17. JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

7. května 2020

Abstrakt

V této kapitole si ukážeme, že i nediagonalizovatelné lineární operátory či matice můžeme volbou vhodné báze upravit na tzv. ***Jordanův kanonický tvar***, který je – alespoň na pohledd – velmi blízký diagonálnímu tvaru.

Obsah přednášky I

- Jordanův kanonický tvar matice

Obsah přednášky I

- Jordanův kanonický tvar matice
- Příklady na Jordanův kanonický tvar matice

Jordanův kanonický tvar matice I

Motivace 1: **Existují lineární operátory, které nelze diagonalizovat, tj. nelze je ve vhodné bázi psát jako**

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Jordanův kanonický tvar matice I

Motivace 1: **Existují lineární operátory, které nelze diagonalizovat, tj. nelze je ve vhodné bázi psát jako**

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Uvažme matici
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené předpisem $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$. Vlastní čísla jsou kořeny determinantu $det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2$.

Vlastní číslo 2 je algebraické násobnosti 2, ale geometrické násobnosti 1. Totiž, prostor řešení homogenního systému rovnic $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má dimenzi jedna.

Jordanův kanonický tvar matice II

Řešení homogenního systému rovnic $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je pak tvaru $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tedy neexistuje báze α taková, že by v ní bylo $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, tj. matice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ není podobná žádné diagonální matici, neplatí tedy

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{P}$$

pro **žádnou regulární matici** $\boldsymbol{P}$.

Cílem je najít pro obecný operátor φ **bázi** α tak, aby matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ byla co nejjednodušší. Hledaný tvar se nazývá **Jordanův kanonický tvar.**

Jordanův kanonický tvar matice III - Opakování

Označme $\boldsymbol{J}_n \in K^{n \times n}$ čtvercovou matici řádu n, jejíž prvky na místech $(i, i+1)$ jsou rovné 1 pro $1 \le i \le n-1$ a všechny ostatní prvky jsou rovné 0. Zřejmě $h(\boldsymbol{J}_n) = n - 1$. Dále položme

$$\boldsymbol{J}_n(\lambda) = \lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{J}_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pro $\lambda \in K$. Tedy $\boldsymbol{J}_n(\lambda)$ je tvořená diagonálou z n lambd, vedlejší diagonálou vpravo od ní z $n-1$ jednotek a zbytek jsou nuly.

Jordanův kanonický tvar matice III - Opakování

Označme $\boldsymbol{J}_n \in K^{n \times n}$ čtvercovou matici řádu n, jejíž prvky na místech $(i, i+1)$ jsou rovné 1 pro $1 \leq i \leq n-1$ a všechny ostatní prvky jsou rovné 0. Zřejmě $h(\boldsymbol{J}_n) = n - 1$. Dále položme

$$\boldsymbol{J}_n(\lambda) = \lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{J}_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pro $\lambda \in K$. Tedy $\boldsymbol{J}_n(\lambda)$ je tvořená diagonálou z n lambd, vedlejší diagonálou vpravo od ní z $n-1$ jednotek a zbytek jsou nuly.

Každá matice tvaru $\boldsymbol{J}_n(\lambda)$ sa nazývá ***Jordanova buňka*** řádu n. Zřejmě i $\boldsymbol{J}_n = \boldsymbol{J}_n(0)$ je Jordanova buňka.

Jordanův kanonický tvar matice IV

Říkáme, že matice $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ je v ***Jordanově kanonickém tvaru***, zkráceně JKT, má-li blokově diagonální tvar

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1), \ldots, \boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)\big),}$$

kde $\boldsymbol{J}_{n_i}(\lambda_i)$ jsou Jordanovy buňky rozměrů $n_i \times n_i$, příslušející skalárům $\lambda_i \in K$.

Jordanův kanonický tvar matice IV

Říkáme, že matice $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ je v ***Jordanově kanonickém tvaru***, zkráceně JKT, má-li blokově diagonální tvar

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1), \ldots, \boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)\big),}$$

kde $\boldsymbol{J}_{n_i}(\lambda_i)$ jsou Jordanovy buňky rozměrů $n_i \times n_i$, příslušející skalárům $\lambda_i \in K$.

Zřejmě v takovém případě je $n_1 + \ldots + n_k = n$ a $\boldsymbol{A}$ má charakteristický polynom

$$\boxed{\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \ldots (\lambda_k - x)^{n_k}.}$$

Vidíme, že skalár $\lambda \in K$ je **vlastní hodnotou matice** $\boldsymbol{A}$ právě tehdy, když se nachází v seznamu $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Jordanův kanonický tvar matice V

Protože $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ nemusí být nutně různé, ***algebraická*** násobnost λ vzhledem k $\boldsymbol{A}$ je ***součet velikostí bloků*** s hodnotou λ na diagonále, tj.

$$\boxed{\sum_{\lambda_i = \lambda} n_i.}$$

Jordanův kanonický tvar matice V

Protože $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ nemusí být nutně různé, ***algebraická*** násobnost λ vzhledem k $\boldsymbol{A}$ je ***součet velikostí bloků*** s hodnotou λ na diagonále, tj.

$$\boxed{\sum_{\lambda_i = \lambda} n_i.}$$

Bloku $\boldsymbol{J}_{n_i}(\lambda_i)$, bez ohledu na velikost n_i, odpovídá pouze jednorozměrný vlastní podprostor — proto je ***geometrická násobnost*** λ vzhledem k $\boldsymbol{A}$ rovna ***počtu takových bloků***, t.j. počtu prvků množiny

$$\boxed{\{i \le k;\ \lambda_i = \lambda\}.}$$

Jordanův kanonický tvar matice VI

S Jordanovými buňkami úzce souvisí pojem ***řetězce operátoru*** $\varphi\colon V \to V$ ***pro vlastní číslo*** λ.

Jde o k-tici nenulových vektorů $\boldsymbol{\beta} = \big(\boldsymbol{u}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_1\big)$ takových, že

$$\begin{array}{rcl} (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)(\boldsymbol{u}_1) & = & \mathbf{0} \\ (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)(\boldsymbol{u}_2) & = & \boldsymbol{u}_1 \\ & \vdots & \\ (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)(\boldsymbol{u}_k) & = & \boldsymbol{u}_{k-1} \end{array}$$

tj. podle schématu

$$\varphi - \lambda \mathrm{id}_V \colon \boldsymbol{u}_k \mapsto \boldsymbol{u}_{k-1} \mapsto \ldots \mapsto \boldsymbol{u}_2 \mapsto \boldsymbol{u}_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

Jordanův kanonický tvar matice VII

$$\varphi - \lambda \mathrm{id}_V \colon \boldsymbol{u}_k \mapsto \boldsymbol{u}_{k-1} \mapsto \ldots \mapsto \boldsymbol{u}_2 \mapsto \boldsymbol{u}_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

Jordanův kanonický tvar matice VII

$$\varphi - \lambda \mathrm{id}_V\colon \boldsymbol{u}_k \mapsto \boldsymbol{u}_{k-1} \mapsto \ldots \mapsto \boldsymbol{u}_2 \mapsto \boldsymbol{u}_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

Potom první vektor $\boldsymbol{u}_1$ řetězce $\boldsymbol{\beta}$ (v našem schématu první nenulový vektor zprava) je ***vlastním vektorem operátoru*** φ příslušným vlastní hodnotě λ. Celý řetězec je pak tvořen postupnými obrazy posledního vektoru $\boldsymbol{u}_k$ (v našem schématu prvního vektoru zleva) v zobrazení $\varphi - \lambda \mathrm{id}_V$, tj.

$$\boldsymbol{\beta} = \Big(\boldsymbol{u}_k, (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)(\boldsymbol{u}_k), \ldots, (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{k-1}(\boldsymbol{u}_k)\Big).$$

Jordanův kanonický tvar matice VIII

Vektory řetězce generují invariantní podprostor

$$U = [\boldsymbol{u}_k, \dots, \boldsymbol{u}_1].$$

Totiž,

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{u}_1) &= \lambda \boldsymbol{u}_1 \in U \\
\varphi(\boldsymbol{u}_2) &= \boldsymbol{u}_1 + \lambda \boldsymbol{u}_2 \in U \\
\varphi(\boldsymbol{u}_3) &= \boldsymbol{u}_2 + \lambda \boldsymbol{u}_3 \in U \\
&\vdots \\
\varphi(\boldsymbol{u}_k) &= \boldsymbol{u}_{k-1} + \lambda \boldsymbol{u}_k \in U.
\end{aligned}$$

Tedy $\varphi(U) \subseteq U$. Navíc vektory $\boldsymbol{u}_k, \dots, \boldsymbol{u}_1$ jsou lineárně nezávislé (indukcí podle k).

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice I

Příklad

Uvažujme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Její charakteristický polynom

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2$$

má dva kořeny $x_{1,2} = 1$ a $x_{3,4} = -1$, oba dvojnásobné. Najdeme k nim příslušné vlastní vektory.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice II

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem $\boldsymbol{v}_1 = (2, -1, 1, 1)^T$. Algebraicky dvojnásobné vlastní číslo 1 má tedy geometrickou násobnost 1.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice II

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem $\boldsymbol{v}_1=(2,-1,1,1)^T$. Algebraicky dvojnásobné vlastní číslo 1 má tedy geometrickou násobnost 1.

Další vektor řetězce najdeme jako nějaké řešení $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}_2$ soustavy $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}_1$ úpravou její rozšířené matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

tedy např. $\boldsymbol{v}_2=(2,-2,1,0)^T$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice III

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & -2\\ 1 & 4 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 3 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

má dimenzi 2 (a taková je i geometrická násobnost algebraicky dvojnásobného vlastního čísla -1); jeho bázi tvoří vlastní vektory $\boldsymbol{v}_3=(1,0,-1,0)^T$, $\boldsymbol{v}_4=(1,0,0,1)^T$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice III

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}2&0&2&-2\\1&4&1&-1\\1&0&1&-1\\3&4&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

má dimenzi 2 (a taková je i geometrická násobnost algebraicky dvojnásobného vlastního čísla -1); jeho bázi tvoří vlastní vektory $\boldsymbol{v}_3=(1,0,-1,0)^T$, $\boldsymbol{v}_4=(1,0,0,1)^T$.

$\boldsymbol{A}$ je tedy podobná matici v JKT

$$\boldsymbol{J}=\operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_2(1),-1,-1\big)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice IV

Příslušná Jordanova báze $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ je tvořená sloupci matice přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice IV

Příslušná Jordanova báze $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ je tvořená sloupci matice přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na předchozím příkladě bylo vidět, že je poměrně snadné se vypořádat s řetězci vektorů, příslušnými různým vlastním číslům. Nyní se soustředíme na hledání řetězců příslušných jedinému vlastnímu číslu — budeme se zabývat maticemi s jednoprvkovým spektrem.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice V

Příklad

Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = -x^3$$

a jediné, algebraicky trojnásobné vlastní číslo $x_{1,2,3} = 0$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice V

Příklad

Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = -x^3$$

a jediné, algebraicky trojnásobné vlastní číslo $x_{1,2,3} = 0$.

Vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice VI

Podprostor řešení je jednorozměrný, generovaný vektorem $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)^T$, geometrická násobnost vlastního čísla 0 je tedy 1.

Hledaná báze je tedy tvořena jediným řetězcem příslušným vlastnímu vektoru $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}$.

Vektor $\boldsymbol{u}_2$ najdeme jako nějaké řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_2$ soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1$ úpravou její rozšířené matice

$$(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{u}_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

takže můžeme položit např. $\boldsymbol{u}_2 = (-1, -1, 0)^T$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice VII

Podobně, třetí vektor $\boldsymbol{u}_3$ našeho řetězce najdeme jako nějaké řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_3$ soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_2$ úpravou její rozšířené matice

$$(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{u}_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

tedy např. $\boldsymbol{u}_3 = (0, -1, 0)^T$.
To znamená, že $\boldsymbol{A}$ je podobná přímo s Jordanovou buňkou

$$\boldsymbol{J}_3 = \boldsymbol{J}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prostřednictvím matice přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice VIII

Příklad

Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = 27 - 27x + 9x^2 - x^3 = (3 - x)^3$$

a algebraicky trojnásobné vlastní číslo $x_{1,2,3} = 3$.
K němu příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice IX

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory $\boldsymbol{u} = (2, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)^T$.

Geometrická násobnost vlastního čísla 3 je tedy 2, takže k němu příslušejí dva řetězce délek 1 a 2. Nyní ale dopředu nevíme, ke kterému vlastnímu vektoru $\boldsymbol{v}_1 \in [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ existuje vektor $\boldsymbol{v}_2$ tak, že $\boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{v}_2$, musíme uvažovat libovolnou lineární kombinaci $\boldsymbol{v}_1 = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = (2a + b, -a, b)^T$, kde parametry $a, b \in \mathbb{R}$ budeme volit tak, aby soustava $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ měla nějaké řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2$.

Úpravou její rozšířené matice dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -5 & 2a+b \\ -2 & -4 & 2 & -a \\ 1 & 2 & -1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má řešení právě tehdy, když $a = 2b$; volíme např. $b = 1$, $a = 2$. Tomu odpovídá $\boldsymbol{v}_1 = (5, -2, 1)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, 0)^T$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice X

Za $\boldsymbol{v}_3$ lze zvolit libovolný vektor, který spolu s $\boldsymbol{v}_1$ tvoří bázi vlastního podprostoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}) = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$; vidíme, že vyhovují obě volby $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}$, resp. $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}$. Vyberme si např. druhou možnost $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, 1)^T$.

JKT matice $\boldsymbol{A}$ je tedy

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_2(3), 3\big) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a příslušná matice přechodu tvořená sloupci Jordanovy báze $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ je např.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice XI

Příklad

Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -19 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 20 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x-2)^4$$

a algebraicky čtyřnásobné vlastní číslo $x_{1,2,3,4} = 2$.
K němu příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -19 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 20 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice XII

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory $\boldsymbol{u} = (1, -1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{v} = (4, 0, -1, -5)^T$.

Geometrická násobnost vlastního čísla 3 je tedy 2, takže k němu příslušejí dva řetězce délek buď 1 a 3 nebo 2 a 2. Nyní ale dopředu nevíme, ke kterému vlastnímu vektoru $\boldsymbol{v}_1 \in [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ existuje vektor $\boldsymbol{v}_2$ tak, že $\boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{v}_2$, musíme uvažovat libovolnou lineární kombináci $\boldsymbol{v}_1 = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = (a + 4b, -a, -b, -5b)^T$, kde parametry $a, b \in \mathbb{R}$ budeme volit tak, aby soustava $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ měla nějaké řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2$. Řešíme tedy následující systém

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & -6 & -19 & -1 & a + 4b \\ 2 & 2 & 3 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 4 & 0 & -b \\ 5 & 5 & 20 & 0 & -5b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4/5 & -4a/5 + 3b/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & a/5 - 2b/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice XIII

Tato soustava má řešení pro libovolná a, b. Můžeme pak zvolit $a = 1$, $b = 0$. Tomu zodpovídá první řetězec $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u} = (1, -1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{u}_2 = (-4/5, 0, 1/5, 0)^T$.

Podobně pro volbu $a = 0$, $b = 1$ dostaneme druhý řetězec $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} = (4, 0, -1, -5)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (3/5, 0, -2/5, 0)^T$.

JKT $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_2(2), \boldsymbol{J}_2(2)\big)$ matice $\boldsymbol{A}$ a příslušná Jordanova báze $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ jsou

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 & 4 & 3/5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1 & -2/5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice XIV

Příklad

Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = x^4$$

a algebraicky čtyřnásobné vlastní číslo $x_{1,2,3,4} = 0$.
K němu příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice XV

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory $\boldsymbol{u} = (1, 0, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0, -1)^T$.

Geometrická násobnost vlastního čísla 3 je tedy 2, takže k němu příslušejí dva řetězce délek buď 1 a 3 nebo 2 a 2. Nyní ale dopředu nevíme, ke kterému vlastnímu vektoru $\boldsymbol{v}_1 \in [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ existuje vektor $\boldsymbol{v}_2$ tak, že $\boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{v}_2$, musíme uvažovat libovolnou lineární kombináci $\boldsymbol{v}_1 = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = (a + b, 0, -a, -b)^T$, kde parametry $a, b \in \mathbb{R}$ budeme volit tak, aby soustava $(\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ měla nějaké řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2$. Řešíme tedy následující systém

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & a+b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -a \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2a-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice XVI

Tato soustava má řešení právě tehdy, když $2a + b = 0$. Budeme tedy mít dva řetězce délek 1 a 3.
Můžeme pak zvolit $a = -1$, $b = 2$. Tomu zodpovídá první vektor řetězce délky 3, a to $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} = (1, 0, 1, -2)^T$. Druhý vektor řetězce délky 3 zatím ponecháme v obecném tvaru $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x} = (c + d, 1, -c, -d)^T$ řešení soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ a parametry $c, d \in \mathbb{R}$ budeme volit tak, aby existovalo nějaké řešení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_3$ soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_2$.

Úpravou její rozšířené matice obdržíme

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 & c+d \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -c \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & -2c-d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+2c+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice XVII

Tato soustava má řešení právě tehdy, když $1 + 2c + d = 0$. Zvolme tedy $c = 0$, $d = -1$. Této volbě odpovídá vektor $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 1, 0, 1)^T$ a dále například vektor $\boldsymbol{v}_3 = (1, -1, 0, 0)^T$.

Jediný vektor druhého řetězce zvolíme tak, aby spolu s vektorem $\boldsymbol{v}_1$ tvořily bázi vlastního podprostoru $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$; vyhovuje každý z vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Zvolme např. $\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u} = (1, 0, -1, 0)^T$.
JKT $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_3(0), \boldsymbol{J}_1(0)\big)$ matice $\boldsymbol{A}$ a příslušná Jordanova báze $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ jsou

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice I

Klíčové výsledky celé kapitoly lze shrnout do následujících dvou vět.

Věta

Nechť $\varphi\colon V \to V$ *je lineární operátor na vektorovém prostoru* V *konečné dimenze* n *nad* K*. Má-li* φ *nad* K *spektrum algebraické váhy* n*, pak existuje báze* $\boldsymbol{\beta}$ *prostoru* V*, vzhledem na kterou má* φ *matici* $(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}}$ *v Jordanově kanonickém tvaru. Přitom Jordanův kanonický tvar matice zobrazení* φ *je určený jednoznačně až na pořadí Jordanových bloků.*

Věta

Nechť matice $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ *má nad* K *spektrum algebraické váhy* n*. Potom* $\boldsymbol{A}$ *je podobná s maticí* $\boldsymbol{J} \in K^{n\times n}$ *v Jordanově kanonickém tvaru. Přitom matice* $\boldsymbol{J}$ *je určená jednoznačně až na pořadí Jordanových bloků.*

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice II

Důsledek

Nechť matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ mají nad K spektrum plné algebraické váhy n. Potom $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ právě tehdy, když $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ mají týž Jordanův kanonický tvar.

Předpoklad o plné algebraické váze spektra je automaticky splněn nad tzv. algebraicky uzavřenými tělesy (např. $\mathbb{C}$).

Obě uvedené věty jsou zřejmě ekvivalentní, proto stačí dokázat jen jednu z nich. Důkaz je ale poměrně náročný, budeme před vlastním důkazem potřebovat připomenout pár pojmů a dokázat pomocná tvrzení.

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice III

Lemma (Wildonovo lemma)

Nechť $\mathbb{V}$ je n-rozměrný vektorový prostor a $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ je lineární zobrazení $\mathbb{V}$ do sebe tak, že $T^s = \boldsymbol{0}$ pro některé přirozené číslo s. Pak existují vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ a přirozená čísla $a_1, \ldots, a_k$ tak, že

$$T^{a_i}(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{0} \text{ pro } i = 1, \ldots, k,$$

a vektory

$$\boldsymbol{u}_1, T(\boldsymbol{u}_1), \ldots, T^{a_1-1}(\boldsymbol{u}_1), \ldots, \boldsymbol{u}_k, T(\boldsymbol{u}_k), \ldots, T^{a_k-1}(\boldsymbol{u}_k)$$

jsou nenulové vektory, které tvoří bázi $\mathbb{V}$.

Důkaz se provede indukcí vzhledem k dimenzi $dim\,\mathbb{V}$.

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice III

Příklad (Aplikace Wildonova lemmatu)

Nechť $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ a $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, 0, 0)$. Pak $Im(T) = [(1, 0, 0)]$ a $T(Im(T)) = \{\mathbf{0}\}$. Tedy $T^2 = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ a $s = 2$.

Zároveň jádro $Ker(T) = [(1, 0, 0), (0, 1, -1)]$. Vidíme tedy, že stačí zvolit $\boldsymbol{u}_1 = (0, 1, -1)$, $a_1 = 1$ a $\boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 0)$, $a_2 = 2$. Pak $T(\boldsymbol{u}_2) = (1, 0, 0)$.

Odtud $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, T(\boldsymbol{u}_2)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice IV

Definice

Říkáme, že vektorový prostor $\mathbb{V}$ je přímým součtem svých podprostorů $\mathbb{V}_1, \ldots, \mathbb{V}_m$, pokud pro každý vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ existuje jediná posloupnost vektorů $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ taková, že $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{V}_i$ pro $i = 1, \ldots, m$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_m$. V takovém případě píšeme $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_m$.

Jedinečnost v definici znamená, že pro každé dva různé indexy i, j musí být $\mathbb{V}_i \cap \mathbb{V}_j = \{\mathbf{0}\}$.

Lemma

Nechť $\varphi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ je lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ konečné dimenze n nad K. Má-li φ nad K spektrum algebraické váhy n a jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru φ, pak existují přirozená čísla $s_1, \ldots, s_r$ tak, že

$$\mathbb{V} = Ker(\varphi - \lambda_1)^{s_1} \oplus \cdots \oplus Ker(\varphi - \lambda_r)^{s_r}.$$

a každý sčítanec je invariantní vzhledem k φ.

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice V

Důkaz lemmatu - základní body

Bod 1 Vybereme nejprve libovolné z vlastních čísel operátoru φ a označíme jej λ.

Bod 2 Položme

$$t = min\{i \in \mathbb{N} \mid Ker(\varphi - \lambda id_{\mathbb{V}})^i = Ker(\varphi - \lambda id_{\mathbb{V}})^{i+1}\}.$$

Bod 3 Dokážeme

$$Ker(\varphi - \lambda id_{\mathbb{V}})^t \cap Im(\varphi - \lambda id_{\mathbb{V}})^t = \{\mathbf{0}\}.$$

Bod 4 Dokážeme

$$Ker(\varphi - \lambda id_{\mathbb{V}})^t \oplus Im(\varphi - \lambda id_{\mathbb{V}})^t = \mathbb{V}.$$

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice VI

Bod 5 Dokážeme invariantnost podprostorů

$$Ker(\varphi - \lambda id_{\mathbb{V}})^t \text{ a } Im(\varphi - \lambda id_{\mathbb{V}})^t = \mathbb{V}.$$

Bod 6 Použijeme indukční předpoklad na zúžení operátoru φ na podprostor $Im(\varphi - \lambda id_{\mathbb{V}})^t$:

$$Im(\varphi - \lambda id_{\mathbb{V}})^t = Ker(\varphi - \lambda_2)^{s_2} \oplus \cdots \oplus Ker(\varphi - \lambda_r)^{s_r}.$$

pro $\lambda = \lambda_1$ a dokážeme tedy z Bodu 4

$$\mathbb{V} = Ker(\varphi - \lambda_1)^{s_1} \oplus Ker(\varphi - \lambda_2)^{s_2} \oplus \cdots \oplus Ker(\varphi - \lambda_r)^{s_r}.$$

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice VII

Důkaz Věty o existenci Jordanova kanonického tvaru matice - základní body

Bod 1 Z předcházejícího lemmatu víme, že existují přirozená čísla $s_1, \dots, s_r$ tak, že

$$\boxed{\mathbb{V} = Ker(\varphi - \lambda_1)^{s_1} \oplus \cdots \oplus Ker(\varphi - \lambda_r)^{s_r},}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ jsou všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru φ a každý sčítanec je invariantní vzhledem k φ.

Bod 2 Potřebnou bázi α prostoru $\mathbb{V}$ obdržíme zřetězením jednotlivých bazí $\alpha(\lambda_1), \dots, \alpha(\lambda_r)$ tzv. **kořenových podprostorů**

$$\boxed{Ker(\varphi - \lambda_1)^{s_1}, \dots, Ker(\varphi - \lambda_r)^{s_r}.}$$

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice VIII

Bod 3 Příslušná matice zobrazení $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ má pak tvar

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{\lambda_1} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{\lambda_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \boldsymbol{J}_{\lambda_{r-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{\lambda_r} \end{pmatrix}.$$

Přitom $\boldsymbol{J}_{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{J}_{\lambda_r}$ jsou čtvercové matice tak, že $\boldsymbol{J}_{\lambda_i}$ je matice restrikce operátoru φ na podprostor $Ker(\varphi - \lambda_i\, id_{\mathbb{V}})^{s_i}$ vzhledem ke zvolené bázi $\alpha(\lambda_i)$.

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice IX

Bod 4 Nechť $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Protože báze $\alpha(\lambda)$ byla sestrojena pomocí Wildonova lemmatu, nutně každá matice $\boldsymbol{J}_\lambda$ je tvaru

$$\boldsymbol{J}_\lambda = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{a_1}(\lambda) & \mathbf{0} & \ldots & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{a_2}(\lambda) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \boldsymbol{J}_{\lambda_{r-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ldots & \ldots & \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{a_k}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Přitom $\boldsymbol{J}_{a_i}(\lambda)$ je Jordanova buňka tak, že

$$\boldsymbol{J}_{a_i}(\lambda) = (\varphi)_{\alpha(\lambda)_i, \alpha(\lambda)_i}.$$

Platí $\alpha(\lambda)_i = (T^{a_i-1}(u_i), T^{a_i-2}(u_i), \ldots, T(u_i), u_i)$ je báze invariantního podprostoru U_i vzhledem k φ a $T = \varphi - \lambda\, id_{\mathbb{V}}$.

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice X

Bod 5 Ověření jednoznačnosti (až na pořadí) JKT

(a) Stačí se omezit na podprostory $\mathbb{U}$ tvaru $Ker(\varphi - \lambda\, id_{\mathbb{V}})^t$. Položme tedy $T = \varphi - \lambda\, id_{\mathbb{U}}$.

(b) Buď β celkový počet Jordanových buněk operátoru φ zúženého na $\mathbb{U}$, tj. počet všech řetězců. Dále buď $\beta(l)$ celkový počet Jordanových buněk typu $l \times l$ operátoru φ zúženého na $\mathbb{U}$, tj. počet všech řetězců délky k.

(c) Protože každý řetězec končí právě vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu λ a tyto vlastní vektory jsou lineárně nezávislé, máme

$$\boxed{dim\, Ker(T) = \beta.}$$

(d) Dále se dimenze $dim\, Ker(T^2)$ liší od dimenze $dim\, Ker(T)$ o počet bloků $\beta - \beta(1)$. Tedy

$$\boxed{dim\, Ker(T^2) = dim\, Ker(T) + \beta - \beta(1).}$$

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice XI

Bod 5 Ověření jednoznačnosti (až na pořadí) JKT

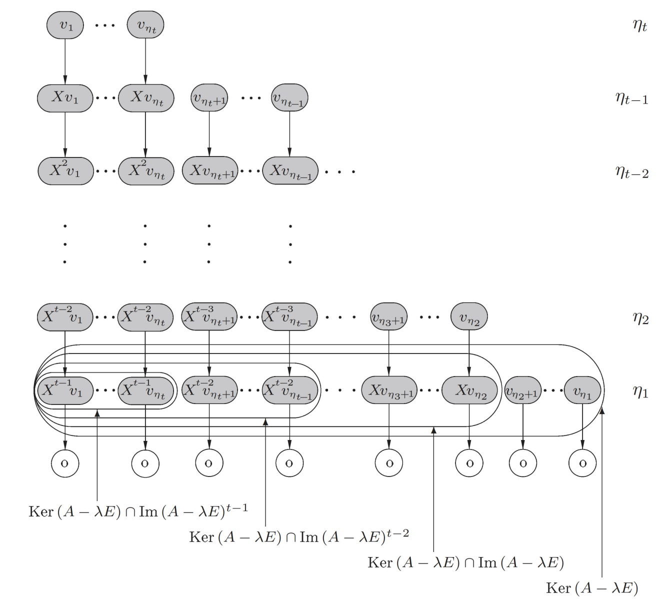
(e) Celkem tedy

$$\begin{aligned} dim\,Ker(T) &= \beta, \\ dim\,Ker(T^2) &= dim\,Ker(T) + \beta - \beta(1), \\ &\vdots \\ dim\,Ker(T^{l+1}) &= dim\,Ker(T^l) + \beta - \beta(1) - \ldots - \beta(l). \end{aligned}$$

(f) Indukcí lehce ověříme, že každé $\beta(l)$ je jednoznačně určeno pouze operátorem T, tj. φ. Jsou tedy počet bloků a jejich rozměry jednoznačně určeny.

Uvědomme si, že součet délek řetězců je roven dimenzi příslušného kořenového podprostoru (pomocí Wildonova lemmatu).

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice XII



Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice XIII

$${}_{t-1}\mathcal{B} = \{(A-\lambda E)^{t-1}v_1^T,\ (A-\lambda E)^{t-1}v_2^T,\ \dots,\ (A-\lambda E)^{t-1}v_{\eta_t}^T\}$$

${}_{t-2}\mathcal{B} = {}_{t-1}\mathcal{B} \cup {}_{t-2}C$, kde

$${}_{t-2}C = \left\{(A-\lambda E)^{t-2}v_{\eta_t+1}^T,\ (A-\lambda E)^{t-2}v_{\eta_t+2}^T,\ \dots,\ (A-\lambda E)^{t-2}v_{\eta_{t-1}}^T\right\},$$

${}_{t-3}\mathcal{B} = {}_{t-2}\mathcal{B} \cup {}_{t-3}C$, kde

$${}_{t-3}C = \left\{(A-\lambda E)^{t-3}v_{\eta_{t-1}+1}^T,\ (A-\lambda E)^{t-3}v_{\eta_{t-1}+2}^T,\ \dots,\ (A-\lambda E)^{t-3}v_{\eta_{t-2}}^T\right\},$$

....

${}_{1}\mathcal{B} = {}_{2}\mathcal{B} \cup {}_{1}C$, kde

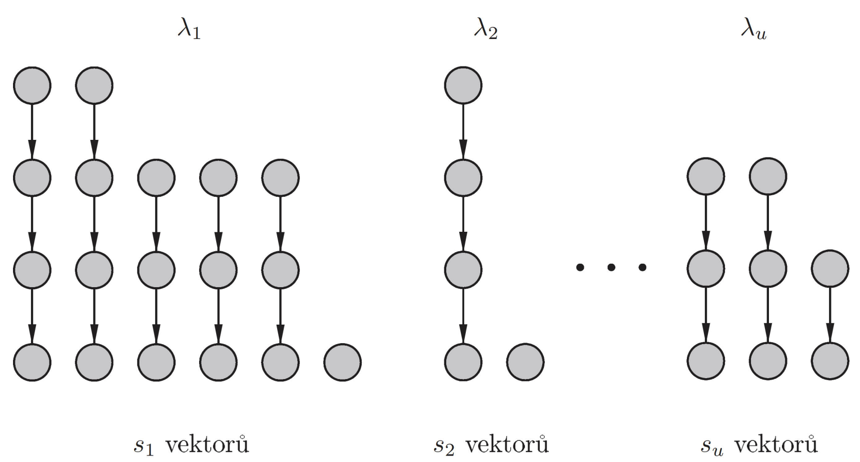
$${}_{1}C = \{(A-\lambda E)v_{\eta_3+1}^T,\ (A-\lambda E)v_{\eta_3+2}^T,\ \dots\ (A-\lambda E)v_{\eta_2}^T\},$$

${}_{0}\mathcal{B} = {}_{1}\mathcal{B} \cup {}_{0}C$, kde ${}_{0}C = \{v_{\eta_2+1}^T,\ v_{\eta_2+2}^T,\ \dots,\ v_{\eta_1}^T\}.$

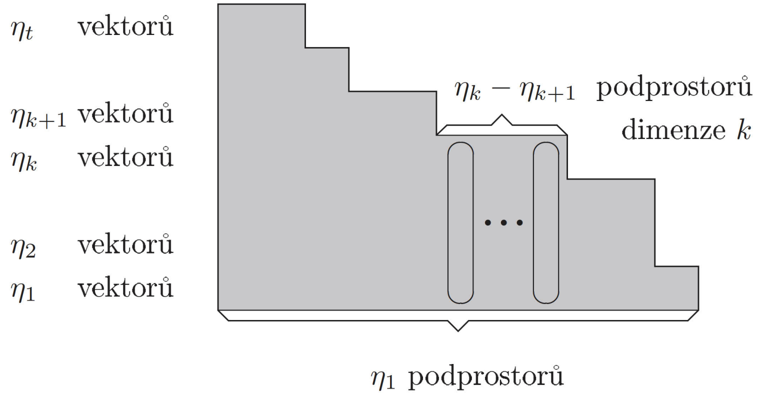
Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice XIV

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{B}} = \{&(A-\lambda E)^{t-1}v_1^T;\ (A-\lambda E)^{t-2}v_1^T;\ \dots;\ (A-\lambda E)v_1^T;\ v_1^T;\ \dots;\\
&(A-\lambda E)^{t-1}v_{\eta_t}^T;\ (A-\lambda E)^{t-2}v_{\eta_t}^T;\ \dots;\ (A-\lambda E)v_{\eta_t}^T;\ v_{\eta_t}^T;\\
&(A-\lambda E)^{t-2}v_{\eta_t+1}^T;\ (A-\lambda E)^{t-3}v_{\eta_t+1}^T;\ \dots;\ (A-\lambda E)v_{\eta_t+1}^T,\ v_{\eta_t+1}^T;\ \dots;\\
&(A-\lambda E)^{t-2}v_{\eta_{t-1}}^T;\ (A-\lambda E)^{t-3}v_{\eta_{t-1}}^T;\ \dots;\ (A-\lambda E)v_{\eta_{t-1}}^T,\ v_{\eta_{t-1}}^T;\ \dots;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(A-\lambda E)v_{\eta_3+1}^T;\ v_{\eta_3+1}^T;\ \dots;\\
&(A-\lambda E)v_{\eta_2}^T;\ v_{\eta_2}^T;\\
&v_{\eta_2+1}^T;\ \dots;\\
&v_{\eta_1}^T\}.
\end{aligned}$$

Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice XV



Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice XVI



Popis postupu úprav matic na JKT matice zleva doprava I

Předpokládáme, že matice $\boldsymbol{A}$ typu $n \times n$ má plné spektrum nad K.

(1) Pro každé $\lambda \in \mathit{Spec}\,\boldsymbol{A}$ vypočítáme mocniny matice $\boldsymbol{A}_\lambda = \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$ a každou z nich upravíme na redukovaný stupňovitý tvar. Dostáváme tak posloupnost dvojic matic

$$\boldsymbol{A}_\lambda \sim \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_\lambda^2 \sim \boldsymbol{B}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_\lambda^t \sim \boldsymbol{B}_t, \boldsymbol{A}_\lambda^{t+1} \sim \boldsymbol{B}_{t+1},$$

kterou ukončíme pro první t takové, že $t = t_\lambda$ a $\boldsymbol{B}_t = \boldsymbol{B}_{t+1}$ (což může nasta i když $\boldsymbol{A}_\lambda^t = \boldsymbol{A}_\lambda^{t+1}$). Potom podprostor

$$\mathit{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^t = \mathcal{R}(\boldsymbol{A}_\lambda^t) = \mathcal{R}(\boldsymbol{B}_t)$$

řešení homogenní soustavy

$$\boldsymbol{A}_\lambda^t \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

je kořenový podprostor matice $\boldsymbol{A}$ příslušející vlastnímu číslu λ. V případě jednobodového spektra platí $\boldsymbol{A}_\lambda^t = \boldsymbol{0}$.

Popis postupu úprav matic na JKT matice zleva doprava II

Máme tedy požadovaný rozklad

$$\boxed{K^n = Ker(\varphi - \lambda_1)^{s_1} \oplus \cdots \oplus Ker(\varphi - \lambda_r)^{s_r},}$$

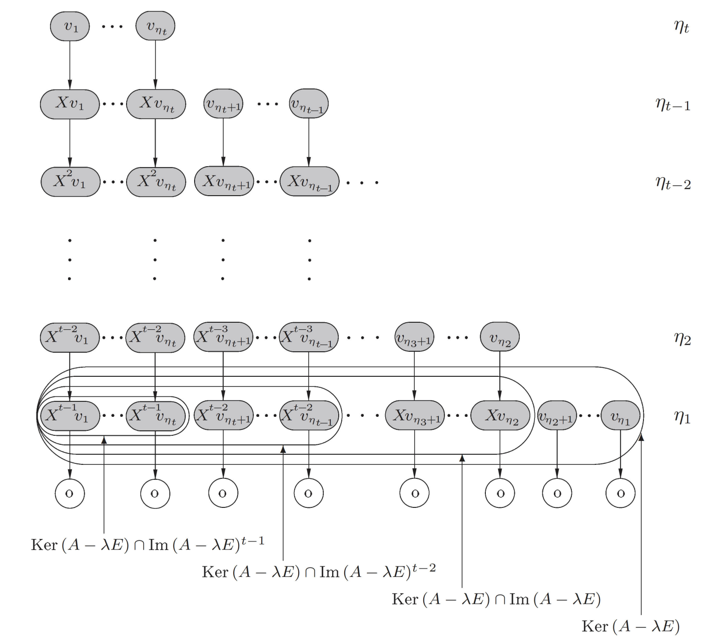
$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jsou všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru $\varphi = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ a každý sčítanec je invariantní vzhledem k φ. Nyní se omezíme na pevně zvolené vlastní číslo λ.

(2) Na základě každé z matic $\boldsymbol{B}_p$, $1 \leq p \leq t$ najdeme bázi podprostoru řešení homogenní soustavy

$$\boxed{\boldsymbol{A}_\lambda^p \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}},$$

kterou zapíšeme jako sloupce matice $\boldsymbol{C}_p$.

Popis postupu úprav matic na JKT matice zleva doprava III



Popis postupu úprav matic na JKT matice zleva doprava IV

(3) Ze sloupců matice $\boldsymbol{C}_t$ vybereme vektory

$$\boxed{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{\eta_t}},$$

tak, aby doplnily bázi podprostoru $Ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^{t-1}$ do báze podprostoru $Ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^{t}$, tj. sloupce matice $\boldsymbol{C}_{t-1}$ rozšíříme o vhodné sloupce matice $\boldsymbol{C}_t$.

(4) Když už máme zkonstruováno prvních k řádků našeho schématu, přičemž k-tý řádek bude obsahovat vektory $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^{k-1}(\boldsymbol{v}_1)$, $\ldots$, $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^{k-1}(\boldsymbol{v}_{\eta_t})$, $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^{k-2}(\boldsymbol{v}_{\eta_t+1})$, $\ldots$, $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^{k-2}(\boldsymbol{v}_{\eta_{t-1}})$, $\ldots$, $\boldsymbol{v}_{\eta_{t+2-k}+1}$, $\ldots$, $\boldsymbol{v}_{\eta_{t+1-k}}$, pak $k+1$-ní řádek získáme z k-tého řádku následovně.

Popis postupu úprav matic na JKT matice zleva doprava V

(4) Nový $k+1$-ní řádek bude obsahovat vektory

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^k(\boldsymbol{v}_1),\ldots,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^k(\boldsymbol{v}_{\eta_t}),(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}(\boldsymbol{v}_{\eta_t+1}),\\ \ldots,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}(\boldsymbol{v}_{\eta_{t-1}}),\ldots,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})(\boldsymbol{v}_{\eta_{t+2-k}+1}),\ldots,\\ (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})(\boldsymbol{v}_{\eta_{t+1-k}}),\boldsymbol{v}_{\eta_{t+1-k}+1},\ldots,\boldsymbol{v}_{\eta_{t-k}},$$

přičemž vektory $\boldsymbol{v}_{\eta_{t+1-k}+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\eta_{t-k}}$ získáme tak, aby doplnily bázi podprostoru $Ker(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{t-k}$ rozšířenou o vektory

$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^k(\boldsymbol{v}_1), \ldots, (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^k(\boldsymbol{v}_{\eta_t}), (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}(\boldsymbol{v}_{\eta_t+1}), \ldots,$
$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}(\boldsymbol{v}_{\eta_{t-1}}), \ldots, (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})(\boldsymbol{v}_{\eta_{t+2-k}+1}), \ldots,$
$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})(\boldsymbol{v}_{\eta_{t+1-k}})$

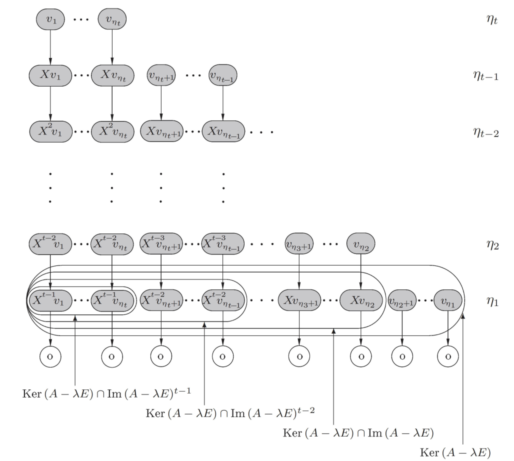
do báze podprostoru $Ker(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{t+1-k}$, tj. sloupce matice $\boldsymbol{C}_{t-k}$ společně s vektory

$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^k(\boldsymbol{v}_1), \ldots, (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^k(\boldsymbol{v}_{\eta_t}), (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}(\boldsymbol{v}_{\eta_t+1}), \ldots,$
$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}(\boldsymbol{v}_{\eta_{t-1}}), \ldots, (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})(\boldsymbol{v}_{\eta_{t+2-k}+1}), \ldots,$
$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})(\boldsymbol{v}_{\eta_{t+1-k}})$

rozšíříme o vhodné sloupce matice $\boldsymbol{C}_{t+1-k}$.

Popis postupu úprav matic na JKT matice zleva doprava V

(4) Pak už ze znalosti řetězců poskládáme blokově diagonálně JKT, přičemý si musíme uvědomit, že příslušná báze začíná posledním vektorem příslušného řetězce, tj. začínáme vlastním vektorem z posledního řádku našeho schématu.



Příklady úprav matic na JKT matice zleva doprava XVIII

Příklad

Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = x^4$$

a algebraicky čtyřnásobné vlastní číslo $x_{1,2,3,4} = 0$.
K němu příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice XIX

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory $\boldsymbol{u} = (1, 0, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0, -1)^T$. Maticově zapsáno to je

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -0 & -1 \end{pmatrix}$$

Druhá mocnina je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podprostor řešení je třírozměrný, generovaný (například) vektory $\boldsymbol{u} = (1, 0, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{w} = (0, -1, 0, 0)^T$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice XX

Maticově zapsáno to je

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Třetí mocnina je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podprostor řešení je čtyřrozměrný tj. celé $\mathbb{R}^4$, generovaný (například) vektory $\boldsymbol{u} = (1, 0, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{w} = (0, -1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{z} = (1, 0, 0, 0)^T$.

Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar matice X

Protože máme dva lineárně nezávislé vlastní vektory budeme mít dva řetězce. Delší bude mít délku 3 (protože $(\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I})^3 = \boldsymbol{0}$), kratší pak délku 1. Začneme s vektorem $\boldsymbol{z} = (1, 0, 0, 0)^T$, který doplnil sloupce matice $\boldsymbol{C}_2$ na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$. Tedy klademe $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{z} = (1, 0, 0, 0)^T$. Pak nutně $\boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I})\boldsymbol{z} = (0, 1, 1, -1)^T$ a dále $\boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, 1, -2)^T$.

Jediný vektor druhého řetězce zvolíme tak, aby spolu s vektorem $\boldsymbol{v}_1$ tvořily bázi vlastního podprostoru $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$; vyhovuje každý z vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Zvolme např. $\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u} = (1, 0, -1, 0)^T$.
JKT $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_3(0), \boldsymbol{J}_1(0)\big)$ matice $\boldsymbol{A}$ a příslušná Jordanova báze $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ jsou

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$