Cvičení řešení

1) Příklady z minula:

extrémy funkce $F(x,y) = 1 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$

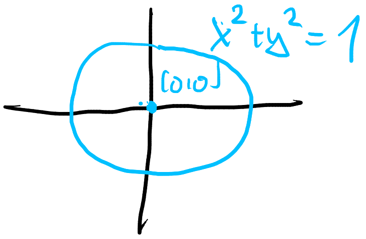
stac. body: $F_x = 4x^3 + 4xy^2 - 4x = 0$

$F_y = 4y^3 + 4x^2y - 4y = 0$

jedno řešení: $x = 0, y = 0$ → mohu rovnice podělit

$$4x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$
$$4y^2 + 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

stac. body leží na kružnici



! můžeme si všimnout že

$$F(x,y) = 1 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 = (1 - (x^2+y^2))^2$$

a hodnoty ve stac. bodech jsou:

$F(0,0) = 1$

$F(x^2+y^2=1) = 0$

zkoumání zda se jedná o maxima či minima:

$$\text{Hess} = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix}$$ matice druhých derivací

$$\text{Hess} = \begin{pmatrix} 12x^2+4y^2-4 & 8xy \\ 8xy & 12y^2+4x^2-4 \end{pmatrix}$$

1) pro $x=y=0$ $\quad \text{Hess} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 16 > 0$

$F_{xx} = -4 < 0$

$\Rightarrow (0,0)$ je lokální maximum

2) pro $x^2+y^2=1 \Rightarrow 12x^2+4y^2-4 = 8x^2 + \underbrace{4x^2+4y^2}_{=4}$

$$-4 = 8x^2$$

$$\to \quad \text{Hess} = 8 \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

$\det = 0 \Rightarrow$ co to znamená?

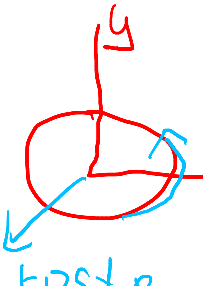
vlastní hodnoty: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det \text{Hess} = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}\, \text{Hess} = 8$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \rightsquigarrow$ v jednom směru se hodnoty fce nemění

$\lambda_2 = 8 \rightsquigarrow$ v druhém směru rostou

tyto směry odpovídají vl. vektorům



podél kružnice se nemění, spočítali jsme dříve že $F=0$ na celé kružnici!

Vl. vektory: pro $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x^2 v_1 + xy v_2 = 0$$

$$x v_1 + y v_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (y, -x)$$

pro $\lambda = 8$ $\begin{pmatrix} x^2-1 & xy \\ xy & y^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(x^2-1) w_1 + xy w_2 = 0$$

$$-y w_1 + x w_2 = 0$$

$$\vec{w} = (x, y)$$

vlastní vektory jsou kolmé.

2 příklad ze cvičení:

Spočtete vázané extrémy funkce

$$f(x,y,z) = xyz$$

s podmínkami : $x+y+z=1$

$x^2+y^2+z^2=1$

$\rightsquigarrow$ metoda Lagrang. multiplikátorů

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz - \lambda_1 (x^2+y^2+z^2-1) - \lambda_2 (x+y+z-1)$$

Stac body:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x + y + z - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ 5 rovnic pro 5 neznámých $(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$
lze řešit více způsoby

odečítání rovnic: první − druhá

$$yz - xz - 2\lambda_1(x-y) = 0$$

$$z(y-x) - 2\lambda_1(x-y) = 0$$

$$(y-x)(z+2\lambda_1) = 0$$

$\Rightarrow$ dvě řešení buď $x = y$ nebo $z = -2\lambda_1$

obdobně pro ostatní $x = z \wedge y = -2\lambda_1$

$y = z \wedge x = -2\lambda_1$

$\rightarrow$ více možných kombinací

1) $x = y = z$ z podmínek: $x + y + z = 1$

$\Rightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$

Nelze

ale $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= \frac{1}{3} \neq 1$

2) Kombinace $(x = y = -2\lambda_1) \wedge (x = z = -2\lambda_2) \wedge$

$\wedge (y = z = -2\lambda_1)$

vezmeme $x = y = -2\lambda_1$ například

$$z = 1 - x - y = 1 + 4\lambda_1$$

+ musí platit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$4\lambda_1^2 + 4\lambda_1^2 + (1 + 4\lambda_1)^2 = 1$$

$$8\lambda_1 + 24\lambda_1^2 = 0$$

$$\lambda_1(8 + 24\lambda_1) = 0$$

$\Rightarrow$ bod' $\lambda_1 = 0 \sim (0, 0, 1)$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

nebo $\lambda_1 = -\frac{1}{3} \sim \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\rightsquigarrow$ jedná se o min/max/sedlový bod?

$$\text{Hess} = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 & z & y \\ z & -2\lambda_1 & x \\ y & x & -2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Pro $\lambda_n = 0$ $(0,0,1)$

$$\text{Hess} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Vlastní hodnoty jsou $-1, 1, 0$

-> není to extrém (v jednom směru roste v jednom klesá a ve třetím je konstantní)

$\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$$\text{Hess} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ Vlastní hodnoty $-3, 3$ dvojnásobná

=> Sedlový bod.