maximum v červeném směru

minimum v modrém



Pravé minimum = minimum ve všech směrech.

Ukázkové příklady

$F(x,y) = (x-a)^2 + (y-a^2)$

1) stac bod (x_0,y_0) $\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}$ v bodě (x_0,y_0)

$\rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2(x-a) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2(y-a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_0 &= a \\ y_0 &= a \end{aligned}$$

je stac. bod

2) minimum, maximum, sedlový bod?

$$Hess = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$D = \det(Hess) = 4 \rightarrow D > 0$ je to extrém

$F_{xx} = 2$

$2 > 0$

$\Rightarrow$ minimum

$\Rightarrow$
- Fce $-(x-a)^2+(y-a)^2$ má v (a,a) sedlový bod
- Fce $-(x-a)^2-(y-a)^2$ má v (a,a) maximum

$F(x,y) = x^3+y^3-3xy$ → viz př 19 přednáška

Celkově:

1) spočtete $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$

2) vyřešte rovnice $F_x = 0 = F_y$

3) napište matici

$$H = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}$$

4) spočtete hodnotu $D = \det H$

v bodech (x_0,y_0) z řešení 2)

5) je-li • $D(x_0,y_0) > 0$ → (x_0,y_0) je extrém

• pro $F_{xx}(x_0,y_0) > 0$ je to min

$F_{xx}(x_0,y_0) < 0$ je to max

• $D(x_0,y_0) = 0$ → nic nevíme

• $D(x_0,y_0) < 0$ (x_0,y_0) není extrém

Př na cvičení:

$$F(x,y) = 1+x^4+y^4+2x^2y^2-x^2-y^2$$

DÚ (dobrovolné): • $F(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$

• $F(x,y,z) = x\cdot y\cdot z$

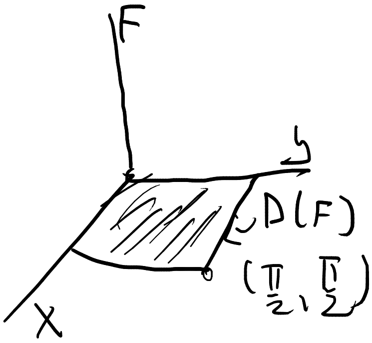
• $F(x,y) = \sin(x-y)$

Extrémy na množině.

je-li def obor omezen $\Rightarrow$ $\forall$ spojitá funkce má min. i maximum, musíme zkoumat body na hranici

Př: $F(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$

na množině $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$



Postupujeme stejně ale zkoumáme i hraniční body. → hledáme globální extrémy!!

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x - \sin(x-y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = -\sin y + \sin(x-y)$

2) $\cos x - \sin(x-y) = 0$ a $-\sin y + \sin(x-y) = 0$

sečteme → $\cos x - \sin y = 0$

$\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 0$

$x = \frac{\pi}{2} - y$ → dosadíme

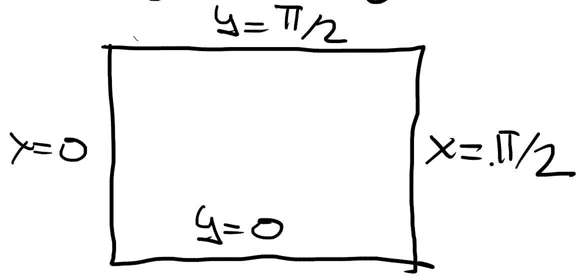
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \cos(2y)$

$= 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - y = 2y \rightarrow y = \frac{\pi}{6}$

$\rightarrow$ stac. bod $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ $\quad x = \frac{\pi}{3}$

$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sim 2{,}6$

co hranice?



1) levá strana $x=0$ $\quad F(0,y) = 2\cos y$ pro $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$

min = 0
max = 2

2) pravá strana $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad F(\frac{\pi}{2}, y) = 1 + \cos y + \cos(\frac{\pi}{2} - y)$

= (součtové vzorce) $= 1 + \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

max: $1 + \sqrt{2} \sim 2{,}4$
min 0

3) dolní strana $y = 0$ $\quad F(x,0) = \sin x + 1 + \cos x$

$= 1 + \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

max: $1 + \sqrt{2} \sim 2{,}4$
min 0

4) horní strana $y = \frac{\pi}{2}$ $\quad F(x, \frac{\pi}{2}) = \sin x + \cos(x - \frac{\pi}{2})$

$= 2\sin x$

$\Rightarrow$ max: 2
min 0

$\Rightarrow$ globální maximum $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ pro $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

minimum 0 pro $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Vázané extrémy

hledáme extrémy funkce $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s dodatečnými podmínkami $g(x_1, \dots, x_n) = 0$

$\rightarrow$ řešíme Lagrangeovými multiplikátory

minimalizujeme $F = F - \lambda g$ $\rightarrow$ Fce $n+1$ proměnných $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$

Ukázkový př:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 \text{ a podmínka } x + y = 1$$

1) dosazení

$$x+y=1 \rightarrow y = 1-x$$

$$F(x, y(x)) = x^2 + (1-x)^2$$

$\rightarrow$ Fce 1 proměnné:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2(1-x)$$
$$= 4x - 2$$

$\rightarrow$ stac. bod

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ je minimum.}$$

2) Lagrangeovy multiplikátory:

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

podmínka $x+y=1 \Rightarrow g(x,y) = x+y-1$

(tak aby podmínka $\Leftrightarrow g=0$)

$$\rightarrow F(x,y,\lambda) = x^2+y^2 - \lambda(x+y-1)$$

$\rightarrow$ Fce 3 proměnných

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 1 - x - y$$

Prvně vyřešíme $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{1 = x+y}$

vždy dostaneme podmínku zpátky

zbylé dvě rovnice: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \rightarrow 2x - \lambda = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \rightarrow 2y - \lambda = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}$

$y = \frac{\lambda}{2}$ a z $1 = x+y \Rightarrow \lambda = 1$

dostaneme stejné řešení $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\text{Hess} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Delta > 0 \quad a \quad f_{xx} > 0$$

$\Rightarrow$ minimum ✓

grafický:

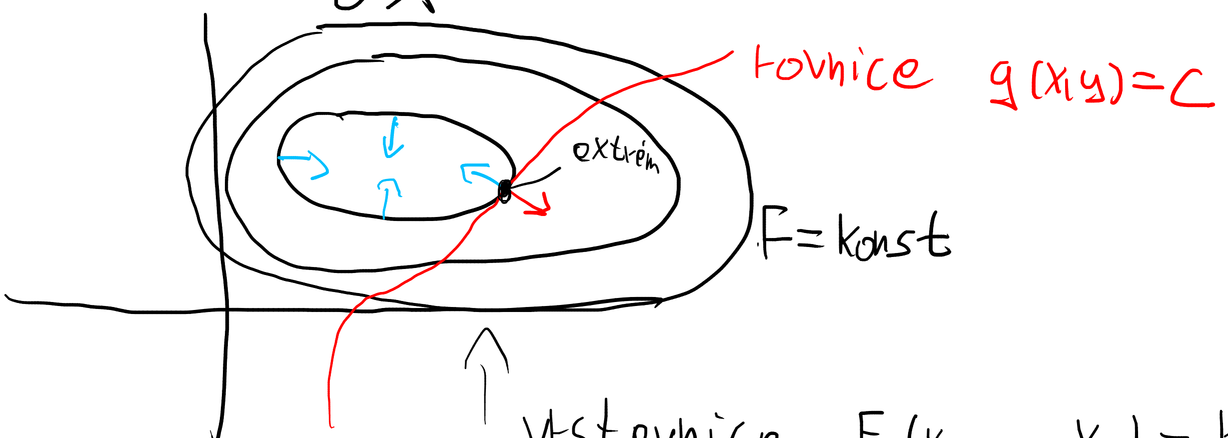
$$F = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

podmínky stac. bodu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}\right\} \underbrace{\operatorname{grad} F = \lambda \operatorname{grad} g}_{\text{lze interpretovat graficky. } (*)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow g(x_1, \dots, x_n) = 0$$

(*)



vrstevnice $F(x_1, \dots, x_n) = \text{konst}$

grad F je kolmý na vrstevnice

extrém je tam kde křivka $g = \text{konst}$ je tečná k vrstevnicím.

Když máme více podmínek tak přidáme více Lagrangeových multiplikátorů

$$L = F - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 \dots$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \\ \vdots \end{array}\right\} \text{podmínky}$$

Př na cvičení

Funkce tří proměnných

$$F(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$$

a dvě podmínky $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$x + y + z = 1$$

najděte alespoň 1 extrém.

DÚ (nepovinné)

- $F(x,y) = x + y$

  podmínka $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

- $F(x,y) = x^2 + y^2$

  podmínka $x \cdot y = 1$