6. cvičení

- implicitní funkce
- změny proměnných
- vektorová pole
- příprava na písemku

Implicitní funkce

zobrazení 2 proměnných $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Množina $M = \{(x,y) \in \mathcal{D}(F),\ F(x,y) = 0\}$

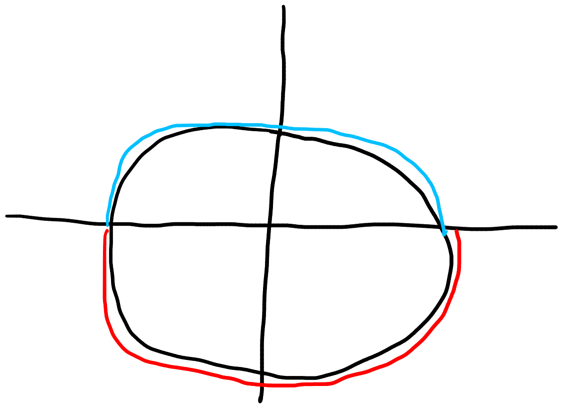
→ toto je nějaká křivka, kdy je tato křivka funkce?

pokud v okolí bodu (x_0, y_0) platí $y = f(x)$ pak říkáme, že funkce f je implicitně daná rovnicí $F(x,y) = 0$

Př: Kružnice $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

takže $F(x,y) = 0 \rightsquigarrow x^2 + y^2 = 1$

zadává toto nějakou funkci?



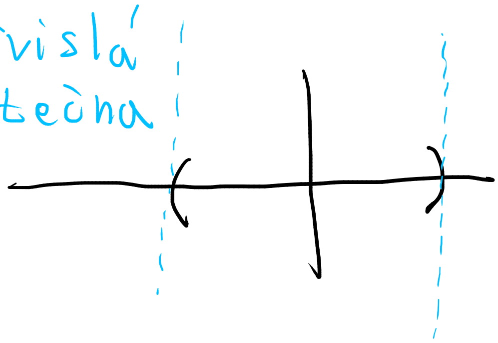
- pro $y > 0$

  je $y = \sqrt{1-x^2}$

- pro $y < 0$

  je $y = -\sqrt{1-x^2}$

→ máme dvě různé fce pro části množiny M a v bodech $(-1,0)$ a $(1,0)$ $F(x,y)=0$ nezadává žádnou funkci



⇒ obecná věta: věta o implicitní funkci (Hasil přednáška věta 36)

- F a $\frac{\partial F}{\partial y}$ spojité v okolí (x_0, y_0) a navíc

$$F(x_0,y_0) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$$

$(x_0,y_0) \in M$ tečna není svislá

Pak platí $\quad F(x,y) = 0 \iff y = f(x)$

Pro $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

je $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y \Rightarrow$ body kde $y=0$ jsou zakázané

Příklady:

- $(y-x)^2 = 1$

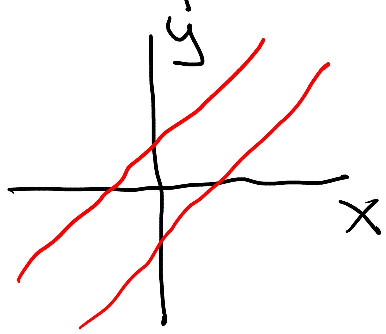
první můžeme zkusit vyřešit vzhledem k $y \to (y-x)^2 = 1 \quad / \sqrt{\ }$

$|y-x| = 1 \Rightarrow y - x = \pm 1$

dvě řešení

$\Rightarrow y = x \pm 1 \to$ dvě přímky

M:



- $x^3 = 1 - y^2$ dostaneme $y = \pm\sqrt{1-x^3}$

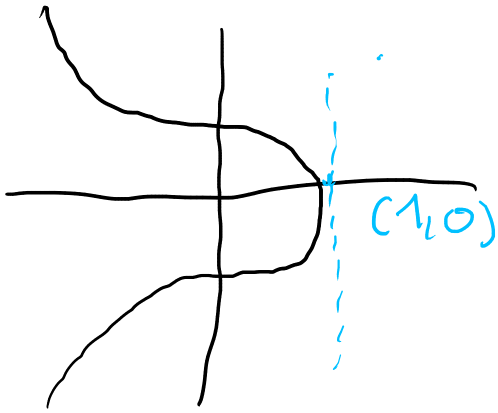
$\dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y = 0$ pro $y = 0$

když $y=0 \to x = 1$

$\to$

grAF

M:



- $\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} + xy = 1$ řešení $y = F(x)$ je těžké

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -y^2 + x = 0$$

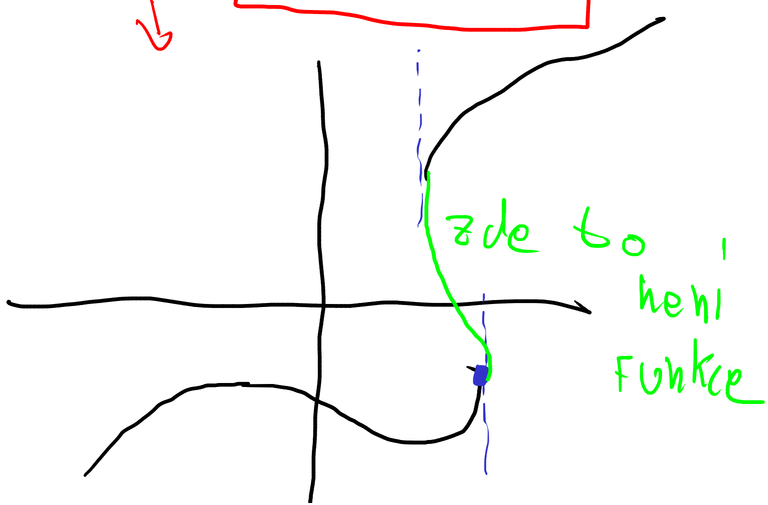
$y^2 = x$ problémové body

-> zajímají nás pouze ty co leží v $M = \{(x,y),\ F = 0\}$

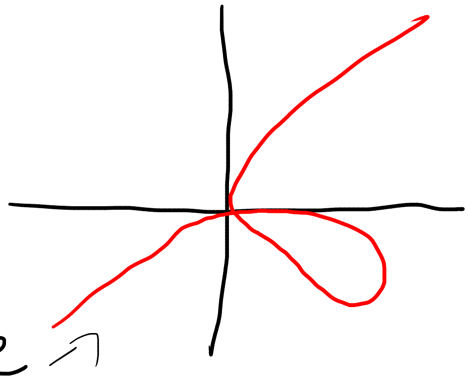
-> řešíme dvojici rovnic
$$y^2 = x$$
$$\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} + xy = 1$$

-> vytknutím dostaneme $\boxed{\begin{matrix} y = 1 \\ x = 1 \end{matrix}}$

a $\boxed{\begin{matrix} y \sim -1{,}44 \\ x \sim 2{,}07 \end{matrix}}$ ->

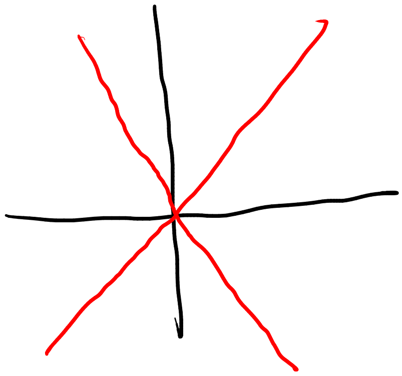


• $x^3 - y^3 + xy = 0$



DÚ ověřte

• $y^3 - 3x^2y + 2x^3 = 0$



Další DÚ: zkoumejte

$$F(x,y) = x^4 - x^2 + y^4 - y^2 = 0$$

$\Rightarrow$ nalezněte problémové body a zkuste načrtnout množinu $F = 0$

Implicitní derivace

ikdyž nedokážeme najít $y = F(x)$ vždy lze najít $\frac{dy}{dx} = y'$ takto:

$$F(x,y) = 0 \rightarrow dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Spočteme si $\frac{dy}{dx}$ pro předchozí příklady:

1) $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2) $F(x,y) = (y-x)^2 - 1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2(y-x)}{2(y-x)} = 1$$

3) $F(x,y) = x^3 - 1 + y^2$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{2y}$$

4) $F(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} + xy - 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 - y}{-y^2 + x}$$

$\Rightarrow$ problémové body jsou ty kde $\frac{dy}{dx} \to \infty$ (tedy je nedefinované)

Změna proměnných

Použití: $x, y \to (u(x,y), v(x,y))$

$$F(x,y) \to F(u(x,y), v(x,y))$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

lze použít k řešení dif rovnic

Př: vlnová rovnice

fce $u = u(t,x)$

rce $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad$ c = rychlost vlny

Změna proměnných:

$$z = x + ct$$
$$\bar{z} = x - ct$$

(také se značí x^+, x^-)

chceme přepsat $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

do u_z a $u_{\bar{z}}$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\overbrace{cU_z - cU_{\bar z}}^{(*)}\Big) = c\left(\frac{\partial U_z}{\partial t} - \frac{\partial U_{\bar z}}{\partial t}\right)$$

využijeme záměnnosti 2hých parc. derivací

$$= c\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

už jsme počítali = (*)

$$= c\left(\frac{\partial}{\partial z}(cU_z - cU_{\bar z}) - \frac{\partial}{\partial \bar z}(cU_z - cU_{\bar z})\right)$$

$$= c^2\left(U_{zz} - 2U_{z\bar z} + U_{\bar z\bar z}\right)$$

pravá strana rovnice $\rightarrow c^2 U_{xx} = c^2 \partial_x (U_z + U_{\bar z})$

$$= c^2\left(U_{zz} + 2U_{z\bar z} + U_{\bar z\bar z}\right)$$

$\Rightarrow$ vln rce $U_{tt} = c^2 U_{xx}$

přejde na $\cancel{c^2}\left(\cancel{U_{zz}} - 2U_{z\bar z} + \cancel{U_{\bar z\bar z}}\right) =$

$$= \cancel{c^2}\left(\cancel{U_{zz}} + 2U_{z\bar z} + \cancel{U_{\bar z\bar z}}\right)$$

po pokrácení zůstane

$$U_{z\bar z} = 0 \quad \text{což lze}$$

vyřešit jako: $U = F(z) + g(\bar z)$

kde F a g jsou libovolné

$$\Rightarrow \quad u = \underbrace{f(x+ct)}_{\text{vlna jde doleva}} + \underbrace{g(x-ct)}_{\text{vlna doprava}}$$

$\Rightarrow$ takto se počítá změna operátorů

vlnová fce $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

je $\quad \Box u = 0 \quad$ kde

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^2}$$

je „vlnový" operátor

my jsme spočítaly jak $\Box(x,t)$ vypadá v souřadnicích $z = x+ct$, $\bar{z} = x-ct$

$$\Rightarrow \Box(z,\bar{z}) = 4\frac{\partial}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Př2: Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$$ v polárních souřadnicích

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$ $\longrightarrow$ abychom mohli počítat stejným způsobem

musíme spočítat inverzní změnu a to

$r = r(x,y)$ a $\varphi = \varphi(x,y)$

$\Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$ a $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\Rightarrow U_{xx} + U_{yy} = ?$

$$U_{xx} = \partial_x U_x = \partial_x \left(U_r \frac{\partial r}{\partial x} + U_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

$$= \partial_x \left(U_r \frac{x}{r} + U_\varphi \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right)}_{-\frac{y}{r^2}} \right)$$

derivace součinu

$$= \partial_x U_r \cdot \frac{x}{r} + U_r \partial_x \left(\frac{x}{r}\right) + \partial_x U_\varphi \left(-\frac{y}{r^2}\right) + U_\varphi \partial_x \left(-\frac{y}{r^2}\right)$$

$$= \partial_r \overbrace{\left(U_r \frac{x}{r} - \frac{y}{r^2} U_\varphi \right)}^{U_x} \frac{x}{r} + U_r \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right)$$

$$+ \partial_\varphi \left(U_r \frac{x}{r} - \frac{y}{r^2} U_\varphi \right) \left(-\frac{y}{r^2} \right) + U_\varphi \left(\frac{2yx}{r^4} \right)$$

(musíme vše vyjádřit pomocí r a φ

x, y nechceme!)

$$= U_{rr} \left(\frac{x^2}{r^2} \right) + U_{\varphi\varphi} \left(\frac{y^2}{r^4} \right) + U_{r\varphi} \cdot 0 + U_r \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos^2\varphi}{r} + \frac{\sin^2\varphi}{r} \right) + U_\varphi \left(\frac{\cos\varphi \sin\varphi}{r^2} + \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{r^2} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \right)$$

U_{yy} vyjde podobně

$$U_{yy} = \partial_y\left(U_r \frac{\partial r}{\partial y} + U_\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \partial_y\left(U_r \frac{y}{r} + U_\varphi \frac{x}{r^2}\right)$$

jiné znaménko

$$= \partial_r\left(U_r \frac{y}{r} + U_\varphi \frac{x}{r^2}\right)\frac{y}{r}$$

$$+ U_r \partial_y\left(\frac{y}{r}\right) + \partial_\varphi\left(U_r \frac{y}{r} + U_\varphi \frac{x}{r^2}\right)\frac{x}{r^2}$$

$$+ U_\varphi \partial_y\left(\frac{x}{r^2}\right) = U_{rr}\left(\frac{y^2}{r^2}\right) + U_{\varphi\varphi}\left(\frac{x^2}{r^4}\right) + U_{r\varphi} \cdot 0$$

$$+ U_r\left(\frac{1}{r} - \frac{y}{r^2} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\right) + U_\varphi\left(- \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\right.$$

$$\left. - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} - \frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$$\Rightarrow U_{xx} + U_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} U_r$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} = \boxed{\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}}$$

další příklady na procvičení (DÚ)

$\rightarrow$ další strana

Sedmé cvičení (záměna proměnných)

$\boxed{1}$ V rovnici

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1 \quad (a\neq 0)$$

položte $u=x$, $v=ay-bx$ a pak rovnici vyřešte.

$\boxed{2}$ V rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

položte $p=x$, $q=y-x$, $r=z-x$.

$\boxed{3}$ Přepište výraz

$$x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}$$

Ad 1. do proměnných $p=x$, $r=x^2+y^2$; **Ad 2.** do polárních souřadnic, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

$\boxed{4}$ Ve výrazu

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

přejděte k novým proměnným u, v podle vztahů

$$x=uv, \qquad y=\tfrac{1}{2}(u^2-v^2).$$

$\boxed{5}$ Řešte vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tak, že přejdete k novým proměnným $y=x-at$ a $z=x+at$.

$\boxed{6}$ Přepište rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3\partial x_1}=0$$

do nových proměnných

$$y_1=-x_1+x_2+x_3, \qquad y_2=x_1-x_2+x_3, \qquad y_3=x_1+x_2-x_3.$$

$\boxed{7}$ Přepište do polárních souřadnic následující výrazy: **1.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; **2.** $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

$\boxed{8}$ V rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ položte $x=\mathbf{e}^u\cos v$, $y=\mathbf{e}^u\sin v$.

$\boxed{9}$ Mějme rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

1. Položte v ní $u=xy$, $v=x/y$.
2. Nebo v ní položte nejdřív $a=\ln x$, $b=\ln y$, ve výsledku položte $p=a+b$, $r=a-b$ a konečně v tomto výsledku ještě klaďte $u=\mathbf{e}^p$, $v=\mathbf{e}^r$.
Co Vám přijde snazší?

$\boxed{10}$ V rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

(kde a, b, c jsou konstanty) položte $z=u\exp(\alpha x+\beta y)$, kde $u(x,y)$ je nová neznámá funkce a α, β jsou konstanty. Zkuste tyto konstanty vybrat tak, aby se rovnice co nejvíc zjednodušila.

Vektorová pole

jsou zobrazení $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \to \vec{V}(x,y) = (V_x(x,y), V_y(x,y))$$

jeden příklad už jsme potkali a to gradient fce 2 proměnných

$$\overrightarrow{\text{grad} F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

můžeme mít i vektorová pole v prostoru $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

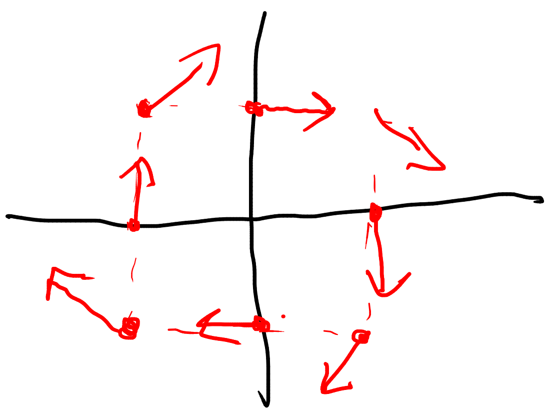
$$(x,y,z) \to (F_x, F_y, F_z)$$

například silová pole

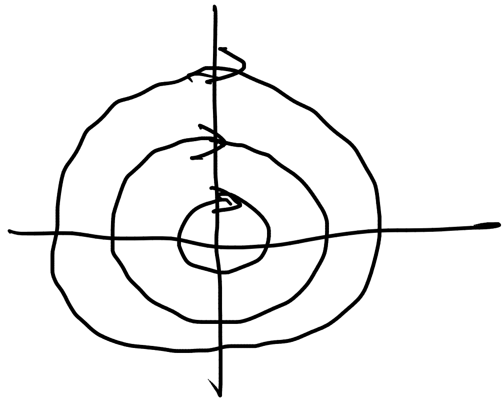
1) ve 2D

$$\vec{v} = (y, -x)$$

náčrt:



nebo pomocí tečných křivek:



Spočteme: • Jacobiho matice

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• divergence: $\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} =$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

(je to stopa J)

• je $\vec{v}$ grad nějaké fce?

$\exists F$ takové, že $\frac{\partial F}{\partial x} = y$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x$$

F existuje $\Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

$1 \neq -1 \Rightarrow$ Není!

2) ve 3D:

$$\vec{F} = (y, x, z)$$

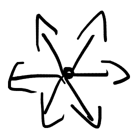
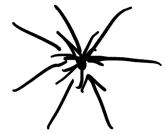
- Jacobi $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\operatorname{div} \vec{F} = 0 + 0 + 1 = 1$

- rotace : $\overline{\operatorname{rot} \vec{F}} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$

terminologie

- pokud $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ říkame že F je nezřídbové

- zřídb :  nebo 

- pokud $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ $\vec{F}$ je nevírové

vír: