17. JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

30. dubna 2020

Abstrakt

V této kapitole si ukážeme, že i nediagonalizovatelné lineární operátory či matice můžeme volbou vhodné báze upravit na tzv. ***Jordanův kanonický tvar***, který je – alespoň na pohledd – velmi blízký diagonálnímu tvaru.

Obsah přednášky I

- Jordanův kanonický tvar matice

Obsah přednášky I

- Jordanův kanonický tvar matice
- Příklady na Jordanův kanonický tvar matice

Jordanův kanonický tvar matice I

Motivace 1: **Existují lineární operátory, které nelze diagonalizovat, tj. nelze je ve vhodné bázi psát jako**

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Jordanův kanonický tvar matice I

Motivace 1: **Existují lineární operátory, které nelze diagonalizovat, tj. nelze je ve vhodné bázi psát jako**

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Uvažme matici
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené předpisem $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$. Vlastní čísla jsou kořeny determinantu $det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-2)^2$.

Vlastní číslo 2 je algebraické násobnosti 2, ale geometrické násobnosti 1. Totiž, prostor řešení homogenního systému rovnic $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má dimenzi jedna.

Jordanův kanonický tvar matice II

Řešení homogenního systému rovnic $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je pak tvaru $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tedy neexistuje báze α taková, že by v ní bylo $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, tj. matice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ není podobná žádné diagonální matici, neplatí tedy

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{P}$$

pro **žádnou regulární matici $\boldsymbol{P}$**.

Cílem je najít pro obecný operátor φ bázi α tak, aby matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ byla co nejjednodušší. Hledaný tvar se nazývá **Jordanův kanonický tvar.**

Jordanův kanonický tvar matice III - Opakování

Označme $\boldsymbol{J}_n \in K^{n\times n}$ čtvercovou matici řádu n, jejíž prvky na místech $(i, i+1)$ jsou rovné 1 pro $1 \leq i \leq n-1$ a všechny ostatní prvky jsou rovné 0. Zřejmě $h(\boldsymbol{J}_n) = n-1$. Dále položme

$$\boldsymbol{J}_n(\lambda) = \lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{J}_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pro $\lambda \in K$. Tedy $\boldsymbol{J}_n(\lambda)$ je tvořená diagonálou z n lambd, vedlejší diagonálou vpravo od ní z $n-1$ jednotek a zbytek jsou nuly.

Jordanův kanonický tvar matice III - Opakování

Označme $\boldsymbol{J}_n \in K^{n\times n}$ čtvercovou matici řádu n, jejíž prvky na místech $(i, i+1)$ jsou rovné 1 pro $1 \le i \le n-1$ a všechny ostatní prvky jsou rovné 0. Zřejmě $h(\boldsymbol{J}_n) = n-1$. Dále položme

$$\boldsymbol{J}_n(\lambda) = \lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{J}_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pro $\lambda \in K$. Tedy $\boldsymbol{J}_n(\lambda)$ je tvořená diagonálou z n lambd, vedlejší diagonálou vpravo od ní z $n-1$ jednotek a zbytek jsou nuly.

Každá matice tvaru $\boldsymbol{J}_n(\lambda)$ sa nazývá ***Jordanova buňka*** řádu n. Zřejmě i $\boldsymbol{J}_n = \boldsymbol{J}_n(0)$ je Jordanova buňka.

Jordanův kanonický tvar matice IV

Říkáme, že matice $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ je v ***Jordanově kanonickém tvaru***, zkráceně JKT, má-li blokově diagonální tvar

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1), \dots, \boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)\big),$$

kde $\boldsymbol{J}_{n_i}(\lambda_i)$ jsou Jordanovy buňky rozměrů $n_i \times n_i$, příslušející skalárům $\lambda_i \in K$.

Jordanův kanonický tvar matice IV

Říkáme, že matice $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ je v ***Jordanově kanonickém tvaru***, zkráceně JKT, má-li blokově diagonální tvar

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1), \ldots, \boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)\big),}$$

kde $\boldsymbol{J}_{n_i}(\lambda_i)$ jsou Jordanovy buňky rozměrů $n_i \times n_i$, příslušející skalárům $\lambda_i \in K$.

Zřejmě v takovém případě je $n_1 + \ldots + n_k = n$ a $\boldsymbol{A}$ má charakteristický polynom

$$\boxed{\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \ldots (\lambda_k - x)^{n_k}.}$$

Vidíme, že skalár $\lambda \in K$ je **vlastní hodnotou matice $\boldsymbol{A}$** právě tehdy, když se nachází v seznamu $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Jordanův kanonický tvar matice V

Protože $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ nemusí být nutně různé, ***algebraická*** násobnost λ vzhledem k $\boldsymbol{A}$ je ***součet velikostí bloků*** s hodnotou λ na diagonále, tj.

$$\boxed{\sum_{\lambda_i = \lambda} n_i.}$$

Jordanův kanonický tvar matice V

Protože $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ nemusí být nutně různé, ***algebraická*** násobnost λ vzhledem k $\boldsymbol{A}$ je ***součet velikostí bloků*** s hodnotou λ na diagonále, tj.

$$\boxed{\sum_{\lambda_i=\lambda} n_i.}$$

Bloku $\boldsymbol{J}_{n_i}(\lambda_i)$, bez ohledu na velikost n_i, odpovídá pouze jednorozměrný vlastní podprostor — proto je ***geometrická násobnost*** λ vzhledem k $\boldsymbol{A}$ rovna ***počtu takových bloků***, t.j. počtu prvků množiny

$$\boxed{\{i \leq k;\ \lambda_i = \lambda\}.}$$

Jordanův kanonický tvar matice VI

S Jordanovými buňkami úzce souvisí pojem ***řetězce operátoru*** $\varphi\colon V \to V$ ***pro vlastní číslo*** λ.

Jde o k-tici nenulových vektorů $\boldsymbol{\beta} = \big(\boldsymbol{u}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_1\big)$ takových, že

$$\begin{array}{rcl} (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)(\boldsymbol{u}_1) & = & 0 \\ (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)(\boldsymbol{u}_2) & = & \boldsymbol{u}_1 \\ & \vdots & \\ (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)(\boldsymbol{u}_k) & = & \boldsymbol{u}_{k-1} \end{array}$$

tj. podle schématu

$$\varphi - \lambda \mathrm{id}_V \colon \boldsymbol{u}_k \mapsto \boldsymbol{u}_{k-1} \mapsto \ldots \mapsto \boldsymbol{u}_2 \mapsto \boldsymbol{u}_1 \mapsto 0.$$

Jordanův kanonický tvar matice VII

$$\varphi - \lambda \mathrm{id}_V : \boldsymbol{u}_k \mapsto \boldsymbol{u}_{k-1} \mapsto \ldots \mapsto \boldsymbol{u}_2 \mapsto \boldsymbol{u}_1 \mapsto 0.$$

Jordanův kanonický tvar matice VII

$$\varphi - \lambda \mathrm{id}_V \colon \boldsymbol{u}_k \mapsto \boldsymbol{u}_{k-1} \mapsto \ldots \mapsto \boldsymbol{u}_2 \mapsto \boldsymbol{u}_1 \mapsto 0.$$

Potom první vektor $\boldsymbol{u}_1$ řetězce $\boldsymbol{\beta}$ (v našem schématu první nenulový vektor zprava) je ***vlastním vektorem operátoru*** φ příslušným vlastní hodnotě λ. Celý řetězec je pak tvořen postupnými obrazy posledního vektoru $\boldsymbol{u}_k$ (v našem schématu prvního vektoru zleva) v zobrazení $\varphi - \lambda \mathrm{id}_V$, tj.

$$\boldsymbol{\beta} = \Big(\boldsymbol{u}_k, (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)(\boldsymbol{u}_k), \ldots, (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{k-1}(\boldsymbol{u}_k)\Big).$$

Jordanův kanonický tvar matice VIII

Vektory řetězce generují invariantní podprostor

$$U = [\boldsymbol{u}_k, \dots, \boldsymbol{u}_1].$$

Totiž,

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{u}_1) &= \lambda \boldsymbol{u}_1 \in U \\
\varphi(\boldsymbol{u}_2) &= \boldsymbol{u}_1 + \lambda \boldsymbol{u}_2 \in U \\
\varphi(\boldsymbol{u}_3) &= \boldsymbol{u}_2 + \lambda \boldsymbol{u}_3 \in U \\
&\vdots \\
\varphi(\boldsymbol{u}_k) &= \boldsymbol{u}_{k-1} + \lambda \boldsymbol{u}_k \in U.
\end{aligned}$$

Tedy $\varphi(U) \subseteq U$. Navíc vektory $\boldsymbol{u}_k, \dots, \boldsymbol{u}_1$ jsou lineárně nezávislé (indukcí podle k).

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice I

Příklad

Uvažujme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Její charakteristický polynom

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2$$

má dva kořeny $x_{1,2} = 1$ a $x_{3,4} = -1$, oba dvojnásobné. Najdeme k nim příslušné vlastní vektory.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice II

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem $\boldsymbol{v}_1 = (2, -1, 1, 1)^T$. Algebraicky dvojnásobné vlastní číslo 1 má tedy geometrickou násobnost 1.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice II

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem $\boldsymbol{v}_1 = (2, -1, 1, 1)^T$. Algebraicky dvojnásobné vlastní číslo 1 má tedy geometrickou násobnost 1.

Další vektor řetězce najdeme jako nějaké řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2$ soustavy $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ úpravou její rozšířené matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

tedy např. $\boldsymbol{v}_2 = (2, -2, 1, 0)^T$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice III

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má dimenzi 2 (a taková je i geometrická násobnost algebraicky dvojnásobného vlastního čísla -1); jeho bázi tvoří vlastní vektory $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_4 = (1, 0, 0, 1)^T$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice III

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má dimenzi 2 (a taková je i geometrická násobnost algebraicky dvojnásobného vlastního čísla -1); jeho bázi tvoří vlastní vektory $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_4 = (1, 0, 0, 1)^T$.

$\boldsymbol{A}$ je tedy podobná matici v JKT

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_2(1), -1, -1\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice IV

Příslušná Jordanova báze $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ je tvořená sloupci matice přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice IV

Příslušná Jordanova báze $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ je tvořená sloupci matice přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na předchozím příkladě bylo vidět, že je poměrně snadné se vypořádat s řetězci vektorů, příslušnými různým vlastním číslům. Nyní se soustředíme na hledání řetězců příslušných jedinému vlastnímu číslu — budeme se zabývat maticemi s jednoprvkovým spektrem.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice V

Příklad

Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = -x^3$$

a jediné, algebraicky trojnásobné vlastní číslo $x_{1,2,3} = 0$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice V

Příklad

Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = -x^3$$

a jediné, algebraicky trojnásobné vlastní číslo $x_{1,2,3} = 0$.

Vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice VI

Podprostor řešení je jednorozměrný, generovaný vektorem $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)^T$, geometrická násobnost vlastního čísla 0 je tedy 1.

Hledaná báze je tedy tvořena jediným řetězcem příslušným vlastnímu vektoru $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}$.

Vektor $\boldsymbol{u}_2$ najdeme jako nějaké řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_2$ soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1$ úpravou její rozšířené matice

$$(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{u}_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

takže můžeme položit např. $\boldsymbol{u}_2 = (-1, -1, 0)^T$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice VII

Podobně, třetí vektor $\boldsymbol{u}_3$ našeho řetězce najdeme jako nějaké řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_3$ soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_2$ úpravou její rozšířené matice

$$(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{u}_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

tedy např. $\boldsymbol{u}_3 = (0, -1, 0)^T$.

To znamená, že $\boldsymbol{A}$ je podobná přímo s Jordanovou buňkou

$$\boldsymbol{J}_3 = \boldsymbol{J}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prostřednictvím matice přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$