M2100F - cvičení 5

15.3 2022

1 Co budeme dělat na cvičení

- Najděte extrémy funkce $f(x,y) = 1 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - x^2 - y^2$

  Návod:

  1. Spočtěte parciální derivace f_x a f_y
  2. Vyřešte rovnice $f_x = 0af_y = 0$, kolik dostanete řešení? Tyto řešení jsou stacionární body.
  3. Spočtěte druhé derivace a vložte je do matice, dostanete Hessovu matici. Bude záviset na x, y
  4. Jak vypadá determinant této matice, když do ní dosadíme stacionární body? Pokud platí že determinant je kladný pak stacionární bod je skutečně extrémem (a ne sedlovým bodem), pak se podíváme na znaménko f_{xx} (první prvek matice) pokud je $f_{xx} > 0$ jedná se o minimum pokud naopak $f_{xx} < 0$ pak o maximum
  5. Jaké jsou hodnoty funkce v těchto bodech? Jedná se o globální maxima? Podívejte se na chování funkce pro $x, y \to \infty$.

- Najděte alespoň jeden vázaný extrém funkce $f(x,y,z) = xyz$ s podmínkami $x + y + z = 1$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

  Návod:

  1. Ke každé podmínce přísluší jeden Lagrangeův multiplikátor, dostaneme tedy funkci pěti proměnných $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz - \lambda_1 (x + y + z - 1) - \lambda_2 \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$.
  2. Budeme hledat extrémy funkce F, spočtěte všech 5 parciálních derivací.
  3. Vyřešte rovnice, které dostanete položením všech parciálních derivací rovno nule, jedná se o soustavu 5 rovnic pro 5 neznámých $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$.
  4. Rovnice řešte postupně, doporučuji zkoušet je sčítat a odečítat. Všech možných řešení je celkem dost, stačí najít pouze jedno.
  5. Pro vaše nalezené řešení, chcete nadále zjistit zda se jedná o maximum nebo minimum. Spočtěte proto druhé derivace vzhledem k proměnným (x,y,z), které následně vložte do Hessovy matice.

6. Do této matice vložte konkrétní hodnoty (x, y, z), které jste dostali řešením rovnic a spočtěte determinant, pomocí něho a hodnoty L_{xx} můžete rozhodnout o typu extrému.

- Domácí úkoly (nepovinné)

Jedná se o příklady navíc pro vás na procvičení, řešení těchto příkladů můžete nahrát do Isu do studijních materiálů a já vám je opravím.

1. Najděte extrémy funkcí: $f(x,y) = 1-\sqrt{(x^2+y^2)}$, $\quad q(x,y,z) = xyz$, $\quad h(x,y) = \sin(x-y)$

2. Najděte vázané extrémy: $f(x,y) = x+y$ s podmínkou $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} = 1$ a $g(x,y) = x^2+y^2$ s podmínkou $xy = 1$