# 16. SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY A JEJICH VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

23. dubna 2020

# Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem. Zavedeme pojem ***adjungovaného zobrazení a samoadjungovaného lineárního operátoru*** a podíváme se na jeho diagonalizovatelnost.

# Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem. Zavedeme pojem ***adjungovaného zobrazení a samoadjungovaného lineárního operátoru*** a podíváme se na jeho diagonalizovatelnost.

V celé této kapitole bude $V$ buď reálný nebo komplexní vektorový prostor, tj. pole skalárů je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

# Obsah přednášky I

- Samoadjungované operátory
  - Adjungované zobrazení a samoadjungované operátory.
  - Vlastní vektory a vlastní čísla samoadjungovaných operátorů.
  - Věta o spektrálním rozkladu a její důsledky.

# Obsah přednášky I

- Samoadjungované operátory
  - Adjungované zobrazení a samoadjungované operátory.
  - Vlastní vektory a vlastní čísla samoadjungovaných operátorů.
  - Věta o spektrálním rozkladu a její důsledky.
- Rozklady matic
  - Singulární rozklad matic.
  - Pseudoinverzní matice.

# Samoadjungované operátory I

Motivace 1: **Vlastní vektory a vlastní čísla symetrické matice**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A-\lambda E| &= (1-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= (\lambda - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0 \end{aligned}$$

# Samoadjungované operátory I

Motivace 1: **Vlastní vektory a vlastní čísla symetrické matice**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A-\lambda E| &= (1-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= (\lambda - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0 \end{aligned}$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Pro tato vlastní čísla nalezneme vlastní vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$.

$$(1 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})x_1 - x_2 = 0, (1 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})y_1 - y_2 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 = (1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})^T, \mathbf{v}_2 = (1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^T$$

Tyto vektory jsou na sebe **navzájem kolmé**.

# Samoadjungované operátory II

Tedy k symetrické matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

existuje ortogonální báze tvořená vlastními vektory.

**Toto není náhoda.**

# Samoadjungované operátory II

Tedy k symetrické matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

existuje ortogonální báze tvořená vlastními vektory.
**Toto není náhoda.**

Motivace 2: **Kolmá projekce**
Buď $U$ vektorový prostor se skalárním součinem, $V$ jeho konečně rozměrný vektorový podprostor a $P_V : U \to U$ kolmá projekce na podprostor $V$. Ukážeme, že platí

$$\boxed{\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U : \langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, P_V(\mathbf{v}) \rangle}$$

$$\langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle \quad = \quad \langle \underbrace{P_V(\mathbf{u})}_{\in V}, \underbrace{(\mathbf{v} - P_V(\mathbf{v}))}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_V(\mathbf{v})}_{\in V} \rangle = \langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v}) \rangle$$

# Samoadjungované operátory III

$$\langle \mathbf{u}, P_V(\mathbf{v})\rangle = \langle \underbrace{(\mathbf{u} - P_V(\mathbf{u}))}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_V(\mathbf{u})}_{\in V}, \underbrace{P_V(\mathbf{v})}_{\in V}\rangle = \langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v})\rangle$$

Pak říkáme, že $P_V$ je samoadjungované zobrazení.

# Samoadjungované operátory III

$$\langle \mathbf{u}, P_V(\mathbf{v})\rangle = \langle \underbrace{(\mathbf{u} - P_V(\mathbf{u}))}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_V(\mathbf{u})}_{\in V}, \underbrace{P_V(\mathbf{v})}_{\in V}\rangle = \langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v})\rangle$$

Pak říkáme, že $P_V$ je samoadjungované zobrazení.

## Definice

Nechť $\varphi\colon U \to V$ je lineární zobrazení unitárních (euklidovských) prostorů. ***Adjungovaným zobrazením*** k $\varphi$ se nazývá lineární zobrazení $\varphi^* : V \to U$ takové, že pro všechny vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{v} \in V$ platí

$$\boxed{\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle_V = \langle \mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v})\rangle_U.}$$

# Samoadjungované operátory IV

## Příklad

Buď $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ lineární zobrazení, $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Hledáme adjungované zobrazení $\varphi^* : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ ve tvaru $\varphi^*(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$.

# Samoadjungované operátory IV

## Příklad

Buď $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ lineární zobrazení, $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Hledáme adjungované zobrazení $\varphi^* : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ ve tvaru $\varphi^*(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$.

Musí platit

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^k} &= \langle \mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y}) \rangle_{\mathbb{C}^n} \\
\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^k} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^n} \\
(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \overline{\mathbf{y}} &= \mathbf{x}^T \cdot \overline{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{y})} \\
\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \overline{\mathbf{y}} &= \mathbf{x}^T \cdot \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

Odtud $\boxed{B = \overline{\mathbf{A}}^T}$ je matice adjungovaného zobrazení $\varphi^*$ k $\varphi$.

# Samoadjungované operátory V - Souřadnicové zobrazení

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze v unitárním (euklidovském) prostoru $V$ dimenze $n$. Pak souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{C}^n$ ($(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{R}^n$) je unitární (ortogonální) zobrazení, tj.,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n} \quad (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{R}^n}).$$

Totiž, pro $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j$ máme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j \rangle_V = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_V \overline{d_j} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle_V \overline{d_i} = \sum_{i=1}^n c_i \overline{d_i} \\ &= (\mathbf{u})_\alpha^T \cdot \overline{(\mathbf{v})_\alpha} = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

Tedy i inverzní zobrazení $(-)_\alpha^{-1} \colon \mathbb{C}^n \to V$ ($(-)_\alpha \colon \mathbb{R}^n \to V$) je unitární (ortogonální) zobrazení.

# Samoadjungované operátory VI

**Věta**

*Nechť $\alpha$ je ortonormální báze v $V$, $\beta$ je ortonormální báze v $U$, $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení unitárních (euklidovských) prostorů, $A = (\varphi)_{\alpha,\beta}$. Potom k $\varphi$ existuje právě jedno adjungované zobrazení $\varphi^*$ a matice adjungovaného zobrazení $\varphi^* : V \to U$ má tvar*

$$(\varphi^*)_{\beta,\alpha} = \begin{cases} \overline{A}^T & \text{v unitárním případě,} \\ A^T & \text{v euklidovském případě.} \end{cases}$$

*Obráceně, je-li $\psi : V \to U$ lineární zobrazení a $(\psi)_{\beta,\alpha} = \overline{A}^T$, pak $\psi = \varphi^*$.*

# Samoadjungované operátory VII

## Definice

Lineární operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru $U$ se nazývá ***samoadjungované zobrazení***, jestliže pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_U = \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle_U$$

tj. pokud $\varphi^* = \varphi$.

## Věta

*Operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru $U$ je samoadjungovaný právě tehdy, když pro jeho matici v ortonormální bázi $\alpha$ platí*

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \mathbf{A} = \begin{cases} \overline{\mathbf{A}}^T & \textit{v unitárním případě,} \\ \mathbf{A}^T & \textit{v euklidovském případě.} \end{cases}$$

# Samoadjungované operátory VIII

Maticím $\mathbf{A}$, které splňují podmínku $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$ se nazývají ***hermitovské***. Dále budeme značit $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

# Samoadjungované operátory VIII

Maticím $\mathbf{A}$, které splňují podmínku $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$ se nazývají ***hermitovské***. Dále budeme značit $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Příkladem hermitovské matice je matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 & -5\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

# Samoadjungované operátory VIII

Maticím $\mathbf{A}$, které splňují podmínku $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$ se nazývají ***hermitovské***. Dále budeme značit $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Příkladem hermitovské matice je matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 & -5\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Podobně samoadjungované operátory na euklidovských prostorech (speciálně na $\mathbb{R}^n$) jsou určeny symetrickými maticemi.

# Samoadjungované operátory IX

## Příklad

Buď nyní $U$ konečně rozměrný vektorový prostor se skalárním součinem, $V$ jeho vektorový podprostor a $P_V\colon U \to U$ kolmá projekce na podprostor $V$. Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze $U$ a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je báze $V$. Pak matice kolmé projekce je

$$P_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{k} & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Samoadjungované operátory X

### Lemma

*Nechť lineární operátor* $\varphi : U \to U$ *na unitárním (euklidovském) prostoru* $U$ *je samoadjungovaný s invariantním podprostorem* $V$*. Pak* $V^{\perp}$ *je rovněž invariantní.*

# Samoadjungované operátory X

### Lemma

*Nechť lineární operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru $U$ je samoadjungovaný s invariantním podprostorem $V$. Pak $V^\perp$ je rovněž invariantní.*

### Věta

*Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor na unitárním (euklidovském) prostoru $U$. Pak platí:*

1. *Vlastní čísla zobrazení $\varphi$ jsou reálná.*
2. *Vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.*

# Samoadjungované operátory XI

## Věta

**O spektrálním rozkladu.** *Pro každý samoadjungovaný operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru $U$ existuje ortonormální báze $\alpha$ prostoru $U$ tvořená vlastními vektory, v níž má $\varphi$ diagonální matici s reálnými vlastními čísly na diagonále.*

# Samoadjungované operátory XI

## Věta

**O spektrálním rozkladu.** *Pro každý samoadjungovaný operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru $U$ existuje ortonormální báze $\alpha$ prostoru $U$ tvořená vlastními vektory, v níž má $\varphi$ diagonální matici s reálnými vlastními čísly na diagonále.*

## Důsledek

*Buď $\varphi : U \to U$ lineární operátor na unitárním (euklidovském) prostoru $U$. Pak $\varphi$ je samoadjungovaný operátor právě tehdy, když*

$$\boxed{\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k,}$$

*$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru $\varphi$ a $P_1, \dots, P_k$ jsou kolmé projekce do navzájem kolmých vlastních podprostorů $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i \mathrm{id}_U)$, $i = 1, \dots, k$.*

# Samoadjungované operátory XII

## Důsledek

*Pro každou reálnou symetrickou matici* $\mathbf{A}$ *existuje ortogonální matice* $\mathbf{P}$ *tak, že matice*

$$\boxed{\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}$$

*je diagonální.*

# Samoadjungované operátory XII

## Důsledek

*Pro každou reálnou symetrickou matici* $\mathbf{A}$ *existuje ortogonální matice* $\mathbf{P}$ *tak, že matice*

$$\boxed{\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}$$

*je diagonální.*

## Důsledek

*Každá kvadratická forma na euklidovském prostoru* $U$ *dimenze* $n$ *má ve vhodné ortonormální bázi analytický tvar*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 .$$

# Singulární rozklad matice I

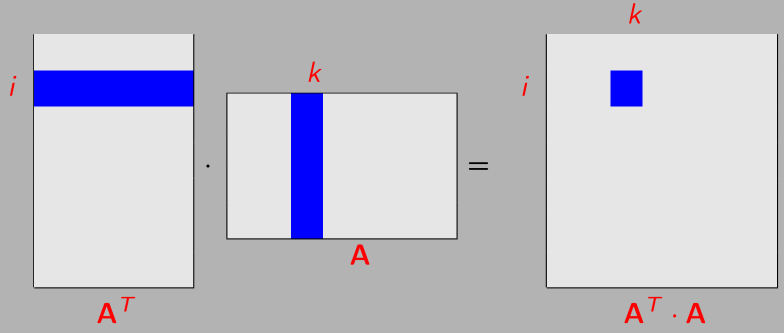
## Příklad

Je-li $\mathbf{A}$ reálná matice typu $m \times n$, pak matice

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$$

je reálná symetrická matice typu $n \times n$.
Snadno pak ověříme následující rovnost

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}.$$



# Singulární rozklad matice II

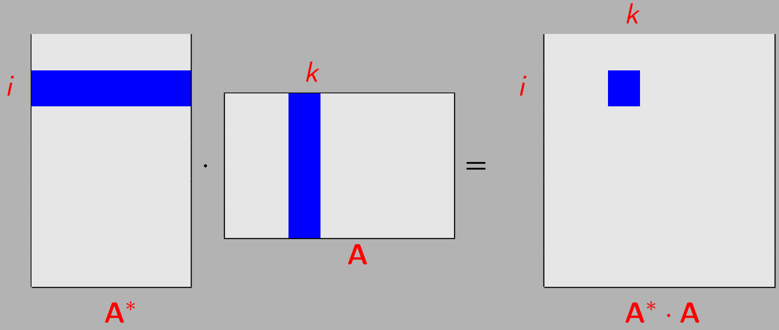
## Příklad

Je-li $\mathbf{A}$ komplexní matice typu $m \times n$, pak matice

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}$$

je komplexní hermitovská matice typu $n \times n$.
Snadno pak ověříme následující rovnost

$$(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^* = \mathbf{A}^* \cdot (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}.$$



# Singulární rozklad matice III

## Lemma

*Nechť* $\varphi\colon U \to V$ *je lineární zobrazení mezi prostory se skalárním součinem. Pak* $\varphi^* \circ \varphi\colon U \to U$ *(a* $\varphi \circ \varphi^*\colon V \to V$*) jsou samoadjungované, pozitivně semidefinitní, tj.*

$$\boxed{\forall \mathbf{u} \in U : \langle (\varphi^* \circ \varphi)(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle \geq 0.}$$

*Speciálně, všechna vlastní čísla jsou nezáporná a platí*

$$\boxed{Ker(\varphi^* \circ \varphi) = Ker(\varphi).}$$

# Singulární rozklad matice IV

## Věta

*Nechť* $\mathbf{A} \in Mat_{k\times n}$, *kde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Pak existují unitární (případně ortogonální nad* $\mathbb{R}$*) matice* $\mathbf{P}$ *typu* $k \times k$ *a* $\mathbf{Q}$ *typu* $n \times n$ *takové, že*

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

*kde*

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{s_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}^{n} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_r & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{s_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}_{r} \quad \underbrace{\hphantom{0 \quad \dots \quad 0}}_{n-r} \end{array}$$

*a čísla* $s_1, s_2, \dots, s_r$ *jsou druhé odmocniny kladných vlastních čísel hermitovské matice* $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$.

# Pseudoinverzní matice I

**Motivace č. 1:** Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Platí

$$K^n = Ker(\varphi) \oplus Ker(\varphi)^\perp, K^k = Im(\varphi) \oplus Im(\varphi)^\perp,$$

$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp \colon\; Ker(\varphi)^\perp \to Im(\varphi).$$

# Pseudoinverzní matice I

<u>**Motivace č. 1:**</u> Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Platí

$$K^n = Ker(\varphi) \oplus Ker(\varphi)^{\perp}, K^k = Im(\varphi) \oplus Im(\varphi)^{\perp},$$
$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^{\perp}\colon\ Ker(\varphi)^{\perp} \to Im(\varphi).$$

Lineární zobrazení $\varphi \restriction Ker(\varphi)^{\perp}$ je prosté (jeho jádro je triviální) a na $(Im(\varphi) = Im(\varphi \restriction Ker(\varphi)^{\perp})$ z důvodu stejné dimenze). Tedy k $\varphi \restriction Ker(\varphi)^{\perp}$ existuje inverze.

# Pseudoinverzní matice I

<u>**Motivace č. 1:**</u> Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Platí

$$K^n = Ker(\varphi) \oplus Ker(\varphi)^\perp, K^k = Im(\varphi) \oplus Im(\varphi)^\perp,$$
$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp\colon\ Ker(\varphi)^\perp \to Im(\varphi).$$

Lineární zobrazení $\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp$ je prosté (jeho jádro je triviální) a na ($Im(\varphi) = Im(\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp)$ z důvodu stejné dimenze). Tedy k $\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp$ existuje inverze.

Má-li být $\mathbf{B}$ pseudoinverzní matice k $\mathbf{A}$, položme $\psi(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$. Pak $\psi\colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$ a určitě by kompozice

$$\psi \circ \varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp\colon\ Ker(\varphi)^\perp \to Ker(\varphi)^\perp$$

měla být identita na $Ker(\varphi)^\perp$.

# Pseudoinverzní matice II

Tedy lineární zobrazení $\psi \circ \varphi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ by mělo být kolmou projekcí na podprostor $Ker(\varphi)^\perp$.

# Pseudoinverzní matice II

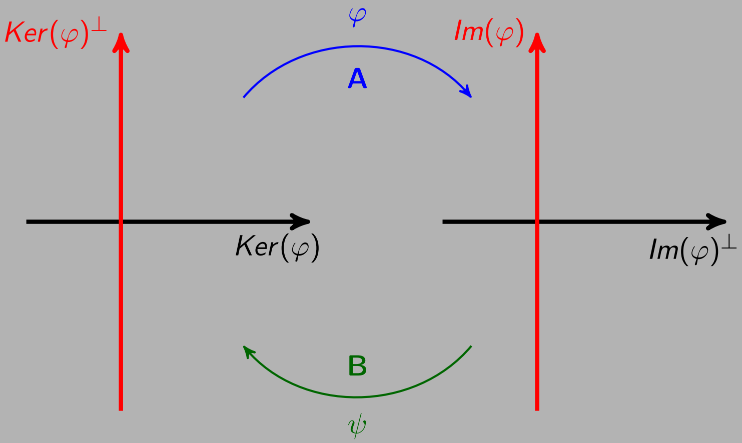
Tedy lineární zobrazení $\psi \circ \varphi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ by mělo být kolmou projekcí na podprostor $Ker(\varphi)^\perp$.

Podobně by lineární zobrazení $\varphi \circ \psi \colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k$ mělo být identita na podprostoru $Im(\varphi)$, tj. kompozice

$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp \circ \psi \colon \; Im(\varphi) \to Im(\varphi)$$

by měla být identita na $Im(\varphi)$.
Tedy lineární zobrazení $\varphi \circ \psi \colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k$ by mělo být kolmou projekcí na podprostor $Im(\varphi)$.

# Pseudoinverzní matice III



# Pseudoinverzní matice IV

__Motivace č. 2:__ Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$, která je invertibilní. Pro její singulární rozklad platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,$$

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{s_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}^{n} \\ \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix} \end{array}, s_i > 0$$

# Pseudoinverzní matice IV

**<u>Motivace č. 2:</u>** Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$, která je invertibilní. Pro její singulární rozklad platí

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \begin{array}{c} \overbrace{\phantom{s_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}^{n} \\ \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix} \end{array}, s_i > 0}$$

Pak pro inverzní matici k $\mathbf{A}$ platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*)^{-1} = (\mathbf{Q}^*)^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{Q}^*)^*\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^* \\ &= \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^*. \end{aligned}$$

# Pseudoinverzní matice V

### Definice

Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $k \times n$ se singulárním rozkladem

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,n-r} \end{array} \right) \cdot \mathbf{Q}^*, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_r \end{pmatrix}, s_i > 0$$

Potom se matice

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{Q} \cdot \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,n-r} \end{array} \right) \cdot \mathbf{P}^*}$$

typu $n \times k$ nazývá ***pseudoinverzní matice*** k matici $\mathbf{A}$.

# Pseudoinverzní matice VI - Základní vlastnosti

(1) Je-li $\mathbf{A}$ invertibilní, je $\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{A}^{-1}$.

(2) $\left(\mathbf{A}^{(-1)}\right)^{(-1)} = \mathbf{A}$.

(3) $\mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)}$ jsou samoadjungované matice.

(4) Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Dále položme $\varphi^{(-1)}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^k$ a definujme tak lineární zobrazení $\varphi^{(-1)}\colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$. Pak kompozice $\varphi^{(-1)} \circ \varphi$ tvaru

$$(\varphi^{(-1)} \circ \varphi)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

je **kolmá projekce** $\mathbb{K}^n$ do podprostoru $(Ker(\varphi))^{\perp}$ (viz Motivace 1) a kompozice $\varphi \circ \varphi^{(-1)}$ tvaru

$$(\varphi \circ \varphi^{(-1)})(\mathbf{y}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{y}$$

je **kolmá projekce** $\mathbb{K}^k$ do podprostoru $Im(\varphi)$.

# Pseudoinverzní matice VII - Základní vlastnosti

(5) $\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A},}$ $\boxed{\mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{A}^{(-1)}.}$

(6) **Důležitá pro počítání:**

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{(-1)} \cdot \mathbf{A}^*.}$$

(7) **Důsledek (6) a (1):** Existuje-li k matici $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ typu $n \times n$ inverzní matice, pak

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^*.}$$

Vlastnost (7) lze často použít při počítání, když $n \leq k$.

# Pseudoinverzní matice VIII

## Příklad

*Spočtěte* $\mathbf{A}^{(-1)}$ *k matici* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Platí:*

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \, \textit{det}\, \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = 6.$$

$$(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(-1)} &= (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$