1. Ortogonální a unitární operátory

1.1. Ortogonální a unitární zobrazení

Nechť $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou vektorové prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ (resp. nad $\mathbb{C}$). Zobrazení $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ se nazývá ortogonální (resp. unitární), jestliže pro všechna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U}$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{V}} = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{U}}.$$

Lemma. *Je-li $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ ortogonální nebo unitární, pak*

(1) $||\varphi(\mathbf{u})|| = ||\mathbf{u}||$
(2) *φ je prosté*
(3) *φ zobrazuje ortonormální bázi na ortonormální seznam vektorů.*

Důkaz. (1) $||\varphi(\mathbf{u})||^2 = \langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = ||\mathbf{u}||^2$
(2) Je-li $\varphi(\mathbf{u}) = 0$, pak $||\mathbf{u}|| = ||\varphi(\mathbf{u})|| = 0$, tedy $\mathbf{u} = 0$.
(3) plyne z definice a z (1). □

Věta. *Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze v prostoru $\mathcal{U}$ a nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je lineární operátor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) *φ je ortogonální (nad $\mathbb{R}$) resp. unitární (nad $\mathbb{C}$)*
(2) *$\varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2), \ldots, \varphi(\mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze*
(3) *Pro matici $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \mathcal{A}$ platí*

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T \text{ resp. } \mathcal{A}^{-1} = \bar{\mathcal{A}}^T$$

(pruh znamená matici komplexně sdružených čísel).

Důkaz. Provedeme pro $\mathcal{U}$ nad $\mathbb{C}$.
(1) $\Leftrightarrow$ (3) Podmínku $\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ lze v souřadnicích báze α přepsat takto:

$$\mathbf{x}^T (\mathcal{A}^T \bar{\mathcal{A}}) \bar{\mathbf{y}} = (\mathcal{A}\mathbf{x})^T \overline{\mathcal{A}\mathbf{y}} = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}}.$$

Odtud $\mathcal{A}^T \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{E}$, což je ekvivalentní s $\bar{\mathcal{A}}^T \mathcal{A} = \mathcal{E}$, tedy $\mathcal{A}^{-1} = \bar{\mathcal{A}}^T$.
(1) $\Rightarrow$ (2) bylo dokázáno v předchozím
(2) $\Leftarrow$ (1) počítáme v souřadnicích báze α

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \left\langle \sum_i x_i \varphi(u_i), \sum_j y_j \varphi(u_j) \right\rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

□

1.2. Ortogonální a unitární matice

Reálná čtvercová matice se nazývá ortogonální, jestliže

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T \text{ neboli } \mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{E}.$$

Příklad.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Unitární matice Komplexní čtvercová matice se nazývá unitární, jestliže

$$\mathcal{A}^{-1} = \bar{\mathcal{A}}^T \text{ neboli } \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}^T = \mathcal{E}.$$

Každá ortogonální matice je unitární.

Jak na matici $\mathcal{A}$ poznáme, že se ortogonální (unitární)?
- její sloupce tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$
- její řádky tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

1.3. Determinant ortogonální matice
Platí

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{E}.$$

Odtud

$$(\det \mathcal{A})^2 = \det \mathcal{A}. \det \mathcal{A}^T = \det \mathcal{E} = 1.$$

Tedy determinant ortogonální matice je ± 1.

Determinant unitární matice
Platí

$$\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}^T = \mathcal{E}.$$

Odtud

$$|\det \mathcal{A}|^2 = (\det \mathcal{A}).\overline{(\det \mathcal{A})} = \det \mathcal{A}. \det \bar{\mathcal{A}} = \det \mathcal{A}. \det \bar{\mathcal{A}}^T = \det \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}^T = \det \mathcal{E} = 1.$$

Tedy determinant unitární matice je komplexní číslo, které má absolutní hodnotu 1.

1.4. Vlastní čísla unitárních operátorů

Lemma.
(1) *Vlastní čísla unitárního operátoru mají absolutní hodnotu* 1.
(2) *Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.*

Důkaz. (1) Nechť $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$. Potom

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{u}) \rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u} \rangle = \lambda\bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = |\lambda|^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

Protože $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$, je $|\lambda|^2 = 1$.
(2) Nechť $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a $\varphi(\mathbf{u}_1) = \lambda_1\mathbf{u}_1$, $\varphi(\mathbf{u}_2) = \lambda_2\mathbf{u}_2$.

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2) \rangle = \langle \lambda_1\mathbf{u}_1, \lambda_2\mathbf{u}_2 \rangle = \lambda_1\bar{\lambda}_2 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$$

Pokud $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \neq 0$, pak $\lambda_1\bar{\lambda}_2 = 1$. Protože $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, je $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2^{-1}$, tedy $\lambda_1 = \lambda_2$, to je spor. □

1.5. Věta Nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je unitární operátor. Potom v $\mathcal{U}$ existuje ortonormální báze α tvořená vlastními vektory. V této bázi

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ jsou vlastní čísla tvaru

$$\lambda_k = \cos\alpha_k + i\sin\alpha_k.$$

Důkaz. Charakteristický polynom operátoru φ má v $\mathbb{C}$ aspoň jeden kořen λ_1. Tento kořen je vlastním číslem operátoru φ s vlastním vektorem $\mathbf{u}_1$ velikosti 1. Dokážeme, že $\{\mathbf{u}_1\}^\perp$ je invariantní vůči φ. Nechť $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}_1$, pak

$$\lambda_1 \langle \mathbf{u}_1, \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Protože $\lambda_1 \neq 0$, je $\varphi(\mathbf{v})$ kolmé na $\mathbf{u}_1$. Tedy $\{\mathbf{u}_1\}^\perp$ je invariantní a $\varphi/\{\mathbf{u}_1\}^\perp$ je opět unitární operátor. Vezmeme $\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{u}_1\}^\perp$ a uvažujme $\varphi/\mathcal{U}_2$. Takto pokračujeme indukcí až dostaneme ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory. $\square$

1.6. Invariantní podprostory ortogonálních operátorů

V případě ortogonálních operátorů je situace složitější. Pro jednoduchost uvažujme pouze ortogonální operátory v $\mathbb{R}^n$ zadané pomocí matic.

Lemma. *Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární operátor zadaný maticí $\mathcal{A}$, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x}$. Tato matice zadává lineární operátor $\varphi^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ stejným předpisem $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x}$. Jesliže $\lambda = a + ib$ je vlastní číslo matice $\mathcal{A}$ nad $\mathbb{C}$ s vlastním vektorem $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^n$, kde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$, pak $\bar{\lambda} = a - ib$ je rovněž vlastním číslem s vlastním vektorem $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 - i\mathbf{u}_2$.*

Důkaz. Platí

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

Jestliže všechny složky vektorů na levé i pravé straně zaměníme komplexně sdruženými čísly, dostaneme

$$\bar{\mathcal{A}}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}}.$$

$\mathcal{A}$ je reálná matice, proto $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, tedy

$$\mathcal{A}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}}.$$

$\square$

Každou ortogonální matici $\mathcal{A}$ můžeme chápat rovněž jako unitární matici, která zadává unitární operátor

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$$

S využitím vlastností unitárních operátorů dokážeme.

Lemma. *Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je ortogonální operátor zadaný ve standardní bázi ortogonální maticí $\mathcal{A}$, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x}$. Nechť $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha \neq \pm 1$ je vlastní číslo matice $\mathcal{A}$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$, je vlastní vektor operátoru $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x}$ v $\mathbb{C}^n$. Potom platí*

(1) $||\mathbf{u}_1|| = ||\mathbf{u}_2||$ *a* $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$
(2) *Dvourozměrný prostor $\mathcal{V} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \subseteq \mathbb{R}^n$ je invariantní vůči φ a φ je na tomto podprostoru otočením o úhel α od vektoru $\mathbf{u}_2$ k vektoru $\mathbf{u}_1$.*

Důkaz. (1) λ a $\bar{\lambda}$ jsou dvě různá vlastní čísla unitárního operátoru $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ s vlastními vektory $\mathbf{u}$ a $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}^n$. Ty jsou na sebe kolmé. Proto

$$0 = \langle \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - i\mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle + i(\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle).$$

Porovnáním reálné a imaginární části dostaneme

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}_1||^2 - ||\mathbf{u}_2||^2 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ 2\,\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \qquad (\text{neboť } \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

$\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha = a + ib$. Platí

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{u} &= \lambda\mathbf{u} \\ \mathcal{A}(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2) &= (a+ib)(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2) \\ \mathcal{A}\mathbf{u}_1 + i\mathcal{A}\mathbf{u}_2 &= (a\mathbf{u}_1 - b\mathbf{u}_2) + i(b\mathbf{u}_1 + a\mathbf{u}_2) \end{aligned}$$

Porovnáním reálné a imaginární části dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{u}_1 &= a\mathbf{u}_1 - b\mathbf{u}_2 \\ \mathcal{A}\mathbf{u}_2 &= b\mathbf{u}_1 + a\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

Tedy $\mathcal{V} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ je invariantní podprostor. Protože $||\mathbf{u}_1|| = ||\mathbf{u}_2||$, můžeme předpokládat, že oba vektory $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ jsou jednotkové. V ortonormální bázi $\beta = (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)$ má φ matici

$$(\varphi/\mathcal{V})_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

což je matice otočení o úhel α od prvního vektoru báze $\mathbf{u}_2$ k druhému vektoru báze $\mathbf{u}_1$. □

Věta. *Nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je ortogonální zobrazení. Potom $\mathcal{U}$ je direktním součtem navzájem kolmých invariantních podprostorů dimenze 1 a 2. V podprostorech dimenze 1 působí φ jako identita nebo $-$identita, v podprostorech dimenze 2 působí φ jako otáčení.*

Důkaz. Předpokládejme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x}$, kde $\mathcal{A}$ je ortogonální. $\mathcal{A}$ má nad $\mathbb{R}$ vlastní čísla 1, -1. Těm odpovídají jednorozměrné invariantní podprostory. Nad $\mathbb{C}$ má $\mathcal{A}$ vlastní čísla $\cos\alpha + i\sin\alpha \neq \pm 1$. Těm odpovídají dvourozměrné invariantní podprostory. Stačí ukázat, že tyto prostory jsou navzájem kolmé. Nechť k vlastním číslům $\lambda \neq \pm 1$, $\mu \neq \pm 1$ má $\mathcal{A}$ vlastní vektory $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$. Ty lze vybrat tak, že jsou na sebe navzáje kolmé v $\mathbb{C}^n$. Tedy

$$0 = \langle \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2 \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}_{0} + i(\underbrace{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}_{0}).$$

Rovněž $\mathbf{u}_1 - i\mathbf{u}_2$ je vlastní vektor k $\bar{\lambda}$, tedy

$$0 = \langle \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 - i\mathbf{u}_2 \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}_{0} + i(\underbrace{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}_{0}).$$

Z těchto rovnic plyne

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0.$$

□

Důsledek 1.7. *Každá ortogonální matice 3×3 reprezentuje geometricky otáčení kolem osy složené případně se symetrií podle roviny kolmé k této ose. Osa otáčení je určena vlastním vektorem k vlastnímu číslu $+1$ nebo -1.*

Důkaz. Charakteristický polynom stupně 3 má aspoň jeden reálný kořen. Tedy každá ortogonální matice 3×3 má aspoň jedno vlastní číslo $+1$ nebo -1. Další dvě vlastní čísla jsou tvaru $\cos\alpha + i\sin\alpha$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$ (mohou být i reálná). Nechť $\mathbf{v}$ je vlastní vektor k ± 1 a $\mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2$ vlastní vektor ke $\cos\alpha + i\sin\alpha$, pokud $\cos\alpha + i\sin\alpha \neq \pm 1$. Potom v bázi $\beta = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)$ má $\varphi(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x}$ matici

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Rovina $[\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1]$ je kolmá k $\mathbf{v}$ a $\varphi/[\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1]$ je otočení o úhel α. V případě $+1$ jde tedy o otáčení kolem osy $[\mathbf{v}]$ o úhel α, v případě -1 jde o otáčení kolem osy $[\mathbf{v}]$ a reflexi podle roviny $[\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1]$. Případ $\cos\alpha + i\sin\alpha = \pm 1$ dává otáčení o úhel 0 nebo π. $\square$

Příklad. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ je ortogonální matice.

$|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1) = (1-\lambda)\left(\lambda - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda = 1$ je $t(1,1,1)^T$. Vezměme ho jednotkový

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

Ten určuje osu otáčení. Vlastní vektor k $\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Řešíme rovnici

$$\left(\mathcal{A} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\mathcal{E}\right) = 0.$$

Po vynásobení všech řádků 6 dostáváme matici soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 - i3\sqrt{3} & -2 & 4 \\ 4 & 1 - i3\sqrt{3} & -2 \\ -2 & 4 & 1 - i3\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 - i3\sqrt{3} & -2 & 4 \\ 0 & 9 - i3\sqrt{3} & -i6\sqrt{3} \\ -2 & 4 & 1 - i3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Z druhé rovnice

$$\begin{aligned} (9 - i3\sqrt{3})x_2 &= i6\sqrt{3}x_3 \\ x_3 &= -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x_2 \end{aligned}$$

x_1 spočítáme z 3. rovnice. Pro volbu $x_2 = -2$ dostaneme

$$\begin{aligned} x_2 &= -2 \\ x_3 &= 1 + i\sqrt{3} \\ x_1 &= 1 - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vlastní vektor v $\mathbb{C}^3$ je tedy

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 - i\sqrt{3} \\ -2 \\ 1 + i\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Zvolme $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jako jednotkové

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \qquad \mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Přitom $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Tedy matice $\mathcal{A}$ představuje lineární operátor v $\mathbb{R}^3$, který je otočením o úhel $\frac{\pi}{3}$ kolem osy zadané vektorem $(1,1,1)$ ve směru od vektoru $\mathbf{u}_2$ k vektoru $\mathbf{u}_1$.

Příklad. Najděte matici následujícího zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi: φ je otočením kolem osy zadané rovnicemi $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ tak, že $\varphi(1,0,0)$ má všechny složky kladné.

1. způsob řešení: Osa je zadána jednotkovým vektorem $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T$. Ten doplňme do ortonormální báze

$$\mathbf{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T, \mathbf{v}_3 = (0,0,1)^T$$

Platí

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 \\ \varphi(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_3 \\ \varphi(\mathbf{v}_3) &= -\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

(Představte si geometricky.)
Tedy v bázi $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ má φ matici

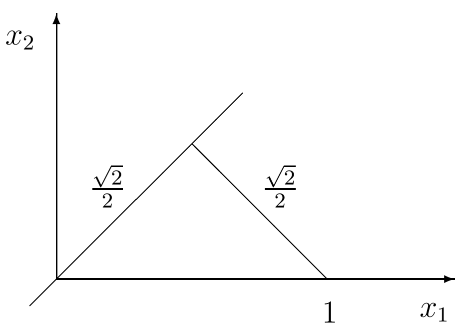
$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V bázi $\epsilon = (e_1, e_2, e_3)$ bude mít φ matici
$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (\mathrm{id})_{\epsilon,\beta}(\varphi)_{\beta,\beta}(\mathrm{id})_{\beta,\epsilon} = (\mathrm{id})_{\epsilon,\beta}(\varphi)_{\beta,\beta}((\mathrm{id})_{\epsilon,\beta})^T =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. způsob řešení: Z geometrického popisu spočítáme

$$\varphi(1,0,0) = \left(a, a, \sqrt{1-2a^2}\right)^T.$$



$$2a^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tedy

$$\varphi(1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T.$$

Analogicky

$$\varphi(0,1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$$

$$\varphi(0,0,1) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T$$

$$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$