# 12. BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY NAD ČÍSELNÝM TĚLESEM $\mathbb{R}$

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

25. února 2020

# Abstrakt

V této části se omezíme na bilineární a kvadratické formy na vektorových prostorech nad číselným tělesem reálných čísel. Tento zvláštní případ je najdůležitější z hlediska aplikací lineární algebry v geometrii a matematické analýze.

# Abstrakt

V této části se omezíme na bilineární a kvadratické formy na vektorových prostorech nad číselným tělesem reálných čísel. Tento zvláštní případ je nejdůležitější z hlediska aplikací lineární algebry v geometrii a matematické analýze.

Množina reálných čísel je mimo strukturu číselného tělesa vybavená relací uspořádání, která je vhodně sladěná se sčítáním a násobením na $\mathbb{R}$.

# Abstrakt

V této části se omezíme na bilineární a kvadratické formy na vektorových prostorech nad číselným tělesem reálných čísel. Tento zvláštní případ je najdůležitější z hlediska aplikací lineární algebry v geometrii a matematické analýze.

Množina reálných čísel je mimo strukturu číselného tělesa vybavená relací uspořádání, která je vhodně sladěná se sčítáním a násobením na $\mathbb{R}$.

Navíc, pro $a \in \mathbb{R}$ platí $a \geq 0$ právě tehdy, když existuje nějaké $b \in \mathbb{R}$ tak, že $a = b^2$. Tato vlastnost nám umožní objasnit a klasifikovat strukturu bilineárních a kvadratických forem nad $\mathbb{R}$.

# Obsah přednášky I

- Bilineární a kvadratické formy na vektorových prostorech nad číselným tělesem reálných čísel
  - Signatura symetrické matice.
  - Sylvestrův zákon setrvačnosti.

# Obsah přednášky I

- Bilineární a kvadratické formy na vektorových prostorech nad číselným tělesem reálných čísel
  - Signatura symetrické matice.
  - Sylvestrův zákon setrvačnosti.
- Definitnost kvadratických forem na vektorových prostorech nad číselným tělesem reálných čísel
  - Zjištění definitnosti formy.
  - Jacobiho věta a Sylvestrovo kritérium.
  - Určení extrému funkcí.

# Signatura I

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická matice. Pak $\mathbf{A}$ je kongruentní s nějakou diagonální maticí $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Potom $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají stejnou hodnost $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$, která se rovná počtu nenulových prvků na diagonále matice $\mathbf{B}$. Mimo hodnost jsou však i počty kladných a záporných prvků na diagonále matice $\mathbf{B}$ **invarianty**, společnými pro navzájem kongruentní matice.

# Signatura I

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická matice. Pak $\mathbf{A}$ je kongruentní s nějakou diagonální maticí $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Potom $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají stejnou hodnost $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$, která se rovná počtu nenulových prvků na diagonále matice $\mathbf{B}$. Mimo hodnost jsou však i počty kladných a záporných prvků na diagonále matice $\mathbf{B}$ **invarianty**, společnými pro navzájem kongruentní matice.

Pro libovolnou *diagonální* matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ položme

$$\sigma(\mathbf{A}) = (s_+, s_-, s_0),$$

kde $s_+$ je počet kladných, $s_-$ počet záporných a $s_0$ počet nulových prvků na diagonále matice $\mathbf{A}$.
Uspořádanou trojici $\sigma(\mathbf{A}) = (s_+, s_-, s_0)$ nazýváme pak ***signaturou matice*** $\mathbf{A}$.

# Signatura II

Složky signatury $\sigma(\mathbf{A})$ nejsou nezávislé.
Platí totiž

$$s_+ + s_- = h(\mathbf{A}) \qquad \text{a} \qquad s_+ + s_- + s_0 = n.$$

# Signatura II

Složky signatury $\sigma(\mathbf{A})$ nejsou nezávislé.
Platí totiž

$$s_+ + s_- = h(\mathbf{A}) \qquad \text{a} \qquad s_+ + s_- + s_0 = n.$$

To znamená, že při znalosti rozměru $n$ a hodnosti $h(\mathbf{A})$ je signatura jednoznačně určená už jedním z čísel $s_+$, $s_-$. Z tohoto důvodu někteří autoři definují signaturu jen jako číslo $s_+$.

# Signatura II

Složky signatury $\sigma(\mathbf{A})$ nejsou nezávislé.
Platí totiž

$$s_+ + s_- = h(\mathbf{A}) \qquad \text{a} \qquad s_+ + s_- + s_0 = n.$$

To znamená, že při znalosti rozměru $n$ a hodnosti $h(\mathbf{A})$ je signatura jednoznačně určená už jedním z čísel $s_+$, $s_-$. Z tohoto důvodu někteří autoři definují signaturu jen jako číslo $s_+$.

### Věta

**(Sylvestrův zákon setrvačnosti)** *Nechť* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *jsou diagonální matice. Potom*

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \;\Rightarrow\; \sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B}).$$

# Signatura III

Dokázaná věta umožňuje korektně rozšířit definici signatury z diagonálních matic na všechny symetrické matice, a rovněž na symetrické bilineární a kvadratické formy.

# Signatura III

Dokázaná věta umožňuje korektně rozšířit definici signatury z diagonálních matic na všechny symetrické matice, a rovněž na symetrické bilineární a kvadratické formy.

***Signaturou symetrické matice*** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, píšeme $\sigma(\mathbf{A})$, rozumíme signaturu každé s ní kongruentní diagonální matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

# Signatura III

Dokázaná věta umožňuje korektně rozšířit definici signatury z diagonálních matic na všechny symetrické matice, a rovněž na symetrické bilineární a kvadratické formy.

***Signaturou symetrické matice*** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, píšeme $\sigma(\mathbf{A})$, rozumíme signaturu každé s ní kongruentní diagonální matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

***Signaturou symetrické bilineární formy*** $F : V^2 \to \mathbb{R}$ na konečně rozměrném reálném vektorovém prostoru $V$, označení $\sigma(F)$, rozumíme signaturu její matice vzhledem k libovolné bázi v $V$.

# Signatura III

Dokázaná věta umožňuje korektně rozšířit definici signatury z diagonálních matic na všechny symetrické matice, a rovněž na symetrické bilineární a kvadratické formy.

***Signaturou symetrické matice*** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, píšeme $\sigma(\mathbf{A})$, rozumíme signaturu každé s ní kongruentní diagonální matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

***Signaturou symetrické bilineární formy*** $F : V^2 \to \mathbb{R}$ na konečně rozměrném reálném vektorovém prostoru $V$, označení $\sigma(F)$, rozumíme signaturu její matice vzhledem k libovolné bázi v $V$.

***Signaturou kvadratické formy*** $q\colon V \to \mathbb{R}$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru $V$ nad $\mathbb{R}$, označení $\sigma(q)$, rozumíme signaturu její polární formy.

# Signatura IV

Pro symetrickou bilineární i pro kvadratickou formu sa příslušná signatura rovná signatuře nějaké její diagonální matice.

# Signatura IV

Pro symetrickou bilineární i pro kvadratickou formu sa příslušná signatura rovná signatuře nějaké její diagonální matice.

Sylvestrův zákon setrvačnosti spolu s větou o kongruenci matic nám zaručují, že libovolné dvě diagonální matice zodpovídající dané formě vzhledem k různým bazím, ve kterých má tato forma diagonální matici, mají stejnou signaturu.

# Signatura IV

Pro symetrickou bilineární i pro kvadratickou formu sa příslušná signatura rovná signatuře nějaké její diagonální matice.

Sylvestrův zákon setrvačnosti spolu s větou o kongruenci matic nám zaručují, že libovolné dvě diagonální matice zodpovídající dané formě vzhledem k různým bazím, ve kterých má tato forma diagonální matici, mají stejnou signaturu.

Každou reálnou symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ můžeme upravit na s ní kongruentní diagonální matici. Tu zase můžeme změnou pořadí prvků na diagonále upravit na s ní kongruentní matici tvaru

$$\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_k, -d_{k+1}, \ldots, -d_{k+l}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m\text{-krát}}),$$

kde $\sigma(\mathbf{A}) = (k, l, m)$ a $d_i > 0$ pro $i \leq k + l$.

# Signatura V

Pokud pro každé $i \leq k + l$ vynásobíme $i$-tý sloupec i řádek skalárem $1/\sqrt{d_i}$, vyjde nám matice v blokově diagonálním tvaru

$$\mathbf{A} \equiv \mathrm{diag}(\mathbf{I}_k, -\mathbf{I}_l, \mathbf{0}_{m,m}).$$

# Signatura V

Pokud pro každé $i \leq k + l$ vynásobíme $i$-tý sloupec i řádek skalárem $1/\sqrt{d_i}$, vyjde nám matice v blokově diagonálním tvaru

$$\mathbf{A} \equiv \mathrm{diag}(\mathbf{I}_k, -\mathbf{I}_l, \mathbf{0}_{m,m}).$$

Spojením této úvahy se Sylvestrovým zákonem setrvačnosti dostaneme

### Věta

*Nechť* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *jsou libovolné symetrické matice. Potom*

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \;\Leftrightarrow\; \sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B}).$$

# Signatura VI

## Důsledek

*Nechť $V$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ konečné dimenze $n$. Potom*

(a) *každá symetrická bilineární forma $F : V^2 \to \mathbb{R}$ má ve vhodné bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru $V$ blokově diagonální matici tvaru*

$$[F]_{\boldsymbol{\alpha}} = \operatorname{diag}(\mathbf{I}_k, -\mathbf{I}_l, \mathbf{0}_{m,m}),$$

*kde $\sigma(F) = (k, l, m)$;*

(b) *každá kvadratická forma $q : V \to \mathbb{R}$ má ve vhodné bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru $V$ diagonální tvar*

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2,$$

*kde $\sigma(q) = (k, l, n-k-l)$ a $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.*

# Signatura VII

Každou symetrickou matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{Q}$ můžeme upravit na s ní kongruentní diagonální matici

$$\mathbf{A} \equiv \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_h, 0, \ldots, 0),$$

kde $h = h(\mathbf{A})$ a $d_j \neq 0$ pro $j \leq h$.

# Signatura VII

Každou symetrickou matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{Q}$ můžeme upravit na s ní kongruentní diagonální matici

$$\mathbf{A} \equiv \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_h, 0, \ldots, 0),$$

kde $h = h(\mathbf{A})$ a $d_j \neq 0$ pro $j \leq h$.

V komplexním případě si každý z prvků $d_j$ můžeme vyjádřit v goniometrickém tvaru

$$d_j = r_j(\cos \alpha_j + \mathrm{i} \sin \alpha_j),$$

kde $r_j = |d_j| > 0$ a $0 \leq \alpha_j < 2\pi$.

## Signatura VII

Každou symetrickou matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{Q}$ můžeme upravit na s ní kongruentní diagonální matici

$$\mathbf{A} \equiv \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_h, 0, \ldots, 0),$$

kde $h = h(\mathbf{A})$ a $d_j \neq 0$ pro $j \leq h$.

V komplexním případě si každý z prvků $d_j$ můžeme vyjádřit v goniometrickém tvaru

$$d_j = r_j(\cos \alpha_j + \mathrm{i} \sin \alpha_j),$$

kde $r_j = |d_j| > 0$ a $0 \leq \alpha_j < 2\pi$.

Pokud pro každé $j \leq h$ vynásobíme $j$-tý sloupec i řádek skalárem

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{r_j}} \left( \cos \frac{\alpha_j}{2} - \mathrm{i} \sin \frac{\alpha_j}{2} \right),$$

pro který platí $c_j^2 d_j = 1$, dostaneme

$$\mathbf{A} \equiv \operatorname{diag}(\mathbf{I}_h, \mathbf{0}_{m,m}),$$

kde $m = n - h$.

# Signatura VIII

Z toho vidíme, že nad číselným tělesem $\mathbb{C}$ se nic podobné rozdělení nenulových prvkov na kladné a záporné nekoná – všechny nenulové prvky na diagonále jsou rovnocenné a můžeme je nahradit jedničkou.

# Signatura VIII

Z toho vidíme, že nad číselným tělesem $\mathbb{C}$ se nic podobné rozdělení nenulových prvkov na kladné a záporné nekoná – všechny nenulové prvky na diagonále jsou rovnocenné a můžeme je nahradit jedničkou.

**Jediným invariantem**, který jednoznačně určuje kongruenci symetrických matic i kanonický tvar matic symetrických bilineárních i kvadratických forem nad $\mathbb{C}$, je jejich **hodnost**, která tak plně přebírá úlohu signatury v reálném případě.

# Signatura VIII

Z toho vidíme, že nad číselným tělesem $\mathbb{C}$ se nic podobné rozdělení nenulových prvkov na kladné a záporné nekoná – všechny nenulové prvky na diagonále jsou rovnocenné a můžeme je nahradit jedničkou.

**Jediným invariantem**, který jednoznačně určuje kongruenci symetrických matic i kanonický tvar matic symetrických bilineárních i kvadratických forem nad $\mathbb{C}$, je jejich **hodnost**, která tak plně přebírá úlohu signatury v reálném případě.

## Tvrzení

*(a) Nechť* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *jsou symetrické matice. Potom* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ *právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.
*(b) Nechť* $V$ *je konečně rozměrný vektorový prostor nad* $\mathbb{C}$, *a* $F : V^2 \to \mathbb{C}$ *je symetrická bilineární forma. Potom* $F$ *má vzhledem k nějaké bázi* $\boldsymbol{\alpha}$ *prostoru* $V$ *matici v blokově diagonálním tvaru* $[F]_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathrm{diag}(\mathbf{I}_h, \mathbf{0}_{m,m})$, *kde* $h = h(F)$ *a* $m = \dim V - h$.

# Signatura IX

Situace nad $\mathbb{C}$ je podstatně jednodušší než nad $\mathbb{R}$ a dokázali jsme ji zcela popsat.
Nad $\mathbb{Q}$ si tak lehko poradit nedovedeme. Základní problém tkví v tom, že ne všechna kladné racionální čísla mají racionální druhé odmocniny.

# Signatura IX

Situace nad $\mathbb{C}$ je podstatně jednodušší než nad $\mathbb{R}$ a dokázali jsme ji zcela popsat.
Nad $\mathbb{Q}$ si tak lehko poradit nedovedeme. Základní problém tkví v tom, že ne všechna kladné racionální čísla mají racionální druhé odmocniny.

Např. pro matici rozměru $1 \times 1$ máme např. $(2) \not\equiv (1)$ v důsledku iracionality čísla $\sqrt{2}$.

# Signatura IX

Situace nad $\mathbb{C}$ je podstatně jednodušší než nad $\mathbb{R}$ a dokázali jsme ji zcela popsat.
Nad $\mathbb{Q}$ si tak lehko poradit nedovedeme. Základní problém tkví v tom, že ne všechna kladné racionální čísla mají racionální druhé odmocniny.

Např. pro matici rozměru $1 \times 1$ máme např. $(2) \not\equiv (1)$ v důsledku iracionality čísla $\sqrt{2}$.

Pro rozměr $2 \times 2$ máme např.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \not\equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Definitnost I

Nechť $V$ je vektorový prostor nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

# Definitnost I

Nechť $V$ je vektorový prostor nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Kvadratická forma $q : V \to \mathbb{R}$ se nazývá

(a) *kladně (pozitivně) definitní*, pokud $q(\mathbf{x}) > 0$ pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$;

(b) *kladně (pozitivně) semidefinitní*, pokud $q(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;

(c) *záporně (negativně) definitní*, pokud $q(\mathbf{x}) < 0$ pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$;

(d) *záporně (negativně) semidefinitní*, jestliže $q(\mathbf{x}) \leq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;

(e) *indefinitní*, pokud existují $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ tak, že $q(\mathbf{x}) < 0 < q(\mathbf{y})$.

# Definitnost I

Nechť $V$ je vektorový prostor nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Kvadratická forma $q : V \to \mathbb{R}$ se nazývá

(a) *kladně (pozitivně) definitní*, pokud $q(\mathbf{x}) > 0$ pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$;

(b) *kladně (pozitivně) semidefinitní*, pokud $q(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;

(c) *záporně (negativně) definitní*, pokud $q(\mathbf{x}) < 0$ pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$;

(d) *záporně (negativně) semidefinitní*, jestliže $q(\mathbf{x}) \leq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;

(e) *indefinitní*, pokud existují $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ tak, že $q(\mathbf{x}) < 0 < q(\mathbf{y})$.

Stejnou klasifikaci zavádíme i pro symetrické bilineární formy $F : V^2 \to \mathbb{R}$. Forma $F$ má příslušnou vlastnost definitnosti právě tehdy, když jí indukovaná kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, má tuto vlastnost.

# Definitnost II

Podobně, symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má příslušnou vlastnost definitnosti právě tehdy, když tuto vlastnost má kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$.

# Definitnost II

Podobně, symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má příslušnou vlastnost definitnosti právě tehdy, když tuto vlastnost má kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$.

Evidentně platí: (a) $\Rightarrow$ (b), (c) $\Rightarrow$ (d), ale každá z podmínek (a), (c), (e) vylučuje zbývající dvě. Dokonca (e) vylučuje každou z podmínek (b), (d). Podmínky (b), (d) se vzájemně nevylučují, ale jediná kvadratická forma, která je zároveň kladně i záporně semidefinitní, je forma identicky rovná nule na $V$.

# Definitnost II

Podobně, symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má příslušnou vlastnost definitnosti právě tehdy, když tuto vlastnost má kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$.

Evidentně platí: (a) $\Rightarrow$ (b), (c) $\Rightarrow$ (d), ale každá z podmínek (a), (c), (e) vylučuje zbývající dvě. Dokonca (e) vylučuje každou z podmínek (b), (d). Podmínky (b), (d) se vzájemně nevylučují, ale jediná kvadratická forma, která je zároveň kladně i záporně semidefinitní, je forma identicky rovná nule na $V$.

V dimenzi $n = 1$ je to však jediná (kladně nebo záporně) semidefinitní forma. V dimenzi $n = 1$ neexistují žádné indefinitní formy.

# Definitnost II

Podobně, symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má příslušnou vlastnost definitnosti právě tehdy, když tuto vlastnost má kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$.

Evidentně platí: (a) $\Rightarrow$ (b), (c) $\Rightarrow$ (d), ale každá z podmínek (a), (c), (e) vylučuje zbývající dvě. Dokonca (e) vylučuje každou z podmínek (b), (d). Podmínky (b), (d) se vzájemně nevylučují, ale jediná kvadratická forma, která je zároveň kladně i záporně semidefinitní, je forma identicky rovná nule na $V$.

V dimenzi $n = 1$ je to však jediná (kladně nebo záporně) semidefinitní forma. V dimenzi $n = 1$ neexistují žádné indefinitní formy.

Totiž, všechny kvadratické formy v jedné proměnné jsou tvaru

$$g(x) = kx^2,$$

kde buď $k > 0$ nebo $k < 0$ nebo $k = 0$.

# Definitnost III

Nasledující tvrzení poskytuje úplný popis definitnosti i regularity kvadratických forem (a zároveň i symetrických bilineárních forem a symetrických matic) v jazyce jejich signatury.

# Definitnost III

Nasledující tvrzení poskytuje úplný popis definitnosti i regularity kvadratických forem (a zároveň i symetrických bilineárních forem a symetrických matic) v jazyce jejich signatury.

### Tvrzení

*Nechť $V$ je $n$-rozměrný vektorový prostor nad číselným tělesem $\mathbb{R}$ a $q : V \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma se signaturou $\sigma(q) = (s_+, s_-, s_0)$. Potom*

(a) *$q$ je kladně definitní právě tehdy, když platí $\sigma(q) = (n, 0, 0)$;*

(b) *$q$ je kladně semidefinitní právě tehdy, když $\sigma(q) = (h(q), 0, n - h(q))$;*

(c) *$q$ je záporně definitní právě tehdy, když $\sigma(q) = (0, n, 0)$;*

(d) *$q$ je záporně semidefinitní právě tehdy, když $\sigma(q) = (0, h(q), n - h(q))$;*

(e) *$q$ je indefinitní právě tehdy, když $s_+ \geq 1$ a $s_- \geq 1$;*

(f) *$q$ je regulární právě tehdy, když $s_0 = 0$.*

# Definitnost IV

### Důsledek

*Symetrická matice* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je kladně definitní právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *tak, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}.$$

# Definitnost IV

## Důsledek

*Symetrická matice* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je kladně definitní právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *tak, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}.$$

Předchozí tvrzení nám spolu s algoritmem na diagonalizaci symetrické matice (případně Lagrangeovou metodou) dává přímý návod na zjištění charakteru definitnosti formy či matice.

# Definitnost IV

## Důsledek

*Symetrická matice* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je kladně definitní právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *tak, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}.$$

Předchozí tvrzení nám spolu s algoritmem na diagonalizaci symetrické matice (případně Lagrangeovou metodou) dává přímý návod na zjištění charakteru definitnosti formy či matice.

Tak například kvadratická forma

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 - 2x_2^2 + 2x_2 x_3 - 3x_3 x_4$$

z našeho příkladu má signaturu $(2, 2, 0)$, je tedy indefinitní a regulární.

# Definitnost V

Někdy však může být užitečné, jestliže dokážeme určit charakter definitnosti nějaké symetrické matice (a tím pádem i jí určené kvadratické či bilineární formy) přímo, t. j. bez její předcházející úpravy na s ní kongruentní diagonální tvar.

# Definitnost V

Někdy však může být užitečné, jestliže dokážeme určit charakter definitnosti nějaké symetrické matice (a tím pádem i jí určené kvadratické či bilineární formy) přímo, t. j. bez její předcházející úpravy na s ní kongruentní diagonální tvar.

Zavedeme jistou modifikaci úprav typu (1) – nazvěme je úpravami typu

($1^+$) Nechť $i \leq n$ je nejmenší index takový, že $a_{ii} \neq 0$. Potom postupně pro každé $j \leq n$ takové, že $j > i$ a $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$, připočteme k $j$-tému sloupci matice $\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)$-násobek $i$-tého sloupce a v takto získané matici připočteme $\left(-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right)$-násobek $i$-tého řádku k $j$-tému řádku. Tedy pomocí diagonálního prvku $a_{ii} \neq 0$ vynulujeme všechny nenulové prvky $i$-tého řádku i sloupce, které leží *napravo* resp. *dole* od prvku $a_{ii}$.

# Definitnost VI

Matice přechodu, která vznikne provedením ESO, odpovídajících nějakým úpravám typu $(1^+)$ na jednotkové matici, je vždy **horní trojúhelníková matice** s jedničkami na diagonále. Součin dvou matic takéhoto tvaru má též takýto tvar.

# Definitnost VI

Matice přechodu, která vznikne provedením ESO, odpovídajících nějakým úpravám typu $(1^+)$ na jednotkové matici, je vždy **horní trojúhelníková matice** s jedničkami na diagonále. Součin dvou matic takéhoto tvaru má též takýto tvar.

Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ matice nad libovolným číselným tělesem $K$ a $1 \leq k \leq n$, tak pro potřeby zbývající části tohoto paragrafu bude $\mathbf{A}_k$ označovat matici tvořenou levým horním rohem rozměru $k \times k$ matice $\mathbf{A}$.

# Definitnost VI

Matice přechodu, která vznikne provedením ESO, odpovídajících nějakým úpravám typu $(1^{+})$ na jednotkové matici, je vždy **horní trojúhelníková matice** s jedničkami na diagonále. Součin dvou matic takéhoto tvaru má též takýto tvar.

Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ matice nad libovolným číselným tělesem $K$ a $1 \leq k \leq n$, tak pro potřeby zbývající části tohoto paragrafu bude $\mathbf{A}_k$ označovat matici tvořenou levým horním rohem rozměru $k \times k$ matice $\mathbf{A}$.

Tedy

$$\mathbf{A}_1 = (a_{11}), \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\dots, \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{A}.$$

# Definitnost VI

Matice přechodu, která vznikne provedením ESO, odpovídajících nějakým úpravám typu $(1^+)$ na jednotkové matici, je vždy **horní trojúhelníková matice** s jedničkami na diagonále. Součin dvou matic takéhoto tvaru má též takýto tvar.

Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ matice nad libovolným číselným tělesem $K$ a $1 \leq k \leq n$, tak pro potřeby zbývající části tohoto paragrafu bude $\mathbf{A}_k$ označovat matici tvořenou levým horním rohem rozměru $k \times k$ matice $\mathbf{A}$.

Tedy

$$\mathbf{A}_1 = (a_{11}), \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\ldots, \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{A}.$$

Determinanty matic $\mathbf{A}_k$, $1 \leq k \leq n$, budeme nazývat ***hlavní minory matice*** $\mathbf{A}$.

# Definitnost VII

## Věta

(**Jacobi**) *Nechť $K$ je těleso a $\mathbf{0} \neq \mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je symetrická matice hodnosti $h$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

*(i)* *matice $\mathbf{A}_h$ je regulární a matici $\mathbf{A}$ můžeme upravit na s ní kongruentní diagonální tvar výlučně pomocí úprav typu $(1^+)$;*

*(ii)* *$|\mathbf{A}_k| \neq 0$ pro každé $1 \leq k \leq h$, a platí*

$$\mathbf{A} \equiv \mathrm{diag}\left(|\mathbf{A}_1|, \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}_1|}, \dots, \frac{|\mathbf{A}_h|}{|\mathbf{A}_{h-1}|}, 0, \dots, 0\right);$$

*(iii)* *$|\mathbf{A}_k| \neq 0$ pro každé $1 \leq k \leq h$;*

*(iv)* *$|\mathbf{A}_k| \neq 0$ pro každé $1 \leq k \leq h$ a matici $\mathbf{A}$ můžeme upravit pouze úpravami typu $(1^+)$ na s ní kongruentní diagonální tvar*

$$\mathrm{diag}\left(|\mathbf{A}_1|, \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}_1|}, \dots, \frac{|\mathbf{A}_h|}{|\mathbf{A}_{h-1}|}, 0, \dots, 0\right).$$

# Definitnost VIII

### Věta

(**Sylvestrovo kritérium**) *Nechť* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je symetrická matica. Potom*

(a) $\mathbf{A}$ *je kladně definitní právě tehdy, když* $|\mathbf{A}_k| > 0$ *pre všechny* $1 \leq k \leq n$*;*

(b) $\mathbf{A}$ *je záporně definitní právě tehdy, když* $(-1)^k|\mathbf{A}_k| > 0$ *pre všechna* $1 \leq k \leq n$*.*

# Definitnost IX

Reálnou funkci jedné proměnné $f\colon U \to \mathbb{R}$ definovanou na nějaké otevřené množině $U$, tj. pro každé $a \in U$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že otevřený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ je pod $U$, nazveme *dostatečně hladkou*, pokud $f$ má na $U$ konečnou a spojitou první i druhou derivaci.

# Definitnost IX

Reálnou funkci jedné proměnné $f\colon U \to \mathbb{R}$ definovanou na nějaké otevřené množině $U$, tj. pro každé $a \in U$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že otevřený interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ je pod $U$, nazveme *dostatečně hladkou*, pokud $f$ má na $U$ konečnou a spojitou první i druhou derivaci.

Z matematické analýzy víme, že pre takovou funkci $f$ máme v každém bodě $a \in U$ Taylorův rozvoj

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \theta(x)(x-a)^2$$

pro $x$ z jistého okolí $N \subseteq U$ bodu $a$. Přitom funkce $\theta\colon N \to \mathbb{R}$ je spojitá a vyhovuje podmínce $\theta(a) = 0$. Tedy absolutní hodnota zbytku $\theta(x)(x-a)^2$ je v dostatečně malém okolí $M \subseteq N$ bodu $a$ v porovnání s ostatními členy uvedeného rozvoje zanedbatelně malá.

# Definitnost X

Pre $x$ z tohoto malého okolí bodu $a$ teda lze psát

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

# Definitnost X

Pre $x$ z tohoto malého okolí bodu $a$ teda lze psát

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Pokud $f'(a) \neq 0$, tak lineární člen $f'(a)(x-a)$ mění v bodě $a$ znaménko a v dostatečně malém okolí bodu $a$ převažuje nad kvadratickým členem $\frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$.

# Definitnost X

Pre $x$ z tohoto malého okolí bodu $a$ teda lze psát

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Pokud $f'(a) \neq 0$, tak lineární člen $f'(a)(x-a)$ mění v bodě $a$ znaménko a v dostatečně malém okolí bodu $a$ převažuje nad kvadratickým členem $\frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$.

Proto dostatečně hladká funkce může nabýt na otevřené množině extrémy jen v bodech $a$, pro které platí $f'(a) = 0$. Ty nazýváme *stacionární* nebo také *kritické body* funkce $f$.

# Definitnost X

Pre $x$ z tohoto malého okolí bodu $a$ teda lze psát

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Pokud $f'(a) \neq 0$, tak lineární člen $f'(a)(x-a)$ mění v bodě $a$ znaménko a v dostatečně malém okolí bodu $a$ převažuje nad kvadratickým členem $\frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$.

Proto dostatečně hladká funkce může nabýt na otevřené množině extrémy jen v bodech $a$, pro které platí $f'(a) = 0$. Ty nazýváme *stacionární* nebo také *kritické body* funkce $f$.

Je-li $a \in U$ je stacionární bod, tak uvedený Taylorov rozvoj má v tomto bodě tvar

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \theta(x)(x-a)^2 \approx f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

pro $x \in M$.

# Definitnost XI

$$f(x) \approx f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Pokud $f''(a) > 0$, tak $f(a) < f(x)$ pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí $L \subseteq M$ bodu $a$, tedy $f$ má v bodě $a$ *ostré lokální minimum*.

# Definitnost XI

$$f(x) \approx f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Pokud $f''(a) > 0$, tak $f(a) < f(x)$ pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí $L \subseteq M$ bodu $a$, tedy $f$ má v bodě $a$ *ostré lokální minimum*.

Pokud $f''(a) < 0$, tak $f(a) > f(x)$ pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí $L \subseteq M$ bodu $a$, tedy $f$ má v bodě $a$ *ostré lokální maximum*.

# Definitnost XI

$$f(x) \approx f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Pokud $f''(a) > 0$, tak $f(a) < f(x)$ pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí $L \subseteq M$ bodu $a$, tedy $f$ má v bodě $a$ *ostré lokální minimum*.

Pokud $f''(a) < 0$, tak $f(a) > f(x)$ pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí $L \subseteq M$ bodu $a$, tedy $f$ má v bodě $a$ *ostré lokální maximum*.

Poku $f''(a) = 0$, neumíme na základě první a druhé derivace určit, zda $f$ má v bodě $a$ extrém ani charakter možného extrému.

# Definitnost XI

$$f(x) \approx f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Pokud $f''(a) > 0$, tak $f(a) < f(x)$ pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí $L \subseteq M$ bodu $a$, tedy $f$ má v bodě $a$ *ostré lokální minimum*.

Pokud $f''(a) < 0$, tak $f(a) > f(x)$ pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí $L \subseteq M$ bodu $a$, tedy $f$ má v bodě $a$ *ostré lokální maximum*.

Poku $f''(a) = 0$, neumíme na základě první a druhé derivace určit, zda $f$ má v bodě $a$ extrém ani charakter možného extrému.

Podobné úvahy fungují při hledání extrému funkcí více proměnných, jen se druhá derivace nahradí tzv. Hessovou maticí parciálních druhých derivací a rozhodujeme se podle toho, zda Hessova matice je pozitivně definitní či negativně definitní.