13. SKALÁRNÍ SOUČIN NAD $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

3. března 2020

Abstrakt

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselnými tělesy $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Abstrakt

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselnými tělesy $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Ukazuje se, že celou základní geometrickou strukturu, včetně délek a úhlů, můžeme odvodit z jediné kladně definitní symetrické bilineární formy na reálném prostoru.

Obsah přednášky I

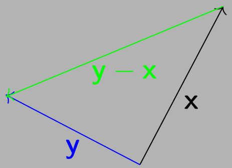
- Skalární součin
  - Skalární součin nad tělesem reálných čísel.
  - Skalární součin nad tělesem komplexních čísel.

Obsah přednášky I

- Skalární součin
  - Skalární součin nad tělesem reálných čísel.
  - Skalární součin nad tělesem komplexních čísel.
- Délka vektoru a úhel dvou vektorů
  - Gramova matice.
  - Cauchyho-Schwartzova nerovnost.
  - Úhel dvou vektorů.

Skalární součin I

Motivace: Uvažujme prostor $\mathbb{R}^2$. Jsou-li vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ na sebe kolmé, platí Pythagorova věta.

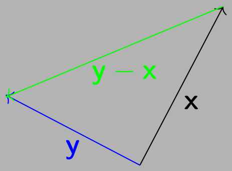


$$||\mathbf{y} - \mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$$

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$$

Skalární součin I

Motivace: Uvažujme prostor $\mathbb{R}^2$. Jsou-li vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ na sebe kolmé, platí Pythagorova věta.



$$||\mathbf{y} - \mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$$

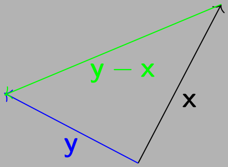
$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$$

Ekvivalentně,

$$y_1^2 - 2y_1x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2.$$

Skalární součin I

Motivace: Uvažujme prostor $\mathbb{R}^2$. Jsou-li vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ na sebe kolmé, platí Pythagorova věta.



$$||\mathbf{y} - \mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$$

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$$

Ekvivalentně,

$$y_1^2 - 2y_1x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2.$$

To je právě tehdy, když

$$-2y_1x_1 - 2y_2x_2 = 0 \text{ tj. } x_1y_1 + x_2y_2 = 0.$$

Platí-li Pythagorova věta, jsou na sebe vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ kolmé a $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$.

Skalární součin II

Výraz $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ měří, zda jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ na sebe kolmé. Nazýváme jej ***skalární součin***.

Skalární součin II

Výraz $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ měří, zda jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ na sebe kolmé. Nazýváme jej ***skalární součin***.

Jedná se o symetrickou bilineární formu, přičemž příslušná kvadratická forma je tvaru

$$x_1^2 + x_2^2$$

a je pozitivně definitní a měří velikost vektoru v druhé mocnině.

Skalární součin II

Výraz $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ měří, zda jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ na sebe kolmé. Nazýváme jej ***skalární součin***.

Jedná se o symetrickou bilineární formu, přičemž příslušná kvadratická forma je tvaru

$$x_1^2 + x_2^2$$

a je pozitivně definitní a měří velikost vektoru v druhé mocnině.

Definice

Skalárním nebo též ***vnitřním součinem*** na reálném vektorovém prostoru V rozumíme libovolnou pozitivně definitní, symetrickou bilineární formu na V. Hodnotu této formy na vektorech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ budeme značit $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Skalární součin III

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na V definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \text{ (aditivita)},$$

Skalární součin III

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na V definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(aditivita)},$$

$$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(homogenita)},$$

Skalární součin III

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na V definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(aditivita)},$$

$$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(homogenita)},$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad \text{(symetrie)},$$

Skalární součin III

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na V definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle && \text{(aditivita)}, \\
\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle && \text{(homogenita)}, \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle && \text{(symetrie)}, \\
\mathbf{x} \neq \mathbf{0} &\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 && \text{(kladná definitnost)}.
\end{aligned}
$$

Skalární součin III

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na V definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle && \text{(aditivita)},\\
\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle && \text{(homogenita)},\\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle && \text{(symetrie)},\\
\mathbf{x} \neq \mathbf{0} &\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 && \text{(kladná definitnost)}.
\end{aligned}$$

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu nám dává jeho linearitu jako funkci první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Skalární součin IV

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,\end{aligned}$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$.

Skalární součin IV

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2\rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2\rangle,\\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y}\rangle &= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle,\end{aligned}$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$.

Z (bi)linearity plyne podmínka kladné definitnosti

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0 \ \& \ \big(\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0}\big)$$

pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Skalární součin IV

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle,\\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,\end{aligned}$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$.

Z (bi)linearity plyne podmínka kladné definitnosti

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \ \& \ \big(\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0}\big)$$

pro každé $\mathbf{x} \in V$.

První část této podmínky nám umožňuje definovat ***normu*** neboli ***délku vektoru*** $\mathbf{x}$ rovností

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Skalární součin V

Výraz $\|\mathbf{x}\|^2$ budeme zatím chápat jen jako jiné označení pro kvadratickou formu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ indukovanou skalárním součinem.

Skalární součin V

Výraz $\|\mathbf{x}\|^2$ budeme zatím chápat jen jako jiné označení pro kvadratickou formu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ indukovanou skalárním součinem.

Definice

Euklidovským prostorem nazýváme libovolný ***konečně rozměrný*** reálný vektorový prostor se skalárním součinem.

Skalární součin V

Výraz $\|\mathbf{x}\|^2$ budeme zatím chápat jen jako jiné označení pro kvadratickou formu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ indukovanou skalárním součinem.

Definice

Euklidovským prostorem nazýváme libovolný ***konečně rozměrný*** reálný vektorový prostor se skalárním součinem.

Příklad

Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ *v rovině* $\mathbb{R}^2$ *a se skalárním součinem* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ *v prostoru* $\mathbb{R}^3$*.*

Skalární součin VI

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé n, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ je předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definovaný skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$.

Skalární součin VI

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé n, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ je předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definovaný skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$.

V případě řádkového prostoru $\mathbb{R}^n$ máme

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Skalární součin VII

Takovýto skalární součin budeme nazývat ***standardní skalární součin*** na $\mathbb{R}^n$. Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Skalární součin VII

Takovýto skalární součin budeme nazývat ***standardní skalární součin*** na $\mathbb{R}^n$. Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Délka vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Skalární součin VII

Takovýto skalární součin budeme nazývat ***standardní skalární součin*** na $\mathbb{R}^n$. Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Délka vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

V rámci analytické geometrie se pro nenulové vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ dokazuje známý vztah

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \alpha,$$

který spojuje standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ či v $\mathbb{R}^3$ s délkou příslušných vektorů a jimi sevřeným úhlem α.

Skalární součin VIII

Příklad

Nechť V označuje vektorový prostor $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ všech *spojitých* reálných funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, případně jeho libovolný lineární podprostor.

Skalární součin VIII

Příklad

Nechť V označuje vektorový prostor $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ všech *spojitých* reálných funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, případně jeho libovolný lineární podprostor.

Pro $f, g \in V$ položme

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Z komutativity násobení v $\mathbb{R}$ a aditivity a homogenity integrálu vyplýva, že $\langle f, g\rangle$ je symetrická bilineární forma na V.

Skalární součin VIII

Příklad

Nechť V označuje vektorový prostor $\mathcal{C}\langle a,b\rangle$ všech *spojitých* reálných funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, kde $a<b$ jsou reálná čísla, případně jeho libovolný lineární podprostor.

Pro $f,g\in V$ položme

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Z komutativity násobení v $\mathbb{R}$ a aditivity a homogenity integrálu vyplýva, že $\langle f,g\rangle$ je symetrická bilineární forma na V.

Pro ověření pozitivní definitnosti si stačí uvědomit, že pro $f\neq\mathbf{0}$ (t. j. f ne identicky rovné nule), je $f^2(x)\geq 0$ pro každé $x\in\langle a,b\rangle$. Ze spojitosti funkce f (a teda též f^2) vyplývá existence nějakého netriviálního uzavřeného podintervalu $\langle a_1,b_1\rangle\subseteq\langle a,b\rangle$ tak, že $f^2(x)>0$ pro všechna $x\in\langle a_1,b_1\rangle$.

Skalární součin IX

Protože f na $\langle a_1, b_1\rangle$ nabývá minimum, máme

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(\mathsf{x})\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} f^2(\mathsf{x})\mathrm{d}x \geq (b_1 - a_1) \min_{a_1 \leq x \leq b_1} f(x) > 0.$$

Teda předpisem $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ je definovaný skalární součin jak na $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ tak na jeho libovolném lineárním podprostoru, např. na prostorech polynomů $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{(n)}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, uvažovaných jako spojité funkce na $\langle a, b\rangle$.

Skalární součin IX

Protože f na $\langle a_1, b_1\rangle$ nabývá minimum, máme

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(\mathsf{x})\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} f^2(\mathsf{x})\mathrm{d}x \geq (b_1 - a_1) \min_{a_1 \leq x \leq b_1} f(x) > 0.$$

Teda předpisem $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ je definovaný skalární součin jak na $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ tak na jeho libovolném lineárním podprostoru, např. na prostorech polynomů $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{(n)}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, uvažovaných jako spojité funkce na $\langle a, b\rangle$.

V případě prostorů $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ nebo $\mathbb{R}[x]$ jde o skalární součin na *nekonečně rozměrných* vektorových prostorech.

Skalární součin IX

Protože f na $\langle a_1, b_1\rangle$ nabývá minimum, máme

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(\mathsf{x})\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} f^2(\mathsf{x})\mathrm{d}x \geq (b_1 - a_1) \min_{a_1 \leq x \leq b_1} f(x) > 0.$$

Teda předpisem $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ je definovaný skalární součin jak na $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ tak na jeho libovolném lineárním podprostoru, např. na prostorech polynomů $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{(n)}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, uvažovaných jako spojité funkce na $\langle a, b\rangle$.

V případě prostorů $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ nebo $\mathbb{R}[x]$ jde o skalární součin na *nekonečně rozměrných* vektorových prostorech.

Norma spojité funkce f $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ potom je

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Skalární součin X

Příklad

Nechť $V = \mathbb{R}^3$ *a*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 7x_3y_3.$$

Pak $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *je definitní (pomocí Sylvestrova kritéria) symetrická bilineární forma na* V*.*

Komplexní skalární součin I

Skalární nebo též ***vnitřní součin*** na komplexním vektorovém prostoru V budeme definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{C}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí komplexní číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \\ &\quad \text{(aditivita)}, \end{aligned}$$

Komplexní skalární součin I

Skalární nebo též ***vnitřní součin*** na komplexním vektorovém prostoru V budeme definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{C}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí komplexní číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \\ &\quad \text{(aditivita)}, \\ \langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ &\quad \text{(homogenita)}, \end{aligned}$$

Komplexní skalární součin I

Skalární nebo též ***vnitřní součin*** na komplexním vektorovém prostoru V budeme definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{C}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí komplexní číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{C}$ platí:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \\
&\quad \text{(aditivita)}, \\
\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\
&\quad \text{(homogenita)}, \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} \\
&\quad \text{(kosá symetrie)},
\end{aligned}
$$

Komplexní skalární součin I

Skalární nebo též ***vnitřní součin*** na komplexním vektorovém prostoru V budeme definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{C}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí komplexní číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{C}$ platí:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \\
&\quad \text{(aditivita)}, \\
\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\
&\quad \text{(homogenita)}, \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} \\
&\quad \text{(kosá symetrie)}, \\
\mathbf{x} \neq \mathbf{0} &\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \\
&\quad \text{(kladná definitnost)}.
\end{aligned}
$$

Komplexní skalární součin II

Komplexní vektorový prostor V se skalárním součinem nazýváme ***unitární prostor***.

Komplexní skalární součin II

Komplexní vektorový prostor V se skalárním součinem nazýváme ***unitární prostor***.

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu dává jeho linearitu jako funkce první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Komplexní skalární součin II

Komplexní vektorový prostor V se skalárním součinem nazýváme ***unitární prostor***.

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu dává jeho linearitu jako funkce první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Dík kosé symetrii z toho vyplývá antilinearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= \overline{c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c \in \mathbb{C}$.

Komplexní skalární součin II

Komplexní vektorový prostor V se skalárním součinem nazýváme ***unitární prostor***.

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu dává jeho linearitu jako funkce první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Dík kosé symetrii z toho vyplývá antilinearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= \overline{c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c \in \mathbb{C}$.

Z kosé symetrie vyplývá reálnost výrazu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ pro každé $\mathbf{x} \in V$, což dává smysl podmínce pozitivní definitnosti.

Komplexní skalární součin II

Komplexní vektorový prostor V se skalárním součinem nazýváme ***unitární prostor***.

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu dává jeho linearitu jako funkce první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Dík kosé symetrii z toho vyplývá antilinearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= \overline{c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c \in \mathbb{C}$.

Z kosé symetrie vyplývá reálnost výrazu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ pro každé $\mathbf{x} \in V$, což dává smysl podmínce pozitivní definitnosti.

Máme pak

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \ \& \ \big(\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0} \big)$$

pro každé $\mathbf{x} \in V$. Zejména platí $\langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

Komplexní skalární součin III

Příklad

Nechť $V = \mathbb{C}^n$. Pak pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ definujeme předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \overline{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

standardní skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{C}^n$.

Komplexní skalární součin III

Příklad

Nechť $V = \mathbb{C}^n$. Pak pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ definujeme předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \overline{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

standardní skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{C}^n$.

Většinu pojmů, které jsme definovali pre euklidovské prostory, můžeme zavést i pro (konečně rozměrné) unitární prostory a většinu výsledků o euklidovských prostorech můžeme s malými modifikacemi dokázat i pro (konečně rozměrné) unitární prostory.

Komplexní skalární součin IV

Protože $0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$, *délku* neboli též *normu vektoru* $\mathbf{x}$ v unitárním prostoru V můžeme definovat jako nezáporné reálné číslo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Komplexní skalární součin IV

Protože $0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$, *délku* neboli též *normu vektoru* $\mathbf{x}$ v unitárním prostoru V můžeme definovat jako nezáporné reálné číslo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Říkáme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou ***kolmé*** v unitárním prostoru V, pokud $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Komplexní skalární součin IV

Protože $0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$, *délku* neboli též *normu vektoru* $\mathbf{x}$ v unitárním prostoru V můžeme definovat jako nezáporné reálné číslo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Říkáme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou ***kolmé*** v unitárním prostoru V, pokud $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Příklad

Uvažme spojité funkce na intervalu $[a, b]$ s hodnotami v $\mathbb{C}$. Jedná se o komplexní vektorový prostor se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

Gramova matice I

Nechť $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je libovolná uspořádaná k-tice vektorů v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem.
Téměř všechny podstatné informace o těchto vektorech jsou ukryté v tzv. ***Gramově matici***

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \big(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle\big)_{k \times k}$$

vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Gramova matice I

Nechť $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je libovolná uspořádaná k-tice vektorů v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem.
Téměř všechny podstatné informace o těchto vektorech jsou ukryté v tzv. ***Gramově matici***

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \big(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle\big)_{k\times k}$$

vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Determinant Gramovy matice

$$\det \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \;=\; |\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle \end{vmatrix}$$

se nazývá *Gramovým determinantem* vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Gramova matice II

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou libovolné vektory v reálném vektorovém prostoru* V *se skalárním součinem. Potom*

(a) $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně semidefinitní symetrická matice;*

(b) *vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně definitní.*

Gramova matice II

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou libovolné vektory v reálném vektorovém prostoru* V *se skalárním součinem. Potom*

(a) $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně semidefinitní symetrická matice;*

(b) *vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně definitní.*

Důsledek

Pro libovolné $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ *platí* $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| \geq 0$. *Přitom* $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$ *právě tehdy, když vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně závislé.*

Gramova matice II

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *jsou libovolné vektory v reálném vektorovém prostoru* V *se skalárním součinem. Potom*

(a) $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně semidefinitní symetrická matice;*

(b) vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně definitní.*

Důsledek

Pro libovolné $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ *platí* $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)| \geq 0$. *Přitom* $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)| = 0$ *právě tehdy, když vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně závislé.*

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

Cauchyho-Schwartzova nerovnost I

Tím je dokázaná tzv. ***Cauchyho-Schwartzova nerovnost*** pro reálné vektorové prostory:

Věta

*(***Cauchyho-Schwartzova nerovnost***) Pro libovolné vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *v prostoru* V *nad* $\mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{C}$ *se skalárním součinem platí*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, ,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory **u**, **v** *jsou lineárně závislé.*

Cauchyho-Schwartzova nerovnost I

Tím je dokázaná tzv. ***Cauchyho-Schwartzova nerovnost*** pro reálné vektorové prostory:

Věta

*(***Cauchyho-Schwartzova nerovnost***) Pro libovolné vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *v prostoru* V *nad* $\mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{C}$ *se skalárním součinem platí*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, ,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou lineárně závislé.*

Pro skalární součin na $\mathbb{R}^n$ to znamená, že

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Cauchyho-Schwartzova nerovnost II

Pro skalární součin na $C[a,b]$ to znamená, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Cauchyho-Schwartzova nerovnost II

Pro skalární součin na $C[a,b]$ to znamená, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Z Cauchyho-Schwartzovy nerovnosti vyplývá, že pre libovolné *nenulové* vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Cauchyho-Schwartzova nerovnost II

Pro skalární součin na $C[a,b]$ to znamená, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Z Cauchyho-Schwartzovy nerovnosti vyplývá, že pre libovolné *nenulové* vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Proto existuje jediné reálné číslo α takové, že $0 \leq \alpha \leq \pi$ a

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Cauchyho-Schwartzova nerovnost III

Číslo α nazýváme ***úhlem*** nebo též ***odchylkou vektorů*** $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Cauchyho-Schwartzova nerovnost III

Číslo α nazýváme ***úhlem*** nebo též ***odchylkou vektorů*** $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Ze symetrie skalárního součinu vyplývá $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, to znamená, že se jedná o *neorientovaný úhel*.

Cauchyho-Schwartzova nerovnost III

Číslo α nazýváme ***úhlem*** nebo též ***odchylkou vektorů*** $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Ze symetrie skalárního součinu vyplývá $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, to znamená, že se jedná o *neorientovaný úhel*.

Při této definici úhlu dvou nenulových vektorů zůstáva vztah

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

platný pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, zachovaný v libovolném prostoru se skalárním součinem.

Cauchyho-Schwartzova nerovnost IV

Tvrzení

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí:

(a) *(***kosinová věta***)*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y});$$

(b) *(***Pythagorova věta***)*

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \;\Rightarrow\; \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2;$$

(c) *(***pravidlo rovnoběžníka***)*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big);$$

(d) *(***úhlopříčky kosoštvorce jsou na sebe kolmé***)*