# 13. SKALÁRNÍ SOUČIN NAD $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

20. března 2020

# Abstrakt

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselnými tělesy $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

# Abstrakt

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselnými tělesy $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Ukazuje se, že celou základní geometrickou strukturu, včetně délek a úhlů, můžeme odvodit z jediné kladně definitní symetrické bilineární formy na reálném prostoru.

# Obsah přednášky I

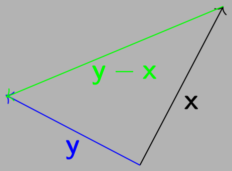
- Skalární součin
  - Skalární součin nad tělesem reálných čísel.
  - Skalární součin nad tělesem komplexních čísel.

# Obsah přednášky I

- Skalární součin
  - Skalární součin nad tělesem reálných čísel.
  - Skalární součin nad tělesem komplexních čísel.
- Délka vektoru a úhel dvou vektorů
  - Gramova matice.
  - Cauchyho-Schwartzova nerovnost.
  - Úhel dvou vektorů.
  - Délka vektoru.
- Ortogonální a ortonormální báze
  - Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces.
  - QR-rozklad.

# Skalární součin I

Motivace: Uvažujme prostor $\mathbb{R}^2$. Jsou-li vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ na sebe kolmé, platí Pythagorova věta.

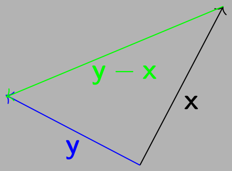



$$||\mathbf{y} - \mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$$

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$$

# Skalární součin I

Motivace: Uvažujme prostor $\mathbb{R}^2$. Jsou-li vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ na sebe kolmé, platí Pythagorova věta.




$$||\mathbf{y} - \mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$$

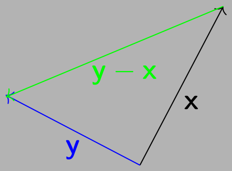
$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$$

Ekvivalentně,

$$y_1^2 - 2y_1x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2.$$

# Skalární součin I

Motivace: Uvažujme prostor $\mathbb{R}^2$. Jsou-li vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ na sebe kolmé, platí Pythagorova věta.




$$||\mathbf{y} - \mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$$

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$$

Ekvivalentně,

$$y_1^2 - 2y_1x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2.$$

To je právě tehdy, když

$$-2y_1x_1 - 2y_2x_2 = 0 \text{ tj. } \mathbf{x_1y_1 + x_2y_2 = 0}.$$

Platí-li Pythagorova věta, jsou na sebe vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ kolmé a $\mathbf{x_1y_1 + x_2y_2 = 0}$.

# Skalární součin II

Výraz $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ měří, zda jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ na sebe kolmé. Nazýváme jej ***skalární součin***.

# Skalární součin II

Výraz $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ měří, zda jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ na sebe kolmé. Nazýváme jej ***skalární součin***.

Jedná se o symetrickou bilineární formu, přičemž příslušná kvadratická forma je tvaru

$$\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2$$

a je pozitivně definitní a měří velikost vektoru v druhé mocnině.

# Skalární součin II

Výraz $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ měří, zda jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ na sebe kolmé. Nazýváme jej ***skalární součin***.

Jedná se o symetrickou bilineární formu, přičemž příslušná kvadratická forma je tvaru

$$\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2$$

a je pozitivně definitní a měří velikost vektoru v druhé mocnině.

## Definice

***Skalárním*** nebo též ***vnitřním součinem*** na reálném vektorovém prostoru $V$ rozumíme libovolnou pozitivně definitní, symetrickou bilineární formu na $V$. Hodnotu této formy na vektorech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ budeme značit $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

# Skalární součin III

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na $V$ definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $V$ přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \text{ (aditivita)},$$

# Skalární součin III

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na $V$ definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $V$ přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(aditivita)},$$

$$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \text{(homogenita)},$$

# Skalární součin III

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na $V$ definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $V$ přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle && \text{(aditivita)}, \\
\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle && \text{(homogenita)}, \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle && \text{(symetrie)},
\end{aligned}$$

# Skalární součin III

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na $V$ definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $V$ přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle && \text{(aditivita)},\\
\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle && \text{(homogenita)},\\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle && \text{(symetrie)},\\
\mathbf{x} \neq \mathbf{0} &\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 && \text{(kladná definitnost)}.
\end{aligned}
$$

# Skalární součin III

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na $V$ definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $V$ přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle && \text{(aditivita)},\\
\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle && \text{(homogenita)},\\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle && \text{(symetrie)},\\
\mathbf{x} \neq \mathbf{0} &\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 && \text{(kladná definitnost)}.
\end{aligned}$$

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu nám dává jeho linearitu jako funkci první proměnné (při pevné druhé proměnné).

# Skalární součin IV

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2\rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2\rangle,\\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y}\rangle &= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle,\end{aligned}$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$.

# Skalární součin IV

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\
\langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,
\end{aligned}
$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$.

Z (bi)linearity plyne podmínka kladné definitnosti

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \ \& \ \big( \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0} \big)$$

pro každé $\mathbf{x} \in V$.

# Skalární součin IV

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\
\langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,
\end{aligned}
$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$.

Z (bi)linearity plyne podmínka kladné definitnosti

$$
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \ \& \ \big( \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0} \big)
$$

pro každé $\mathbf{x} \in V$.

První část této podmínky nám umožňuje definovat ***normu*** neboli ***délku vektoru*** $\mathbf{x}$ rovností

$$
\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.
$$

# Skalární součin V

Výraz $\|\mathbf{x}\|^2$ budeme zatím chápat jen jako jiné označení pro kvadratickou formu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ indukovanou skalárním součinem.

# Skalární součin V

Výraz $\|\mathbf{x}\|^2$ budeme zatím chápat jen jako jiné označení pro kvadratickou formu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ indukovanou skalárním součinem.

## Definice

***Euklidovským prostorem*** nazýváme libovolný ***konečně rozměrný*** reálný vektorový prostor se skalárním součinem.

# Skalární součin V

Výraz $\|\mathbf{x}\|^2$ budeme zatím chápat jen jako jiné označení pro kvadratickou formu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ indukovanou skalárním součinem.

## Definice

***Euklidovským prostorem*** nazýváme libovolný ***konečně rozměrný*** reálný vektorový prostor se skalárním součinem.

## Příklad

*Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ *v rovině* $\mathbb{R}^2$ *a se skalárním součinem* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ *v prostoru* $\mathbb{R}^3$*.*

# Skalární součin VI

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé $n$, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ je předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definovaný skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$.

# Skalární součin VI

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé $n$, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ je předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definovaný skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$.

V případě řádkového prostoru $\mathbb{R}^n$ máme

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

# Skalární součin VII

Takovýto skalární součin budeme nazývat ***standardní skalární součin*** na $\mathbb{R}^n$. Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

# Skalární součin VII

Takovýto skalární součin budeme nazývat ***standardní skalární součin*** na $\mathbb{R}^n$. Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Délka vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

# Skalární součin VII

Takovýto skalární součin budeme nazývat ***standardní skalární součin*** na $\mathbb{R}^n$. Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Délka vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

V rámci analytické geometrie se pro nenulové vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ dokazuje známý vztah

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \alpha,$$

který spojuje standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ či v $\mathbb{R}^3$ s délkou příslušných vektorů a jimi sevřeným úhlem $\alpha$.

# Skalární součin VIII

## Příklad

Nechť $V$ označuje vektorový prostor $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ všech *spojitých* reálných funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, případně jeho libovolný lineární podprostor.

# Skalární součin VIII

## Příklad

Nechť $V$ označuje vektorový prostor $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ všech *spojitých* reálných funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, případně jeho libovolný lineární podprostor.

Pro $f, g \in V$ položme

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Z komutativity násobení v $\mathbb{R}$ a aditivity a homogenity integrálu vyplýva, že $\langle f, g\rangle$ je symetrická bilineární forma na $V$.

# Skalární součin VIII

## Příklad

Nechť $V$ označuje vektorový prostor $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ všech *spojitých* reálných funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, případně jeho libovolný lineární podprostor.

Pro $f, g \in V$ položme

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Z komutativity násobení v $\mathbb{R}$ a aditivity a homogenity integrálu vyplýva, že $\langle f, g\rangle$ je symetrická bilineární forma na $V$.

Pro ověření pozitivní definitnosti si stačí uvědomit, že pro $f \neq \mathbf{0}$ (t. j. $f$ ne identicky rovné nule), je $f^2(x) \geq 0$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Ze spojitosti funkce $f$ (a teda též $f^2$) vyplývá existence nějakého netriviálního uzavřeného podintervalu $\langle a_1, b_1\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ tak, že $f^2(x) > 0$ pro všechna $x \in \langle a_1, b_1\rangle$.

# Skalární součin IX

Protože $f$ na $\langle a_1, b_1\rangle$ nabývá minimum, máme

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(\mathsf{x})\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} f^2(\mathsf{x})\mathrm{d}x \geq (b_1 - a_1) \min_{a_1 \leq x \leq b_1} f(x) > 0.$$

Teda předpisem $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ je definovaný skalární součin jak na $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ tak na jeho libovolném lineárním podprostoru, např. na prostorech polynomů $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{(n)}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, uvažovaných jako spojité funkce na $\langle a, b\rangle$.

# Skalární součin IX

Protože $f$ na $\langle a_1, b_1\rangle$ nabývá minimum, máme

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(\mathbf{x})\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} f^2(\mathbf{x})\mathrm{d}x \geq (b_1 - a_1) \min_{a_1 \leq x \leq b_1} f(x) > 0.$$

Teda předpisem $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ je definovaný skalární součin jak na $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ tak na jeho libovolném lineárním podprostoru, např. na prostorech polynomů $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{(n)}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, uvažovaných jako spojité funkce na $\langle a, b\rangle$.

V případě prostorů $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ nebo $\mathbb{R}[x]$ jde o skalární součin na *nekonečně rozměrných* vektorových prostorech.

# Skalární součin IX

Protože $f$ na $\langle a_1, b_1\rangle$ nabývá minimum, máme

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(\mathbf{x})\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} f^2(\mathbf{x})\mathrm{d}x \geq (b_1 - a_1) \min_{a_1 \leq x \leq b_1} f(x) > 0.$$

Teda předpisem $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ je definovaný skalární součin jak na $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ tak na jeho libovolném lineárním podprostoru, např. na prostorech polynomů $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{(n)}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, uvažovaných jako spojité funkce na $\langle a, b\rangle$.

V případě prostorů $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ nebo $\mathbb{R}[x]$ jde o skalární součin na *nekonečně rozměrných* vektorových prostorech.

Norma spojité funkce $f$ $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ potom je

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

# Skalární součin X

**Příklad**

*Nechť* $V = \mathbb{R}^3$ *a*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 7x_3y_3.$$

*Pak* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *je definitní (pomocí Sylvestrova kritéria) symetrická bilineární forma na* $V$*.*

# Komplexní skalární součin I

***Skalární*** nebo též ***vnitřní součin*** na komplexním vektorovém prostoru $V$ budeme definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{C}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $V$ přiřadí komplexní číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \\ &\quad \text{(aditivita)}, \end{aligned}$$

# Komplexní skalární součin I

***Skalární*** nebo též ***vnitřní součin*** na komplexním vektorovém prostoru $V$ budeme definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{C}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $V$ přiřadí komplexní číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \\
&\quad \text{(aditivita)}, \\
\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\
&\quad \text{(homogenita)},
\end{aligned}$$

# Komplexní skalární součin I

***Skalární*** nebo též ***vnitřní součin*** na komplexním vektorovém prostoru $V$ budeme definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{C}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $V$ přiřadí komplexní číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \\
&\quad \text{(aditivita)}, \\
\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\
&\quad \text{(homogenita)}, \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} \\
&\quad \text{(kosá symetrie)},
\end{aligned}$$

# Komplexní skalární součin I

***Skalární*** nebo též ***vnitřní součin*** na komplexním vektorovém prostoru $V$ budeme definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{C}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z $V$ přiřadí komplexní číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{C}$ platí:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle \\
& \quad \text{(aditivita)}, \\
\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\
& \quad \text{(homogenita)}, \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} \\
& \quad \text{(kosá symetrie)}, \\
\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad &\Rightarrow \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \\
& \quad \text{(kladná definitnost)}.
\end{aligned}
$$

# Komplexní skalární součin II

Komplexní vektorový prostor $V$ se skalárním součinem nazýváme ***unitární prostor***.

# Komplexní skalární součin II

Komplexní vektorový prostor $V$ se skalárním součinem nazýváme ***unitární prostor***.

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu dává jeho linearitu jako funkce první proměnné (při pevné druhé proměnné).

# Komplexní skalární součin II

Komplexní vektorový prostor $V$ se skalárním součinem nazýváme ***unitární prostor***.

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu dává jeho linearitu jako funkce první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Dík kosé symetrii z toho vyplývá antilinearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= \overline{c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c \in \mathbb{C}$.

# Komplexní skalární součin II

Komplexní vektorový prostor $V$ se skalárním součinem nazýváme ***unitární prostor***.

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu dává jeho linearitu jako funkce první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Dík kosé symetrii z toho vyplývá antilinearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= \overline{c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c \in \mathbb{C}$.

Z kosé symetrie vyplývá reálnost výrazu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ pro každé $\mathbf{x} \in V$, což dává smysl podmínce pozitivní definitnosti.

# Komplexní skalární součin II

Komplexní vektorový prostor $V$ se skalárním součinem nazýváme ***unitární prostor***.

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu dává jeho linearitu jako funkce první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Dík kosé symetrii z toho vyplývá antilinearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= \overline{c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c \in \mathbb{C}$.

Z kosé symetrie vyplývá reálnost výrazu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ pro každé $\mathbf{x} \in V$, což dává smysl podmínce pozitivní definitnosti.

Máme pak

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \ \& \ \big( \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0} \big)$$

pro každé $\mathbf{x} \in V$. Zejména platí $\langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

# Komplexní skalární součin III

## Příklad

Nechť $V = \mathbb{C}^n$. Pak pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ definujeme předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \overline{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

***standardní skalární součin*** na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{C}^n$.

# Komplexní skalární součin III

## Příklad

Nechť $V = \mathbb{C}^n$. Pak pro $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ definujeme předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \overline{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

***standardní skalární součin*** na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{C}^n$.

Většinu pojmů, které jsme definovali pro euklidovské prostory, můžeme zavést i pro (konečně rozměrné) unitární prostory a většinu výsledků o euklidovských prostorech můžeme s malými modifikacemi dokázat i pro (konečně rozměrné) unitární prostory.

# Komplexní skalární součin IV

Protože $0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$, *délku* neboli též *normu vektoru* $\mathbf{x}$ v unitárním prostoru $V$ můžeme definovat jako nezáporné reálné číslo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

# Komplexní skalární součin IV

Protože $0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$, *délku* neboli též *normu vektoru* $\mathbf{x}$ v unitárním prostoru $V$ můžeme definovat jako nezáporné reálné číslo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Říkáme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou ***kolmé*** v unitárním prostoru $V$, pokud $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

# Komplexní skalární součin IV

Protože $0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$, *délku* neboli též *normu vektoru* $\mathbf{x}$ v unitárním prostoru $V$ můžeme definovat jako nezáporné reálné číslo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Říkáme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou ***kolmé*** v unitárním prostoru $V$, pokud $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

## Příklad

Uvažme spojité funkce na intervalu $[a, b]$ s hodnotami v $\mathbb{C}$. Jedná se o komplexní vektorový prostor se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

# Gramova matice I

Nechť $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je libovolná uspořádaná $k$-tice vektorů v reálném vektorovém prostoru $V$ se skalárním součinem.
Téměř všechny podstatné informace o těchto vektorech jsou ukryté v tzv. ***Gramově matici***

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \big(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle\big)_{k \times k}$$

vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

# Gramova matice I

Nechť $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je libovolná uspořádaná $k$-tice vektorů v reálném vektorovém prostoru $V$ se skalárním součinem.
Téměř všechny podstatné informace o těchto vektorech jsou ukryté v tzv. ***Gramově matici***

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \big(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle\big)_{k\times k}$$

vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Determinant Gramovy matice

$$\det \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \;=\; |\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle \end{vmatrix}$$

se nazývá *Gramovým determinantem* vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

# Gramova matice II

## Tvrzení

*Nechť* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou libovolné vektory v reálném vektorovém prostoru* $V$ *se skalárním součinem. Potom*

*(a)* $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně semidefinitní symetrická matice;*

*(b) vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně definitní.*

# Gramova matice II

## Tvrzení

*Nechť* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *jsou libovolné vektory v reálném vektorovém prostoru* $V$ *se skalárním součinem. Potom*

(a) $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně semidefinitní symetrická matice;*

(b) *vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně definitní.*

## Důsledek

*Pro libovolné* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ *platí* $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)| \geq 0$. *Přitom* $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)| = 0$ *právě tehdy, když vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně závislé.*

# Gramova matice II

## Tvrzení

*Nechť* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou libovolné vektory v reálném vektorovém prostoru* $V$ *se skalárním součinem. Potom*

*(a)* $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně semidefinitní symetrická matice;*

*(b) vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ *je kladně definitní.*

## Důsledek

*Pro libovolné* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ *platí* $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| \geq 0$. *Přitom* $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$ *právě tehdy, když vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou lineárně závislé.*

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \geq 0, \end{aligned}$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

# Cauchyho-Schwartzova nerovnost I

Tím je dokázaná tzv. ***Cauchyho-Schwartzova nerovnost*** pro reálné vektorové prostory:

Věta

*(***Cauchyho-Schwartzova nerovnost***) Pro libovolné vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *v prostoru* $V$ *nad* $\mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{C}$ *se skalárním součinem platí*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \,,$$

*přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory* **u**, **v** *jsou lineárně závislé.*

# Cauchyho-Schwartzova nerovnost I

Tím je dokázaná tzv. ***Cauchyho-Schwartzova nerovnost*** pro reálné vektorové prostory:

Věta

(**Cauchyho-Schwartzova nerovnost**) *Pro libovolné vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *v prostoru* $V$ *nad* $\mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{C}$ *se skalárním součinem platí*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, ,$$

*přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory* **u**, **v** *jsou lineárně závislé.*

Pro skalární součin na $\mathbb{R}^n$ to znamená, že

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

# Cauchyho-Schwartzova nerovnost II

Pro skalární součin na $C[a, b]$ to znamená, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

# Cauchyho-Schwartzova nerovnost II

Pro skalární součin na $C[a,b]$ to znamená, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Z Cauchyho-Schwartzovy nerovnosti vyplývá, že pro libovolné *nenulové* vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

# Cauchyho-Schwartzova nerovnost II

Pro skalární součin na $C[a,b]$ to znamená, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Z Cauchyho-Schwartzovy nerovnosti vyplývá, že pro libovolné *nenulové* vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Proto existuje jediné reálné číslo $\alpha$ takové, že $0 \leq \alpha \leq \pi$ a

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

# Cauchyho-Schwartzova nerovnost III

Číslo $\alpha$ nazýváme ***úhlem*** nebo též ***odchylkou vektorů*** $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

# Cauchyho-Schwartzova nerovnost III

Číslo $\alpha$ nazýváme ***úhlem*** nebo též ***odchylkou vektorů*** $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Ze symetrie skalárního součinu vyplývá $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, to znamená, že se jedná o *neorientovaný úhel*.

# Cauchyho-Schwartzova nerovnost III

Číslo $\alpha$ nazýváme ***úhlem*** nebo též ***odchylkou vektorů*** $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Ze symetrie skalárního součinu vyplývá $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, to znamená, že se jedná o *neorientovaný úhel*.

Při této definici úhlu dvou nenulových vektorů zůstáva vztah

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

platný pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, zachovaný v libovolném prostoru se skalárním součinem.

# Délka vektoru I

## Definice

***Normou*** na reálném či komplexním vektorovém prostoru $V$ rozumíme libovolné zobrazení $V \to \mathbb{R}$, které vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí reálné číslo $\|\mathbf{x}\|$, nazývané ***normou*** nebo též ***délkou vektoru*** $\mathbf{x}$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ či $c \in \mathbb{C}$ platí

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| &\leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| && \text{(trojúhelníková nerovnost)},\\
\|c\mathbf{x}\| &= |c|\,\|\mathbf{x}\| && \text{(pozitivní homogenita)},\\
\|\mathbf{x}\| = 0 &\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} && \text{(oddělitelnost)}.
\end{aligned}
$$

# Délka vektoru I

## Definice

***Normou*** na reálném či komplexním vektorovém prostoru $V$ rozumíme libovolné zobrazení $V \to \mathbb{R}$, které vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí reálné číslo $\|\mathbf{x}\|$, nazývané ***normou*** nebo též ***délkou vektoru*** $\mathbf{x}$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ či $c \in \mathbb{C}$ platí

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| &\leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| && \text{(trojúhelníková nerovnost)}, \\
\|c\mathbf{x}\| &= |c|\,\|\mathbf{x}\| && \text{(pozitivní homogenita)}, \\
\|\mathbf{x}\| = 0 &\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} && \text{(oddělitelnost)}.
\end{aligned}
$$

Z prvních dvou uvedených podmínek vyplývá nezápornost normy, t. j. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Z oddělitelnosti máme $\|\mathbf{x}\| > 0$ pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$.

# Délka vektoru II

Reálný či komplexní vektorový prostor $V$ s normou nazýváme ***normovaný prostor***.
Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

# Délka vektoru II

Reálný či komplexní vektorový prostor $V$ s normou nazýváme ***normovaný prostor***.
Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Tři definující podmínky pro normu zaručují, že takovéto měření délek, tj. přiřazení $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, má rozumné vlastnosti, jaké od délek očekáváme.

# Délka vektoru II

Reálný či komplexní vektorový prostor $V$ s normou nazýváme ***normovaný prostor***.
Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Tři definující podmínky pro normu zaručují, že takovéto měření délek, tj. přiřazení $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, má rozumné vlastnosti, jaké od délek očekáváme.

***Vzdáleností bodů*** $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru $V$ s normou $\| \cdot \|$ nazýváme délku vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, t. j. číslo $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.
Pomocí vzdálenosti bodů můžeme trojúhelníkovou nerovnost vyjádřit jiným, ekvivalentním způsobem:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$$

pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.

# Délka vektoru III

### Tvrzení

*Nechť $V$ je reálný či komplexní vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

*je definovaná norma na $V$.*

### Tvrzení

*Nechť $V$ je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí:*

*(a)* $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\exists\, c \in \mathbb{R})(c > 0 \;\&\; \mathbf{x} = c\mathbf{y})$;

*(b)* $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi \;\Leftrightarrow\; (\exists\, c \in \mathbb{R})(c < 0 \;\&\; \mathbf{x} = c\mathbf{y})$;

*(c)* $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi/2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$;

*(d)* $\sphericalangle(-\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{x}, -\mathbf{y}) = \pi - \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\sphericalangle(-\mathbf{x}, -\mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

# Délka vektoru a Cauchyho-Schwartzova nerovnost IV

### Tvrzení

*Nechť $V$ je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí:*

*(a)* *(***kosinová věta***)*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y}), \\ \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y}); \end{aligned}$$

*(b)* *(***Pythagorova věta***)*

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \;\Rightarrow \\ &\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2; \end{aligned}$$

*(c)* *(***pravidlo rovnoběžníka***)*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big);$$

*(d)* *(***úhlopříčky kosoštvorce jsou na sebe kolmé***)*

# Ortogonální a ortonormální báze I

Uspořádaná $k$-tice $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z vektorového prostoru se skalárním součinem $V$, se nazývá ***ortogonální***, pokud $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ pro všechna $1 \leq i < j \leq k$.

Říkáme též, že ***vektory*** $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou (navzájem) ***ortogonální*** neboli ***kolmé***.

# Ortogonální a ortonormální báze I

Uspořádaná $k$-tice $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z vektorového prostoru se skalárním součinem $V$, se nazývá ***ortogonální***, pokud $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ pro všechna $1 \leq i < j \leq k$.

Říkáme též, že ***vektory*** $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou (navzájem) ***ortogonální*** neboli ***kolmé***.

Uspořádaná $k$-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ sa nazývá ***ortonormální***, pokud je ortogonální a $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ pro všechna $i \leq k$.

Říkáme, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ tvoří ***ortonormální systém***.

# Ortogonální a ortonormální báze I

Uspořádaná $k$-tice $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z vektorového prostoru se skalárním součinem $V$, se nazývá ***ortogonální***, pokud $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ pro všechna $1 \leq i < j \leq k$.

Říkáme též, že ***vektory*** $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou (navzájem) ***ortogonální*** neboli ***kolmé***.

Uspořádaná $k$-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ sa nazývá ***ortonormální***, pokud je ortogonální a $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ pro všechna $i \leq k$.

Říkáme, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ tvoří ***ortonormální systém***.

Podobně můžeme definovat pojmy ortogonálnosti a ortonormálnosti i pro nekonečné posloupnosti $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ vektorů z $V$, případně pro množiny $X \subseteq V$.

# Ortogonální a ortonormální báze II

**Tvrzení**

*Nechť $V$ je vektorový prostor so skalárním součinem. Potom pro libovolnou $k$-tici $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) \in V^k$ platí:*

(a) *$\boldsymbol{\alpha}$ je ortogonální právě tehdy, když její Gramova matice $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$ je diagonální;*

(b) *$\boldsymbol{\alpha}$ je ortonormální právě tehdy, když $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I}_k$.*

# Ortogonální a ortonormální báze II

### Tvrzení

*Nechť $V$ je vektorový prostor so skalárním součinem. Potom pro libovolnou $k$-tici $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) \in V^k$ platí:*

*(a) $\boldsymbol{\alpha}$ je ortogonální právě tehdy, když její Gramova matice $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$ je diagonální;*

*(b) $\boldsymbol{\alpha}$ je ortonormální právě tehdy, když $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I}_k$.*

### Důsledek

*Pokud $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ jsou navzájem kolmé nenulové vektory, speciálně, pokud $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ tvoří ortonormální systém, tak jsou lineárně nezávislé.*

# Ortogonální a ortonormální báze II

## Tvrzení

*Nechť $V$ je vektorový prostor so skalárním součinem. Potom pro libovolnou $k$-tici $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) \in V^k$ platí:*

*(a)* $\boldsymbol{\alpha}$ *je ortogonální právě tehdy, když její Gramova matice* $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$ *je diagonální;*

*(b)* $\boldsymbol{\alpha}$ *je ortonormální právě tehdy, když* $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I}_k$.

## Důsledek

*Pokud $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ jsou navzájem kolmé nenulové vektory, speciálně, pokud $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ tvoří ortonormální systém, tak jsou lineárně nezávislé.*

## Věta

*Každý euklidovský prostor má ortonormální bázi.*

# Ortogonální a ortonormální báze III

## Tvrzení

*Nechť* $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je ortonormální báze euklidovského prostoru* $V$. *Potom pro libovolné vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *platí:*

*(a)*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i,$$

*tj.*

$$(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \left( \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_n \rangle \right)^T;$$

*(b)* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{y} \rangle$;

*(c)* $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle^2$.

*Podmínka (c), stejně jako její nekonečně rozměrná varianta, se nazývá* ***Parsevalova rovnost****.*

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces I

Popíšeme algoritmus, který umožňuje sestrojit ortonormální báze, známý pod názvem ***Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces***.

## Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces I

Popíšeme algoritmus, který umožňuje sestrojit ortonormální báze, známý pod názvem ***Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces***.

Nechť $V$ je vektorový prostor se skalárním součinem a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces I

Popíšeme algoritmus, který umožňuje sestrojit ortonormální báze, známý pod názvem ***Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces***.

Nechť $V$ je vektorový prostor se skalárním součinem a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory.

Chceme sestrojit ortogonální vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tak, aby pro každé $k \leq n$ platilo

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k].$$

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces I

Popíšeme algoritmus, který umožňuje sestrojit ortonormální báze, známý pod názvem ***Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces***.

Nechť $V$ je vektorový prostor se skalárním součinem a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory.

Chceme sestrojit ortogonální vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tak, aby pro každé $k \leq n$ platilo

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k].$$

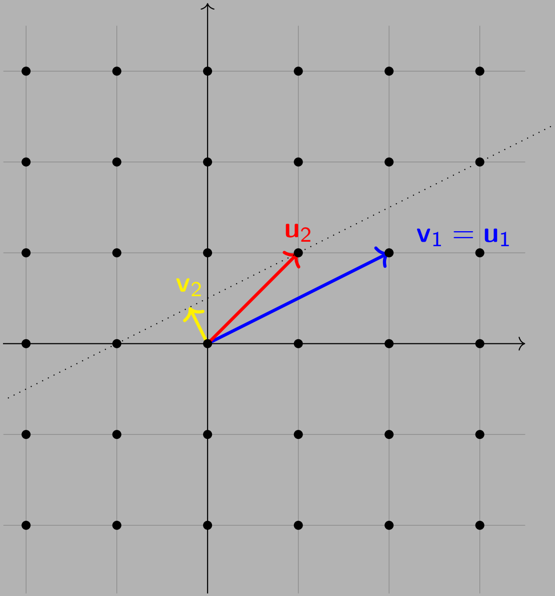
Pokud položíme $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$, tak samozřejmě $[\mathbf{v}_1] = [\mathbf{u}_1]$.

Vektor $\mathbf{v}_2 \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2]$ budeme hledat ve tvaru $\mathbf{v}_2 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{u}_2$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

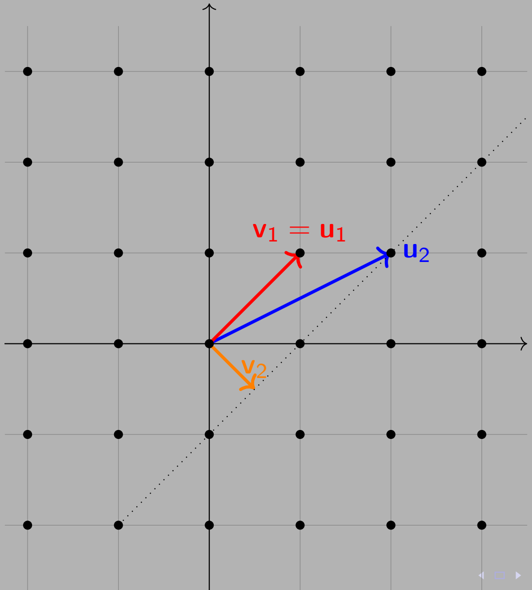
Pokud má však platit $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, musí být $b \neq 0$.

To nejlépe dosáhneme volbou $b = 1$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces Ia



# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces Ib - obrácené pořadí vektorů



# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces II

Navíc vektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + a\mathbf{v}_1$ má být kolmý na vektor $\mathbf{v}_1$, t.j.

$$0 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle + a\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle.$$

Odtud dostáváme

$$a = -\frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}.$$

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces II

Navíc vektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + a\mathbf{v}_1$ má být kolmý na vektor $\mathbf{v}_1$, t.j.

$$0 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle + a \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle.$$

Odtud dostáváme

$$a = -\frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}.$$

Předpokládejme, že $2 \leq k \leq n$ a už jsme sestrojili ortogonální vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ takové, že pro každé $1 \leq i \leq k-1$ platí $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i]$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces II

Navíc vektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + a\mathbf{v}_1$ má být kolmý na vektor $\mathbf{v}_1$, t.j.

$$0 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle + a \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle.$$

Odtud dostáváme

$$a = -\frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}.$$

Předpokládejme, že $2 \leq k \leq n$ a už jsme sestrojili ortogonální vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ takové, že pro každé $1 \leq i \leq k-1$ platí $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i]$.

Poučení případem $k = 2$ budeme vektor $\mathbf{v}_k \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{u}_k]$ hledat ve tvaru

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{k-1} \mathbf{v}_{k-1},$$

kde $a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces III

Navíc vektor $\mathbf{v}_k$ musí být kolmý na každý z vektorů $\mathbf{v}_i$ pro $1 \leq i \leq k-1$, tj.

$$0 = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle + \sum_{j=1}^{k-1} a_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle + a_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle,$$

neboť dle našeho předpokladu $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ pro $j \neq i$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces III

Navíc vektor $\mathbf{v}_k$ musí být kolmý na každý z vektorů $\mathbf{v}_i$ pro $1 \leq i \leq k-1$, tj.

$$0 = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle + \sum_{j=1}^{k-1} a_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle + a_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle,$$

neboť dle našeho předpokladu $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ pro $j \neq i$.

Z tohoto důvodu

$$a_i = -\frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle}.$$

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces IV

## Věta

*Nechť $V$ je vektorový prostor se skalárním součinem a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory. Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ definujeme pomocí rekurze:*

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \qquad a \qquad \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} \mathbf{v}_i,$$

*pro $1 < k \leq n$. Potom $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou ortogonální vektory a pro každé $1 \leq k \leq n$ platí*

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k].$$

*Speciálně, pokud $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru $V$, tak $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ je ortogonální báze prostoru $V$; potom vektory*

$$\|\mathbf{v}_1\|^{-1}\mathbf{v}_1, \ldots, \|\mathbf{v}_n\|^{-1}\mathbf{v}_n$$

*tvoří ortonormální bázi prostoru $V$.*

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces V

## Příklad

Na základě Sylvestrova kritéria vidíme, že symetrická matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

je kladně definitní. To znamená, že předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

je definovaný skalární součin na (sloupcovém) prostoru $\mathbb{R}^3$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces V

## Příklad

Na základě Sylvestrova kritéria vidíme, že symetrická matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

je kladně definitní. To znamená, že předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

je definovaný skalární součin na (sloupcovém) prostoru $\mathbb{R}^3$.

Aplikací Gramův-Schmidtova ortogonalizačního procesu na kanonickou bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sestrojíme ortogonální bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ s uvedeným skalárním součinem:

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces VI

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T,\\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_2 - \tfrac{\langle \mathbf{e}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_2 - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{v}_1 = (-1/2,1,0)^T,\\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_3 - \tfrac{\langle \mathbf{e}_3,\mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}\,\mathbf{v}_1 - \tfrac{\langle \mathbf{e}_3,\mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2\rangle}\,\mathbf{v}_2\\
&= \mathbf{e}_3 + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{v}_2 = (2/3,-1/3,1)^T,
\end{aligned}$$

Totiž $\langle \mathbf{e}_2,\mathbf{v}_1\rangle = 1$, $\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle = 2$, $\langle \mathbf{e}_3,\mathbf{v}_1\rangle = -1$, $\langle \mathbf{e}_3,\mathbf{v}_2\rangle = 1/2$ a $\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2\rangle = 3/2$.
Pokud ještě dopočítáme $\langle \mathbf{v}_3,\mathbf{v}_3\rangle = 7/3$, dostaneme délky jednotlivých vektorů $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{3/2}$, $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{7/3}$.
Príslušná ortonormální báze je potom tvořená vektory

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \sqrt{\frac{3}{7}}\,\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

# Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad VII

Nechť $V = \mathbb{R}^m$ se standardním skalárním součinem a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$ jsou lineárně nezávislé vektory, tedy $n \leq m$. Víme, že pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu můžeme najít ortogonální (a tedy nenulové) vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ tak, že

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \qquad \text{a} \qquad \mathbf{u}_k = \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} \mathbf{v}_i \right) + \mathbf{v}_k,$$

pro $1 < k \leq n$. Položme $\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ a $\mathbf{Q} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

# Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad VII

Nechť $V = \mathbb{R}^m$ se standardním skalárním součinem a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$ jsou lineárně nezávislé vektory, tedy $n \le m$. Víme, že pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu můžeme najít ortogonální (a tedy nenulové) vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ tak, že

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \qquad \text{a} \qquad \mathbf{u}_k = \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} \mathbf{v}_i \right) + \mathbf{v}_k,$$

pro $1 < k \le n$. Položme $\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ a $\mathbf{Q} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Pak $\mathbf{A}$ a $\mathbf{Q}$ jsou typu $m \times n$ a hodnosti $n$, navíc $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$. Dále definujme regulární matici $\mathbf{R} = (r_{ij})$ typu $n \times n$ jako horní trojúhelníkovou matici s prvky $r_{ij} = \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle}$ pro všechna $j \le n$ a $i < j$, $r_{jj} = 1$ pro všechna $j \le n$, a $r_{ij} = 0$ pro všechna $j \le n$ a $j < i$.

# Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad VII

Nechť $V = \mathbb{R}^m$ se standardním skalárním součinem a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$ jsou lineárně nezávislé vektory, tedy $n \leq m$. Víme, že pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu můžeme najít ortogonální (a tedy nenulové) vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ tak, že

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \qquad \text{a} \qquad \mathbf{u}_k = \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} \mathbf{v}_i \right) + \mathbf{v}_k,$$

pro $1 < k \leq n$. Položme $\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ a $\mathbf{Q} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Pak $\mathbf{A}$ a $\mathbf{Q}$ jsou typu $m \times n$ a hodnosti $n$, navíc $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$. Dále definujme regulární matici $\mathbf{R} = (r_{ij})$ typu $n \times n$ jako horní trojúhelníkovou matici s prvky $r_{ij} = \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle}$ pro všechna $j \leq n$ a $i < j$, $r_{jj} = 1$ pro všechna $j \leq n$, a $r_{ij} = 0$ pro všechna $j \leq n$ a $j < i$.

Máme tedy $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$, tedy tzv. ***QR-rozklad matice* A** (pro ověření stačí porovnat k-tý sloupec matice $\mathbf{A}$, tedy $\mathbf{u}_k$ s $k$-tým sloupcem součinu $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$, tj. se součinem $\mathbf{Q} \cdot s_j(\mathbf{R})$, což je právě výše uvedená rovnost).

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jinak VIII

Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci lze alternativně provést pomocí vhodných úprav jistých matic.

Pokud je $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ lineárně nezávislá $n$-tice vektorů v prostoru se skalárním součinem $V$, tak její Gramova matice $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$ je pozitivně definitní a je to zároveň matice skalárního součinu zúženého na vektorový podprostor $S = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \subseteq V$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jinak VIII

Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci lze alternativně provést pomocí vhodných úprav jistých matic.

Pokud je $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ lineárně nezávislá $n$-tice vektorů v prostoru se skalárním součinem $V$, tak její Gramova matice $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$ je pozitivně definitní a je to zároveň matice skalárního součinu zúženého na vektorový podprostor $S = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \subseteq V$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$.

Podle Jacobiho věty a Sylvestrova kritéria můžeme výlučně úpravami typu $(1^+)$ upravit $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$ na diagonální tvar $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ s kladnými prvky na diagonále.

Elementární sloupcové operace odpovídající těmto úpravám postupně provedené na matici $\mathbf{I}_n$ nás přivádí k horní trojúhelníkové matici $\mathbf{P} = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s jedničkami na diagonále, t. j. $p_{ii} = 1$ a $p_{ij} = 0$ pro všechna $i \leq n$ a $j < i$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jinak VIII

Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci lze alternativně provést pomocí vhodných úprav jistých matic.

Pokud je $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ lineárně nezávislá $n$-tice vektorů v prostoru se skalárním součinem $V$, tak její Gramova matice $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$ je pozitivně definitní a je to zároveň matice skalárního součinu zúženého na vektorový podprostor $S = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \subseteq V$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$.

Podle Jacobiho věty a Sylvestrova kritéria můžeme výlučně úpravami typu $(1^+)$ upravit $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$ na diagonální tvar $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ s kladnými prvky na diagonále.

Elementární sloupcové operace odpovídající těmto úpravám postupně provedené na matici $\mathbf{I}_n$ nás přivádí k horní trojúhelníkové matici $\mathbf{P} = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s jedničkami na diagonále, t. j. $p_{ii} = 1$ a $p_{ij} = 0$ pro všechna $i \leq n$ a $j < i$.

Pokud položíme

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

tak $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, t. j. $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze $\boldsymbol{\beta}$ do báze $\boldsymbol{\alpha}$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jinak IX

Potom $\mathbf{D}$ je maticí skalárního součinu zúženého na podprostor $S$ v bázi $\beta$ a tedy $\mathbf{G}(\beta) = \mathbf{D}$.

Proto je $\beta$ ortogonální báze podprostoru $S$. Navíc, vzhledem ke tvaru matice $\mathbf{P}$, platí

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \qquad \text{a} \qquad \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + \sum_{i=1}^{k-1} p_{ik}\mathbf{u}_i,$$

pro $1 < k \leq n$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jinak IX

Potom $\mathbf{D}$ je maticí skalárního součinu zúženého na podprostor $S$ v bázi $\beta$ a tedy $\mathbf{G}(\beta) = \mathbf{D}$.

Proto je $\beta$ ortogonální báze podprostoru $S$. Navíc, vzhledem ke tvaru matice $\mathbf{P}$, platí

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \qquad \text{a} \qquad \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + \sum_{i=1}^{k-1} p_{ik}\mathbf{u}_i,$$

pro $1 < k \leq n$.

Nutně tedy pro všechna $k \leq n$ platí

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k].$$

Rovněž normy vektorů $\mathbf{v}_k$ si můžeme přečíst přímo z matice $\mathbf{D}$. Platí totiž $d_k = \|\mathbf{v}_k\|^2$ pro každé $k \leq n$. Tedy příslušná ortonormální báze je tvořená vektory $(1/\sqrt{d_1})\mathbf{v}_1, \dots, (1/\sqrt{d_n})\mathbf{v}_n$. Tento poslední krok můžeme realizovat úpravami vynásobení sloupce nenulovým skalárem matice $\mathbf{D} = \mathbf{G}(\beta)$ a příslušnými ESO na matici $\mathbf{P}$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jinak X

Pokud $V = \mathbb{R}^m$ s jakýmkoliv (tj. ne nutně standardním skalárním součinem), tak po ztotožnění báze $\boldsymbol{\alpha}$ s maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, lze k bázi $\boldsymbol{\beta}$ dospět přímo (tj. bez matice $\mathbf{P}$), vykonáním příslušných ESO na matici $\boldsymbol{\alpha}$.

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jinak X

Pokud $V = \mathbb{R}^m$ s jakýmkoliv (tj. ne nutně standardním skalárním součinem), tak po ztotožnění báze $\boldsymbol{\alpha}$ s maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, lze k bázi $\boldsymbol{\beta}$ dospět přímo (tj. bez matice $\mathbf{P}$), vykonáním příslušných ESO na matici $\boldsymbol{\alpha}$.

## Příklad

Použijeme nyní výše uvedenou metodu na již dříve definovaný skalární součin pomocí pozitivně definitní matice $\mathbf{A}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Uvedená matice $\mathbf{A}$ je zároveň Gramovou maticí $\mathbf{G}(\varepsilon)$.
Nejprve pomocí prvku na místě $(1,1)$ vynulujeme ostatní prvky prvního řádku i sloupce. Potom pomocí prvku na místě $(2,2)$ vynulujeme prvky na místech $(2,3)$ a $(3,2)$

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jinak XI

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
\wr
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1/2 & 5/2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -1/2 & 1/2 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
\sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\
0 & 1/2 & 5/2 & 1/2 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -1/2 & 1/2 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
\wr
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\
0 & 1/2 & 7/3 & 1/2 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -1/2 & 2/3 & & & \\
0 & 1 & -1/3 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
$$

# Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jinak XII

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\
0 & 1/2 & 7/3 & 1/2 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -1/2 & 2/3 & & & \\
0 & 1 & -1/3 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{rrr|rrr}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 7/3 & 2/3 & -1/3 & 1 \\
\hline
1 & -1/2 & 2/3 & & & \\
0 & 1 & -1/3 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
$$

$$
\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix}
\qquad
\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$