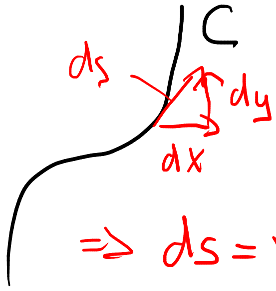
Cvičení 9

Křivkové integrály

1 druhu: $\int_C F(x,y)\,ds$;



$$\Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

parametrizace

1) $x = \varphi(t)$

$y = \psi(t) \qquad t \in (\alpha, \beta)$

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt$$

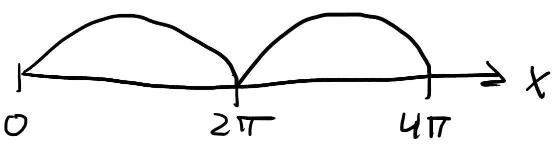
$$\int_C F(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,dt$$

2) $y = y(x)$, $x \in [a,b]$

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

$$\int_C F(x,y)\,ds = \int_a^b F(x, y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

Př: cykloida



parametrizace : $x = r(t - \sin t)$

$y = r(1 - \cos t)$

délka oblouku: $\int_C 1\,ds$ pro $t \in [0, 2\pi]$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\,dt = \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^2 t}\,dt = 2r\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt$$

$$= 2r\left|\sin\tfrac{t}{2}\,dt\right|$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2r\,|\underbrace{\sin\tfrac{t}{2}}_{\substack{\text{kladné} \\ \text{pro } t\in(0,2\pi)}}\,dt| = 2r\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{t}{2}\,dt$$

$$= -4r\left[\cos\tfrac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{8r}}$$

hmotnost pro hustotu $\rho(x,y) = y^2$

musíme dosadit za $y = r(1-\cos t)$

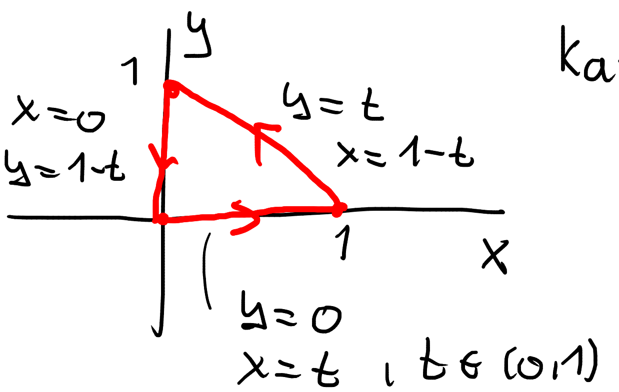
$$\Rightarrow \quad M = \int_0^{2\pi} r^2 \underbrace{(1-\cos t)^2}_{(2\sin^2\frac{t}{2})^2} \cdot 2r\sin\tfrac{t}{2}\,dt$$

$$= 8r^3 \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^5\tfrac{t}{2}}_{\sin\frac{t}{2}(1-\cos^2\frac{t}{2})^2}\,dt = \left| \begin{array}{l} u = \cos\frac{t}{2} \\ du = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} \end{array} \right|$$

$$= -16r^3 \int_1^{-1} (1-u^2)^2\,du = 16r^3\left[\frac{u^5}{5} - 2\frac{u^3}{3} + u\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 16r^3 \cdot \frac{16}{15} = \underline{\frac{256}{15}r^3}$$

př skládáme křivku z více křivek:



každou parametrizujeme zvlášť

• integrujme $\displaystyle\oint_{\Delta} (x+y)\,ds = \int_{\rightarrow} (x+y)\,ds + \int_{\nwarrow} (x+y)\,ds +$

$$+\int_{\gamma}(x+y)\,ds = \int_0^1 t\,|dt| + \int_0^1 \sqrt{2}\,|dt| + \int_0^1 t\,|dt| = \underline{1+\sqrt{2}}$$

př: můžeme počítat i ve 3D

šroubovice: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, 1 závit ⇑ $t\in[0,2\pi]$

$$\bullet\ L=\int_C ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}\,dt = \underline{2\pi\sqrt{2}}$$

$\cdot$ hmotnost s $\rho(x,y,z)=z$

$$M=\int z\,ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\,dt = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi)^2}$$

Křivkové integrály 2.druhu

= integrály z vektorových polí

$$\int_C \vec{F}(x,y)\,d\vec{r} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

kde $\vec{F}(x,y) = \underbrace{(P(x,y),\ Q(x,y))}_{\text{složky v. pole}}$

př: $C=$ kružnice, $F=(x,y)$ ⇝ parametrizace
$x=r\cos t$
$y=r\sin t$

$$d\vec{r} = (dx, dy) = (-r\sin t, r\cos t)$$

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = x\,dx + y\,dy = r\cos t\cdot(-r\sin t)\,dt$$

$$+ r\sin t\, r\cos t\, dt = 0$$

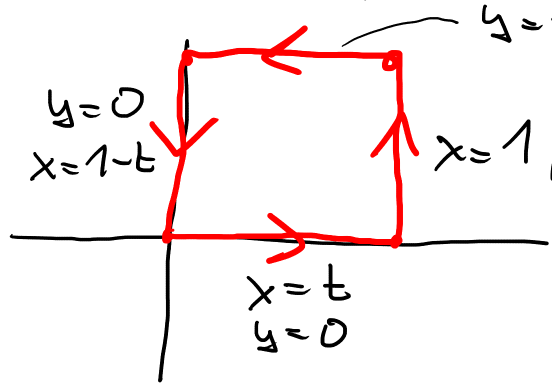
$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

(pole je kolmé na křivku)

2) zvolme jiné pole např. $F = (-y, x)$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C -y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} r^2\,dt = 2\pi r^2$$

zkusme stejná pole, ale jinou křivku:



a pro všechny 4 je $t \in [0, 2\pi)$

1) pro pole $F = (x, y)$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int x\,dx + y\,dy$$

a sečteme pro každý segment zvlášť

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 1-t\,(-dt)$$

$$+ \int_0^1 1-t\,(-dt)$$

u z druhu není absolutní hodnota

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow$$

stejně jako pro kružnici!

pro pole $F = (x, y)$ by vyšlo 0 pro všechny uzavřené křivky

2) pro pole $F = (-y, x)$, $\oint -y\,dx + x\,dy =$

$$\int_0^1 0\,dt + \int_0^1 1\,dt + \int_0^1 -1\,dt + \int_0^1 0\,dt$$

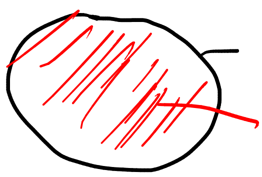
$= 0$ (vyšlo jinak než pro kružnici)

$\Rightarrow$

Greenova věta

pro křivkové integrály 2. druhu

- předpoklady: P, Q, Q_x, P_y jsou spojité
- tvrzení: $$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{F}\, dA$$



C = libovolná uzavřená křivka

A = množina ohraničená křivkou

ve složkách $\vec{F} = (P, Q)$

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

• co se stane když $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$?

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

toto nastane $\Leftrightarrow$ existuje potenciál $V(x,y)$ takový že $\vec{F} = \mathrm{grad}\,V$ tedy

$$\vec{F} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

pak

$$\int_C \vec{F}\,d\vec{r} = \int_C \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy =$$

$$\int_C dV = V(\text{konec křivky}) - V(\text{začátek})$$

toto platí i pro neuzavřené křivky

Využití:

šroubovice $x = \cos t$

$y = \sin t$

$z = t \qquad t \in [0, 2\pi]$

pro $F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

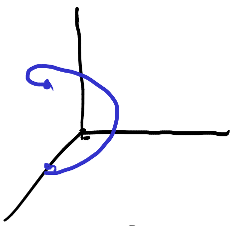
křivka sice není uzavřená ale pole je potenciálové s $V = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \vec{F}\cdot d\vec{r} = V\big(\underbrace{(1,0,2\pi)}_{\text{konc. bod}}\big) - V\big(\underbrace{(1,0,0)}_{\text{poč. bod}}\big)$$

$$= \sqrt{1+4\pi^2} - 1$$

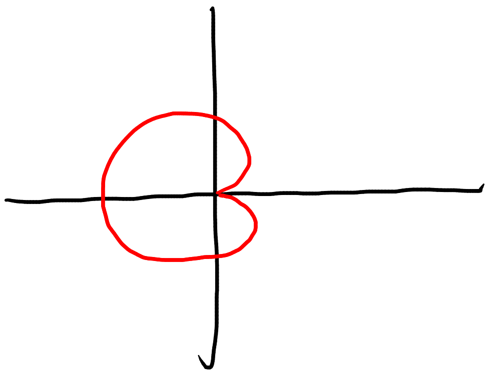
DÚ • ověřte normální integraci
• zkuste zda integrace závisí na integrační cestě? Spojte body jinou křivkou a uvidíte jak vám vyjde int.

(obojí jsme dělali na cvičení)



Př využití Greenovy věty

Křivka: kardioida (srdcovka)



parametrizace:

$$x = \frac{3}{2}\cos t - \cos^2 t$$
$$y = \frac{3}{2}\sin t - \cos t \sin t$$

nebo v polárních souř.

$$r(\varphi) = \frac{3}{2}(1 - \cos\varphi)$$

vezmeme pole $\vec{F} = (-y, x)$

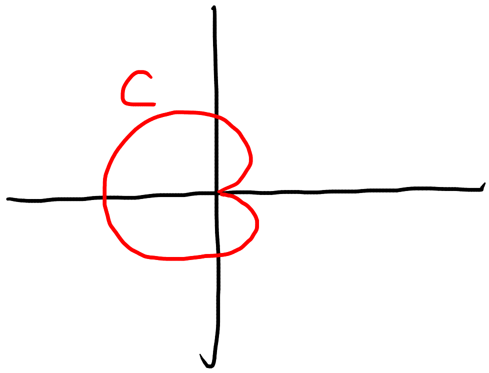
1) bez Greenovy věty

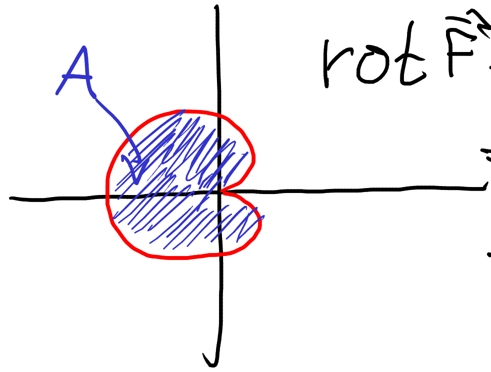
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C -y\,dx + x\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{2}\sin t + \cos t \sin t\right)\left(-\frac{3}{2}\sin t + 2\sin t\cos t\right) + \left(\frac{3}{2}\cos t - \cos^2 t\right)\left(\frac{3}{2}\cos t - \cos 2t\right) dt = \text{moc těžké}$$

2) použijeme Greenovu větu:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_A \operatorname{rot}\vec{F}\, dA$$





$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 1-(-1) = 2$$

$$\Rightarrow \oint_C -y\,dx + x\,dy = \underbrace{\iint_A 2\,dx\,dy}_{\text{daleko jednodušší}}$$

$= 2\cdot$ obsah plochy

Použijeme polární souřadnice

$$0 \leq r \leq \frac{3}{2}(1-\cos\varphi)$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$2\cdot S = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{2}(1-\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{9}{2}\left[\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \underline{\underline{\frac{27}{2}\pi}}$$

10 cvičení

Předpoklad spojitosti v Greenovy věty je důležitý

Př: potenciálové v. pole z $V(x,y) = \frac{1}{xy}$

$\Rightarrow \vec{F} = \left(-\frac{1}{yx^2}, -\frac{1}{y^2x}\right)$ není spojité na osách $x=0$ a $y=0$

rotace $\vec{F}$ je nula všude kromě os $(x=0)$ a $(y=0)$ kde je nedefinovaná!

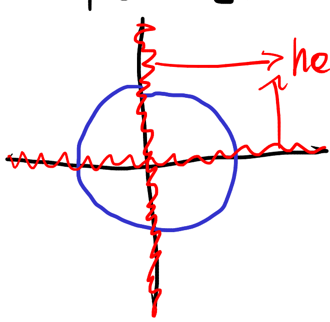
zvolme C = kružnice okolo počátku

$$\oint \vec{F}\,d\vec{r} = \oint_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right) =$$

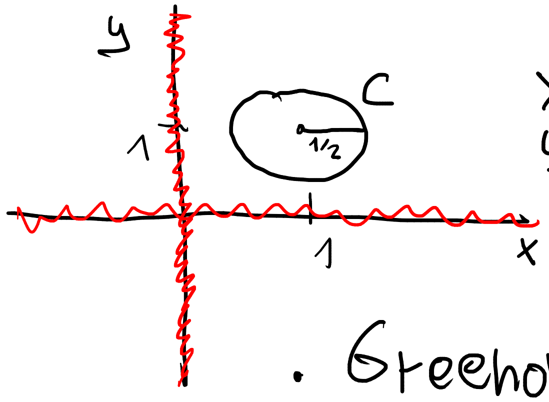
$$= \frac{1}{r^2}\left[\tan\varphi + \cot\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[0 - 0 + \underbrace{\infty - \infty}_{\text{neurčitý výraz}}\right] = \text{diverguje}$$

→ nespojitost pole pokazí integrál.



ale pokud se křivka nespojitostem vyhne tak lze Greenovu větu použít



$$x = 1 + \tfrac{1}{2}\cos t$$
$$y = 1 + \tfrac{1}{2}\sin t$$

· Greenova věta

$$\oint_C -\frac{1}{yx^2}dx - \frac{1}{y^2x}dy =$$

$$\iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{y^2x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{yx^2}\right)\right]dxdy$$

$$= 0$$

· normálně

$$\oint_0^{2\pi}\left(\frac{\sin t}{(1+\frac{1}{2}\sin t)(1+\frac{1}{2}\cos t)^2} - \frac{\cos t}{(1+\frac{1}{2}\sin t)^2(1+\frac{1}{2}\cos t)}\right)dt$$

$$= \left[\frac{1}{(1+\frac{1}{2}\cos t)(1+\frac{1}{2}\sin t)}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{souhlasí} \checkmark$$

Fyzikálnější příklad: $F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

$\operatorname{rot}\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \operatorname{grad} V$ všude kromě bodu $(0,0)$ kde je nespojitost, podobně jako u elmag. pole elektrického náboje.

křivka : $x = r\cos t$ kružnice okolo
$y = r\sin t$ počátku

1) co je potenciál? řešení rovnic

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

integrací a kontrolou dostaneme

$$V = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

2) křivkový integrál

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{-r\sin\varphi}{r^2}\cdot(-r\sin\varphi)\,d\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{r\cos\varphi}{r^2}\,r\cos\varphi\,d\varphi\right)$$
$$= \int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$\Rightarrow$ nespojitost dává konečný příspěvek podobně jako elektrický náboj

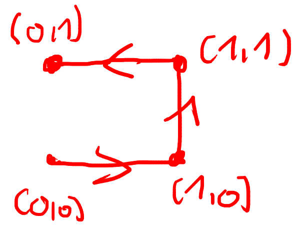
pro křivku která neobsahuje (okolo) (singularitu) dostame vždy $\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ díky Greenově větě ($\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$)

Využití Greenovy věty k doplnění křivek na uzavřené a využití nezávislosti na int. cestě:

pole: $\vec{F_1} = (x, y)$ $\quad \operatorname{rot} \vec{F_1} = 0$

$\vec{F_2} = (-y, x)$ $\quad \operatorname{rot} \vec{F_2} = 2$

Př: spočtete int po křivce



s použitím Green věty

! Greenova věta funguje pouze pro uzavřené křivky

1) pro $\vec{F_1} = (x, y)$ Greenova věta říká

$$\oint xdx + ydy = 0$$

⇒ pro křivky platí $=$ $+$

pro integrály

$$\oint xdx + ydy = \int xdx + ydy + \int xdx + ydy$$

"0 díky Greenově větě"

$$\Rightarrow \int_{\square} x\,dx + y\,dy = -\int_{\downarrow} x\,dx + y\,dy = -\int_0^1 0-(1-t)\,dt$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$x = 0$
$y = 1-t$
$t \in (0,1)$

nebo můžeme využít toho že pole je potenciálové s $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

a tedy
$$\int_{\square} x\,dx + y\,dy = V((0,1)) - V(0,0)$$
$$= \frac{1}{2}$$

2) pro $\vec{F_2} = (-y, x)$ s $\operatorname{rot} \vec{F_2} = 2$

znovu stejný argument:

$$\int_{\square} -y\,dx + x\,dy = \underbrace{\oint_{\square} -y\,dx + x\,dy}_{\text{Green věta}} - \int_{\downarrow} -y\,dx + x\,dy$$

$$= \iint_{\blacksquare} 2\,dx\,dy - \int_{\downarrow} -y\,dx + x\,dy$$

$$= 2 \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{2}}$$

DÚ na využití Green věty
(int. monstrum skripta)

1) transformujte integrál

$$\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left(xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy$$

na dvojný integrál přes plochu A ohraničenou křivkou C pomocí Greenovy věty, kde C je libovolná uzavřená křivka.

2) spočtěte $\oint_C (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy$

Kde C je trojúhelník s vrcholy (1,1), (3,2) a (2,5)
použijte Greenovu větu

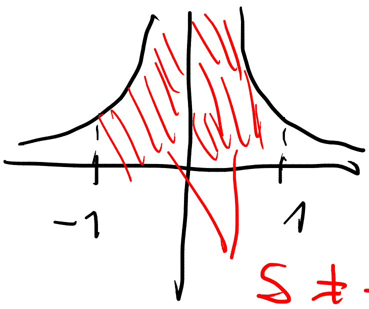
11 cvičení

Připomenutí: integrály z nespojitých fcí

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = \left(-1+\frac{1}{(-1)}\right) = -2$$

tohle je špatně!

graf:



$S \neq -2$!

musíme při integraci izolovat bod nespojitosti $(0,0)$

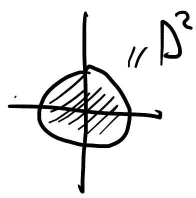
$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx =$$

(fce je sudá)

$$= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx = 2\left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1} = \underline{\underline{\infty}}$$

zkusíme to stejné ve více dimenzích.

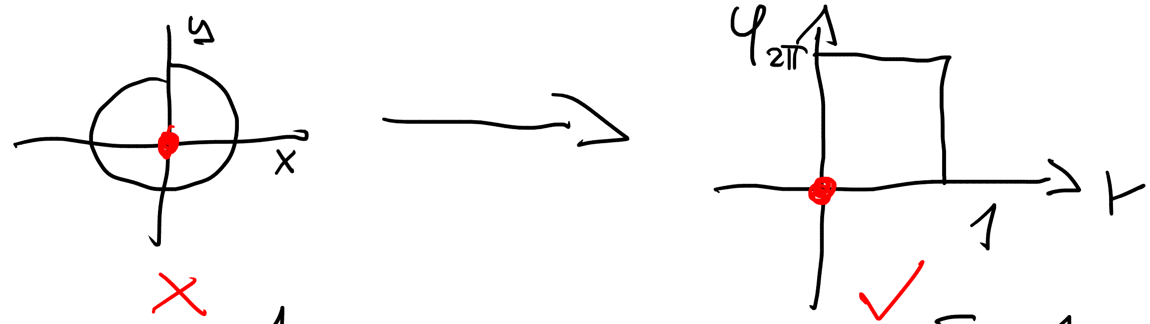
2D: $\iint_{\Delta^2} \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$ přes kruh



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^2}\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi \left[\ln r\right]_0^1 = \infty$$

singularita je na kraji definičního oboru (v $r=0$)

kartézské   polární



3D $$\iiint_{D^3} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

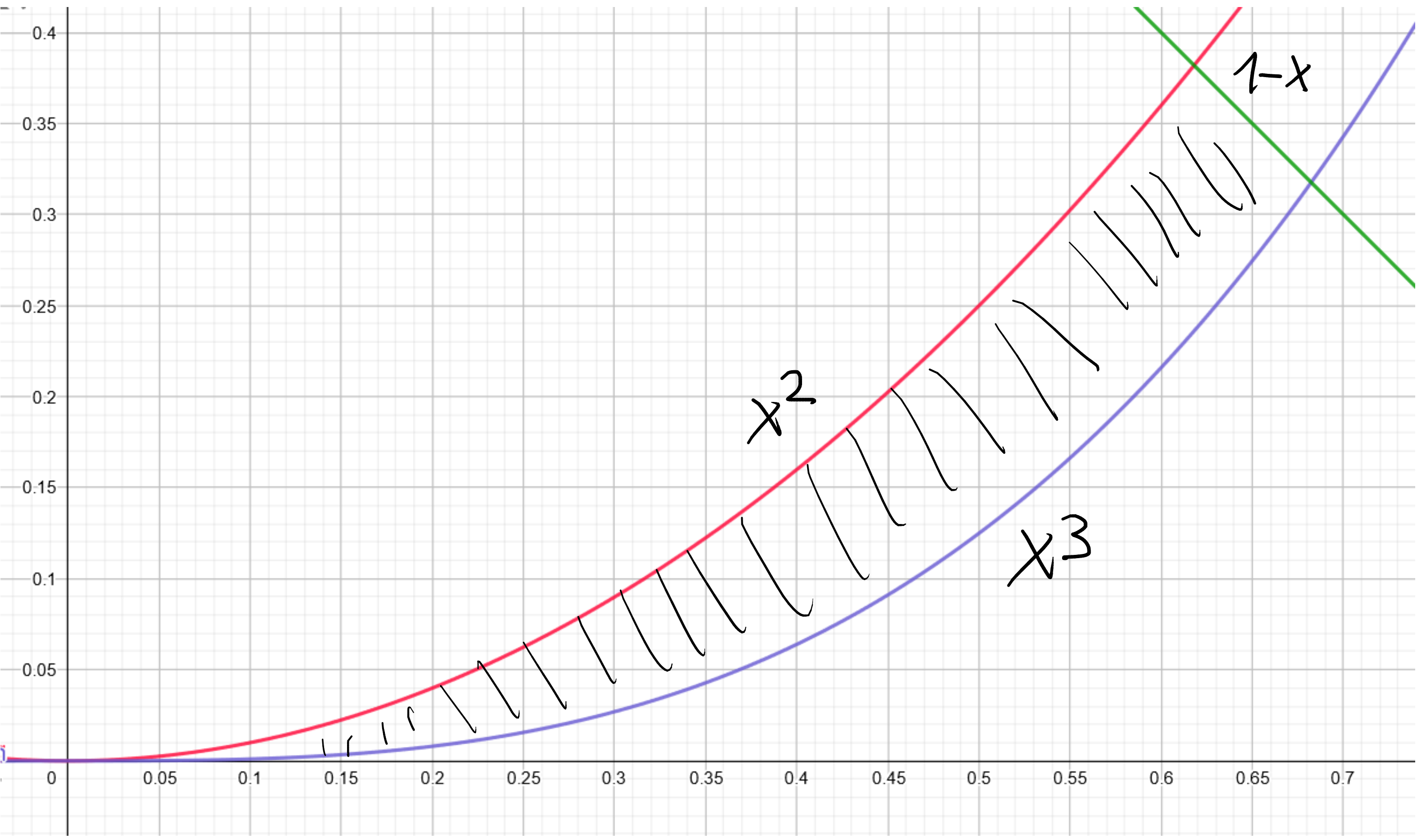
plná koule

$$= \underline{\underline{4\pi}}$$

DÚ zkuste to samé přes čtverec a krychli

Př: rozdělení def. oborů při záměně pořadí integrace

oblast ohraničená fcemi $x^2, x^3, 1-x$



1) popsat oblast nerovnicemi typu

$$x_0 \le x \le x_1$$
$$f_1(x) \le y \le f_2(x)$$

! potřebujeme dvě

Spočteme průsečíky $1-x=x^2 \iff x \approx 0{,}6$

$$1-x=x^3 \iff x \approx 0{,}7$$

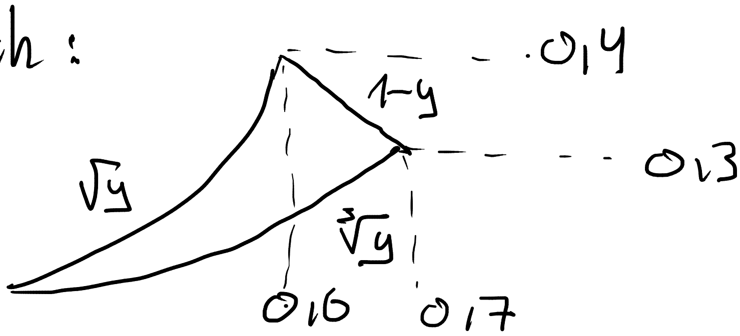
$\Rightarrow$

$$0 \le x \le 0{,}6 \qquad\qquad 0{,}6 \le x \le 0{,}7$$
$$x^3 \le y \le x^2 \quad \text{a} \quad x^3 \le y \le 1-x$$

2) napište vzorec pro obsah a zaměňte pořadí integrace

$$S = \int_0^{0{,}6} \int_{x^3}^{x^2} dy\,dx + \int_{0{,}6}^{0{,}7} \int_{x^3}^{1-x} dy\,dx$$

prohození proměnných:



inverzní fce

$y = x^2 \to x = \sqrt{y}$

$y = x^3 \to x = \sqrt[3]{y}$

$y = 1-x \to x = 1-y$

$$S = \int_0^{0{,}3} \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} dx\,dy + \int_{0{,}3}^{0{,}4} \int_{\sqrt{y}}^{1-y} dx\,dy$$

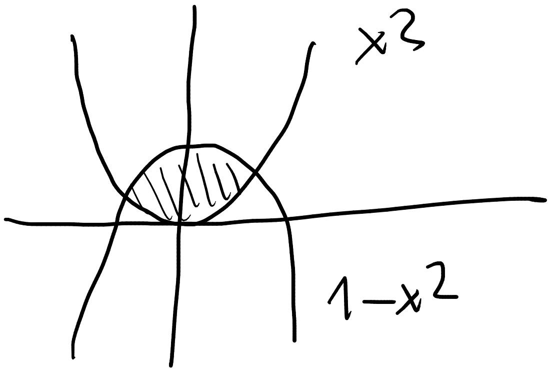
DÚ zkontrolujte, že obojí vyjde stejně ($\approx 0{,}05$)

Př: oblast mezi $1-x^2$ a x^2

průsečíky:

$1-x^2 = x^2$

$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$S = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{x^2}^{1-x^2} dy\,dx$$

záměna pořadí:

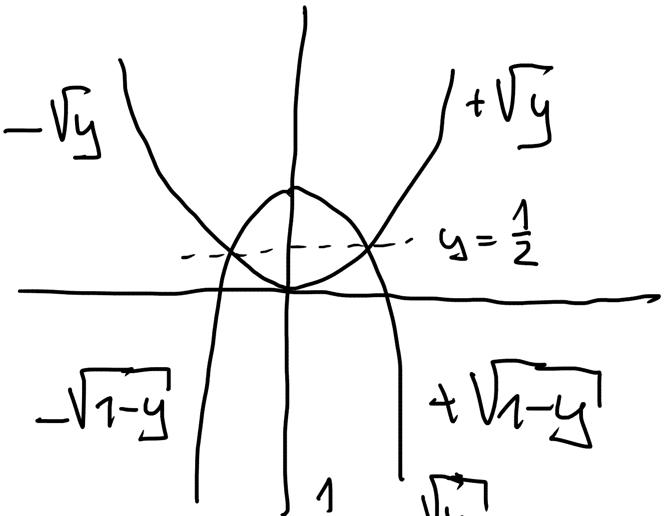
$y = 1-x^2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{1-y}$

které zvolit?

$\rightarrow$ záleží na obrázku!

$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{x}$

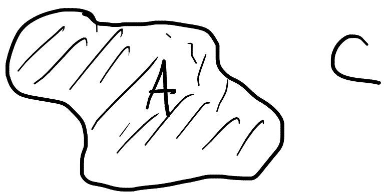


$$\Rightarrow S = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dx\,dy$$

DÚ ověřte, že se integrály pro S rovnají $\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$

Pr: můžeme měřit obsahy množin pomocí křivkového integrálu a Greenovy věty: stačí zvolit $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$

takové že $\operatorname{rot} \vec{F} = 1$ pak dle Greenovy věty platí $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A 1 \, dx dy$



$= \text{obsah } A$

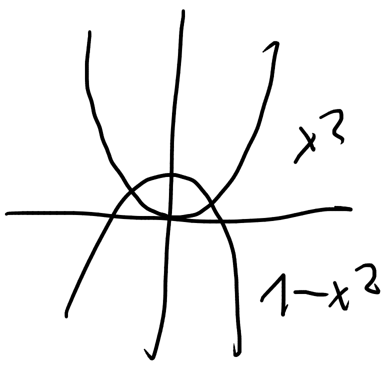
Př: volby $\vec{F} \sim$ $\boxed{\left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)}$ toto použijeme

$(y, 2x)$

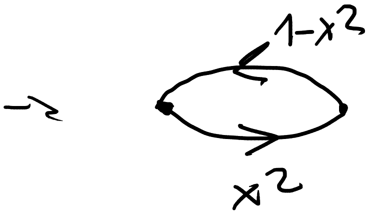
$(-y, 0)$

$(0, x)$

Př: pro



$\to$



$$S = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{2}y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy$$

křivka 1: $y = x^2 \quad x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

křivka 2: $y = 1 - x^2 \quad x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{2}x^2\,dx + \frac{1}{2}x(2x\,dx)$$

$$+ \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{2}(1-x^2)\,dx + \frac{1}{2}x(-2x\,dx) =$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 + \frac{1}{2} \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} x \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \checkmark$$

Př: množiny ve 3D