15. VLASTNÍ HODNOTY A VLASTNÍ VEKTORY

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

9. dubna 2020

Abstrakt

Ústřední pojmy této kapitoly jako ***vlastní hodnota***, ***vlastní vektor*** a ***spektrum lineárního operátoru*** hrají klíčovou úlohu nejen v samotné lineární algebře, ale i v jejích aplikacích.

Abstrakt

Ústřední pojmy této kapitoly jako ***vlastní hodnota***, ***vlastní vektor*** a ***spektrum lineárního operátoru*** hrají klíčovou úlohu nejen v samotné lineární algebře, ale i v jejích aplikacích.

Budeme pracovat s vektorovým prostorem nad tělesem K.

Obsah přednášky I

- Matice lineárního operátoru a podobnost matic
  - Lineární operátor a jeho matice.
  - Zjednodušení tvaru matice lineárního operátoru.
  - Podobné matice, stopa matice.
  - Invarianty podobnosti.

Obsah přednášky I

- Matice lineárního operátoru a podobnost matic
  - Lineární operátor a jeho matice.
  - Zjednodušení tvaru matice lineárního operátoru.
  - Podobné matice, stopa matice.
  - Invarianty podobnosti.
- Vlastní hodnoty a vlastní vektory
  - Diagonalizovatelnost lineárního operátoru.
  - Vlastní hodnoty a vlastní vektory lineárního operátoru resp. matice.
  - Podobnost a vlastní hodnoty.
  - Invariantní podprostory.

Obsah přednášky I

- Matice lineárního operátoru a podobnost matic
  - Lineární operátor a jeho matice.
  - Zjednodušení tvaru matice lineárního operátoru.
  - Podobné matice, stopa matice.
  - Invarianty podobnosti.
- Vlastní hodnoty a vlastní vektory
  - Diagonalizovatelnost lineárního operátoru.
  - Vlastní hodnoty a vlastní vektory lineárního operátoru resp. matice.
  - Podobnost a vlastní hodnoty.
  - Invariantní podprostory.
- Charakteristický polynom
  - Charakteristická rovnice a vlastní hodnoty lineárního operátoru resp. matice.
  - Příklady.

Matice lineárního operátoru a podobnost matic I

Připomeňme, že ***lineárním operátorem*** na vektorovém prostoru V nebo též ***lineární transformací*** prostoru V nazýváme libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to V$.

Matice lineárního operátoru a podobnost matic I

Připomeňme, že ***lineárním operátorem*** na vektorovém prostoru V nebo též ***lineární transformací*** prostoru V nazýváme libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to V$.

Pokud V je konečně rozměrný, tak lineární operátor $\varphi : V \to V$ je injektivní právě tehdy, když je surjektivní, což je ekvivalentní s rovností $h(\varphi) = \dim V$.

Matice lineárního operátoru a podobnost matic I

Připomeňme, že ***lineárním operátorem*** na vektorovém prostoru V nebo též ***lineární transformací*** prostoru V nazýváme libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to V$.

Pokud V je konečně rozměrný, tak lineární operátor $\varphi : V \to V$ je injektivní právě tehdy, když je surjektivní, což je ekvivalentní s rovností $h(\varphi) = \dim V$.

Maticí lineární transformace $\varphi : V \to V$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ nazýváme matici

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = ((\varphi(\mathbf{u}_1))_{\boldsymbol{\alpha}}, \ldots, (\varphi(\mathbf{u}_n))_{\boldsymbol{\alpha}}) \in K^{n\times n},$$

tvořenou souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{u}_j)$ vektorů $\mathbf{u}_j$ báze $\boldsymbol{\alpha}$ vzhledem na ***tu stejnou*** bázi $\boldsymbol{\alpha}$.

Matice lineárního operátoru a podobnost matic II

Jedním ze základních záměrů této kapitoly bude dosáhnout vhodnou volbou báze $\boldsymbol{\alpha}$ co nejjednodušší tvar matice $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}}$ lineárního operátoru φ.

Matice lineárního operátoru a podobnost matic II

Jedním ze základních záměrů této kapitoly bude dosáhnout vhodnou volbou báze $\boldsymbol{\alpha}$ co nejjednodušší tvar matice $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}}$ lineárního operátoru φ.

Poznamenajme, že pokud bychom netrvali na přirozeném požadavku vyjadřovat souřadnice vzorů i obrazů vektorů $\mathbf{x} \in V$ vzhledem na ***tu stejnou bázi*** prostoru V, šlo by o speciální případ – vždy totiž můžeme zvolit bázi $\boldsymbol{\beta}$ a bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru V tak, že φ má vzhledem na bázi $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{n-h,h} & \mathbf{0}_{n-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$ a $h = h(\varphi)$.

Matice lineárního operátoru a podobnost matic III

Náš požadavek $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ značně zúžuje možnost naší volby, což komplikuje situaci.
Analogická úloha byla řešena pro symetrické bilineární formy – volbou vhodné báze lze vždy dosáhnout diagonální tvar matice příslušné formy.

Matice lineárního operátoru a podobnost matic III

Náš požadavek $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ značně zúžuje možnost naší volby, což komplikuje situaci.
Analogická úloha byla řešena pro symetrické bilineární formy – volbou vhodné báze lze vždy dosáhnout diagonální tvar matice příslušné formy.

Pro lineární operátory sa nám nic podobné nepodaří.

Matice lineárního operátoru a podobnost matic III

Náš požadavek $\alpha = \beta$ značně zúžuje možnost naší volby, což komplikuje situaci.
Analogická úloha byla řešena pro symetrické bilineární formy – volbou vhodné báze lze vždy dosáhnout diagonální tvar matice příslušné formy.

Pro lineární operátory sa nám nic podobné nepodaří.

Prozkoumáme ale strukturu lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech do té míry, že dokážeme charakterizovat operátory diagonalizovatelné ve vhodné bázi a identifikovat překážky diagonalizovatelnosti u těch ostatních.

Matice lineárního operátoru a podobnost matic IV

Na začátek si uvědomme vztah mezi maticemi lineárního operátoru vzhledem na různé báze. Platí:

Věta

Nechť $\varphi : V \to V$ *je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru* V *a* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou jeho dvě báze. Potom*

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}} = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathsf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Matice lineárního operátoru a podobnost matic IV

Na začátek si uvědomme vztah mezi maticemi lineárního operátoru vzhledem na různé báze. Platí:

Věta

Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou jeho dvě báze. Potom

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ se nazývají ***podobné***, píšeme $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ tak, že platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}.$$

Matice lineárního operátoru a podobnost matic IV

Na začátek si uvědomme vztah mezi maticemi lineárního operátoru vzhledem na různé báze. Platí:

Věta

Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou jeho dvě báze. Potom

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times n}$ se nazývají ***podobné***, píšeme $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ tak, že platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}.$$

Zřejmě podobné matice mají stejnou hodnost a pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times n}$ platí

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{A},$$
$$\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} \approx \mathbf{A},$$
$$\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \;\&\; \mathbf{B} \approx \mathbf{C} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} \approx \mathbf{C}.$$

Matice lineárního operátoru a podobnost matic V

To znamená, že vztah podobnosti je ***reflexivní***, ***symetrická*** a ***tranzitivní relace***, t.j. je to ***ekvivalence*** na množině $K^{n\times n}$. Máme pak

Věta

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad číselným tělesem K. Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *jsou matice téže lineární transformace* $\varphi : V \to V$ *vzhledem na nějaké dvě báze prostoru* V*;*

(ii) $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$.

Stopu matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, píšeme $\mathrm{tr}\mathbf{A}$ (z anglického ***trace***), definujeme jako součet jejích diagonálních prvků, t. j.

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = a_{11} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Matice lineárního operátoru a podobnost matic VI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$. *Potom*

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}).$$

Důsledek

Podobné matice mají stejný determinant i stopu.

Determinant a stopa jsou ***invarianty podobnosti matic***.

Matice lineárního operátoru a podobnost matic VI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$. *Potom*

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}).$$

Důsledek

Podobné matice mají stejný determinant i stopu.

Determinant a stopa jsou ***invarianty podobnosti matic***.

Pokud tedy matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ mají různé determinanty nebo různé stopy, tak nemohou být podobné. Na druhé straně však ani rovnost determinantu a stopy ještě nezaručují jejich podobnost.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice I

Lineární operátor $\varphi : V \to V$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V se nazývá ***diagonalizovatelný***, pokud existuje nějaká báze prostoru V, vzhledem ke které má φ diagonální matici.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice I

Lineární operátor $\varphi : V \to V$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V se nazývá ***diagonalizovatelný***, pokud existuje nějaká báze prostoru V, vzhledem ke které má φ diagonální matici.

Nechť tedy $\varphi : V \to V$ je diagonalizovatelný lineární operátor a $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je taková báze prostoru V, že matice $\mathbf{B} = (\varphi)_{\boldsymbol{\beta}}$ je diagonální se skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ na diagonále. Potom pro bázické vektory $\mathbf{v}_i$ platí

$$\boxed{\varphi(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i.}$$

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice I

Lineární operátor $\varphi : V \to V$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V se nazývá ***diagonalizovatelný***, pokud existuje nějaká báze prostoru V, vzhledem ke které má φ diagonální matici.

Nechť tedy $\varphi : V \to V$ je diagonalizovatelný lineární operátor a $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je taková báze prostoru V, že matice $\mathbf{B} = (\varphi)_{\boldsymbol{\beta}}$ je diagonální se skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ na diagonále. Potom pro bázické vektory $\mathbf{v}_i$ platí

$$\boxed{\varphi(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i.}$$

Říkáme, že skalár $\lambda \in K$ je ***vlastní*** nebo též ***charakteristická hodnota*** (***číslo***) lineárního operátoru $\varphi : V \to V$, pokud existuje vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$, pro který platí $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Tento vektor nazýváme ***vlastní*** nebo též ***charakteristický vektor*** lineárního operátoru $\varphi : V \to V$.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice II

Říkáme také, že $\mathbf{v}$ je ***vlastní vektor příslušející k vlastní hodnotě*** λ, resp. že λ je ***vlastní hodnota příslušející k vlastnímu vektoru*** $\mathbf{v}$.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice II

Říkáme také, že $\mathbf{v}$ je ***vlastní vektor příslušející k vlastní hodnotě*** λ, resp. že λ je ***vlastní hodnota příslušející k vlastnímu vektoru*** $\mathbf{v}$.

Vlastní hodnota příslušející k danému vlastnímu vektoru je určená jednoznačně; na druhé straně, k dané vlastní hodnotě může příslušet víc, dokonce lineárně nezávislých vektorů.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice II

Říkáme také, že $\mathbf{v}$ je ***vlastní vektor příslušející k vlastní hodnotě*** λ, resp. že λ je ***vlastní hodnota příslušející k vlastnímu vektoru*** $\mathbf{v}$.

Vlastní hodnota příslušející k danému vlastnímu vektoru je určená jednoznačně; na druhé straně, k dané vlastní hodnotě může příslušet víc, dokonce lineárně nezávislých vektorů.

Vlastní (charakteristickou) hodnotou (vlastním číslem), resp. vlastním (charakteristickým) vektorem čtvercové matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ nazýváme vlastní hodnotu, resp. vlastní vektor lineárního operátoru $K^n \to K^n$ daného předpisem $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice II

Říkáme také, že $\mathbf{v}$ je ***vlastní vektor příslušející k vlastní hodnotě*** λ, resp. že λ je ***vlastní hodnota příslušející k vlastnímu vektoru*** $\mathbf{v}$.

Vlastní hodnota příslušející k danému vlastnímu vektoru je určená jednoznačně; na druhé straně, k dané vlastní hodnotě může příslušet víc, dokonce lineárně nezávislých vektorů.

Vlastní (charakteristickou) hodnotou (vlastním číslem), resp. vlastním (charakteristickým) vektorem čtvercové matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ nazýváme vlastní hodnotu, resp. vlastní vektor lineárního operátoru $K^n \to K^n$ daného předpisem $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Vlastní hodnota $\lambda \in K$ a k ní příslušející vlastní vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in K^n$ matice $\mathbf{A}$ jsou tak spojeny vztahem

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.}$$

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice III

Vlastní hodnoty podobných matic jsou vlastními hodnotami téhož lineárního operátoru.

Tvrzení

Podobné matice mají stejné vlastní hodnoty.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice III

Vlastní hodnoty podobných matic jsou vlastními hodnotami téhož lineárního operátoru.

Tvrzení

Podobné matice mají stejné vlastní hodnoty.

Říkáme, že lineární podprostor S vektorového prostoru V je ***invariantní podprostor*** lineárního operátoru $\varphi\colon V \to V$, pokud platí $\boxed{\varphi(S) \subseteq S}$, t. j. $\varphi(\mathbf{x}) \in S$ pro každé $\mathbf{x} \in S$.

Jednorozměrný podprostor $[\mathbf{v}]$ generovaný vlastním vektorem $\mathbf{v}$ lineárního operátoru je speciálním případem invariantního podprostoru.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice III

Vlastní hodnoty podobných matic jsou vlastními hodnotami téhož lineárního operátoru.

Tvrzení

Podobné matice mají stejné vlastní hodnoty.

Říkáme, že lineární podprostor S vektorového prostoru V je ***invariantní podprostor*** lineárního operátoru $\varphi\colon V \to V$, pokud platí $\boxed{\varphi(S) \subseteq S}$, t. j. $\varphi(\mathbf{x}) \in S$ pro každé $\mathbf{x} \in S$.

Jednorozměrný podprostor $[\mathbf{v}]$ generovaný vlastním vektorem $\mathbf{v}$ lineárního operátoru je speciálním případem invariantního podprostoru.

Triviální podprostor $\{\mathbf{0}\}$ a nevlastní podprostor V jsou vždy invariantní.

Jednorozměrný podprostor $[\mathbf{v}]$ je invariantní právě tehdy, když $\mathbf{v}$ je vlastní vektor příslušného operátoru.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice IV

Jednorozměrné podprostory generované vlastními vektory lineárního operátoru jsou tedy příklady netriviálních, a pokud navíc $\dim V > 1$, tak i vlastních invariantních podprostorů.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice IV

Jednorozměrné podprostory generované vlastními vektory lineárního operátoru jsou tedy příklady netriviálních, a pokud navíc $\dim V > 1$, tak i vlastních invariantních podprostorů.

Pokud S je invariantní podprostor lineární transformace $\varphi\colon V \to V$, tak zúžení lineárního operátoru φ na podprostor S je opět lineární operátor $\varphi\restriction S\colon S \to S$ na vektorovém prostoru S.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice IV

Jednorozměrné podprostory generované vlastními vektory lineárního operátoru jsou tedy příklady netriviálních, a pokud navíc $\dim V > 1$, tak i vlastních invariantních podprostorů.

Pokud S je invariantní podprostor lineární transformace $\varphi\colon V \to V$, tak zúžení lineárního operátoru φ na podprostor S je opět lineární operátor $\varphi \restriction S\colon S \to S$ na vektorovém prostoru S.

Pokud $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze prostoru V taková, že jejích prvních k vektorů tvoří bázi invariantního podprostoru S, tak matice φ v této bázi má blokový tvar

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{M} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}_1 \in K^{k\times k}$ je matice lineární transformace $\varphi \restriction S\colon S \to S$ v bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ a $\mathbf{M} \in K^{k\times(n-k)}$, $\mathbf{A}_2 \in K^{(n-k)\times(n-k)}$.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice V

Pokud $V = S \oplus T$ je dokonce přímým součtem invariantních podprostorů S, T, tak V má bázi $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$, jejichž prvních k vektorů tvoří bázi S a zbývajících $n - k$ vektorů tvoří bázi T.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice V

Pokud $V = S \oplus T$ je dokonce přímým součtem invariantních podprostorů S, T, tak V má bázi $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$, jejichž prvních k vektorů tvoří bázi S a zbývajících $n - k$ vektorů tvoří bázi T.

Vzhledem k takovéto bázi má matice operátoru φ blokově diagonální tvar

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{k,n-k} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2),$$

kde $\mathbf{A}_1 \in K^{k \times k}$ je matice lineární transformace $\varphi \restriction S \colon S \to S$ v bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ a $\mathbf{A}_2 \in K^{(n-k)\times(n-k)}$ je matice lineární transformace $\varphi \restriction T \colon T \to T$ v bázi $(\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice VI

Toto pozorovaní můžeme zřejmým způsobem zevšeobecnit na přímý součet libovolného konečného počtu invariantních podprostorů.

Věta

Nechť φ je lineární operátor na konečně rozměrném vektorovém prostoru V. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) *φ je diagonalizovatelný;*

(ii) *existuje báze prostoru V sestávající z vlastních vektorů operátoru φ;*

(iii) *V je přímým součtem jednorozměrných invariantních podprostorů lineárního operátoru φ.*

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice VI

Toto pozorovaní můžeme zřejmým způsobem zevšeobecnit na přímý součet libovolného konečného počtu invariantních podprostorů.

Věta

Nechť φ je lineární operátor na konečně rozměrném vektorovém prostoru V. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) *φ je diagonalizovatelný;*

(ii) *existuje báze prostoru V sestávající z vlastních vektorů operátoru φ;*

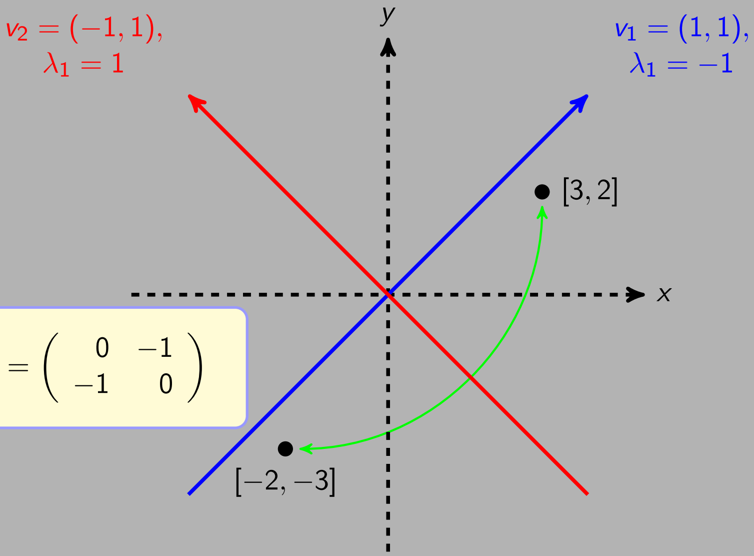
(iii) *V je přímým součtem jednorozměrných invariantních podprostorů lineárního operátoru φ.*

V tomto případě má matice operátora φ v bázi vlastních vektorů $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ tvar

$$\boxed{(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),}$$

kde λ_i je vlastní hodnota příslušející k vlastnímu vektoru $\mathbf{v}_i$.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice VII



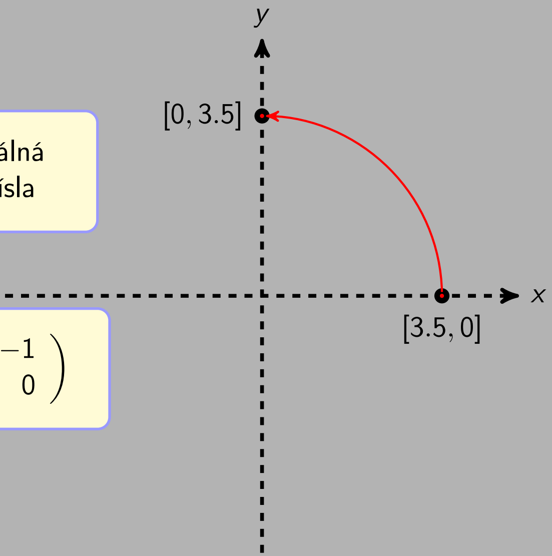
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Překlopení podle přímky $y = -x$

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice VIII

Žádná reálná
vlastní čísla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Rotace o úhel 90°

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice VIII

Tvrzení

Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *jsou navzájem různé vlastní hodnoty lineárního operátoru* $\varphi\colon V \to V$. *Potom k nim příslušející vlastní vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *jsou lineárně nezávislé.*

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice VIII

Tvrzení

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *jsou navzájem různé vlastní hodnoty lineárního operátoru* $\varphi\colon V \to V$. *Potom k nim příslušející vlastní vektory* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ *jsou lineárně nezávislé.*

Tvrzení

Nechť φ *je lineární operátor na* n*-rozměrném vektorovém prostoru* V. *Pokud* φ *má* n *navzájem různých vlastních hodnot* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, *tak je* φ *je diagonalizovatelný v bázi jim příslušejícím vlastních vektorů. Navíc každý vlastní vektor* $\mathbf{v}_i$ *příslušející k vlastní hodnotě* λ_i *je určený jednoznačně až na skalární násobek.*

Charakteristický polynom I

Nyní si ukážeme, jak k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ můžeme najít její vlastní hodnoty a k nim příslušné vlastní vektory.

Reprezentace lineárního operátoru na konečně rozměrném vektorovém prostoru pomocí jeho matice v nějaké bázi nám potom umožní vyřešit analogickou úlohu i pro něj.

Charakteristický polynom I

Nyní si ukážeme, jak k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ můžeme najít její vlastní hodnoty a k nim příslušné vlastní vektory.

Reprezentace lineárního operátoru na konečně rozměrném vektorovém prostoru pomocí jeho matice v nějaké bázi nám potom umožní vyřešit analogickou úlohu i pro něj.

Charakteristickým polynomem matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ nazýváme polynom

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}_{\mathbf{A}}(x) &= \det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

v proměnné x s koeficienty z tělesa K, t. j. $\mathrm{ch}_{\mathbf{A}}(x) \in K[x]$.

Charakteristický polynom II

Charakteristický polynom je zřejmě polynom stupně n s koeficientem $(-1)^n$ při nejvyšší mocnině x^n.

Charakteristickou rovnicí matice $\mathbf{A}$ nazýváme rovnici $\mathrm{ch}_{\mathbf{A}}(x) = 0$, t. j.

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n) = 0.$$

Charakteristický polynom II

Charakteristický polynom je zřejmě polynom stupně n s koeficientem $(-1)^n$ při nejvyšší mocnině x^n.

Charakteristickou rovnicí matice $\mathbf{A}$ nazýváme rovnici $\mathrm{ch}_{\mathbf{A}}(x) = 0$, t. j.

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n) = 0.$$

Věta

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$. Potom skalár $\lambda \in K$ je vlastní hodnotou matice $\mathbf{A}$ právě tehdy, když

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0,$$

tj. právě tehdy, když λ vyhovuje charakteristické rovnici matice $\mathbf{A}$.

Charakteristický polynom III

Zejména tedy vlastní vektory čtvercové matice $\mathbf{A}$ příslušející k její vlastní hodnotě λ jsou právě všechna nenulová řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$; přitom právě singularita uvedené matice zaručuje jejich existenci.

Charakteristický polynom III

Zejména tedy vlastní vektory čtvercové matice $\mathbf{A}$ příslušející k její vlastní hodnotě λ jsou právě všechna nenulová řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$; přitom právě singularita uvedené matice zaručuje jejich existenci.

Věta

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$*. Pokud* $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$*, tak* $\mathrm{ch}_{\mathbf{A}} = \mathrm{ch}_{\mathbf{B}}$*; jinak řečeno, podobné matice mají stejný charakteristický polynom.*

Charakteristický polynom je tedy ***invariantem*** podobnosti matic.

Příklad: osová souměrnost I

Příklad

Souměrnost roviny podle osy procházející počátkem a svírající s osou x úhel α je lineární operátor $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který má vzhledem na kanonickou bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ matici

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{S}_\alpha - x\mathbf{I}_2) = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha - x & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha - x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 - \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = x^2 - 1$$

má dva kořeny $x_{1,2} = \pm 1$.

Příklad: osová souměrnost II

K nim příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenních soustav s maticemi

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\alpha - \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha - 1 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha - 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\alpha + \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha + 1 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha + 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Oba podprostory řešení jsou jednorozměrné, generované vektory $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ respektive $(-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$.

Příklad: osová souměrnost III

To znamená, že operátor $\mathbf{S}_\alpha$ má vzhledem k bázi tvořené sloupci matice

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

diagonální matici

$$\mathrm{diag}(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ je směrový vektor naší osy souměrnosti a $(-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$ je směrový vektor kolmice na ni v počátku, což se přesně shoduje s geometrickým názorem.

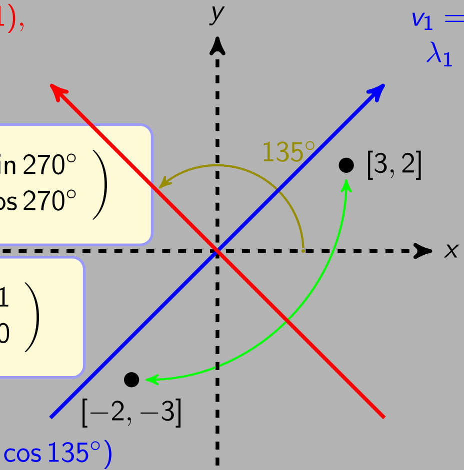
Příklad: osová souměrnost IV

$$v_2 = (\cos 135^\circ, \sin 135^\circ),$$
$$v_2 = (-1, 1),$$
$$\lambda_1 = 1$$

$$v_1 = (1, 1),$$
$$\lambda_1 = -1$$

$$\mathbf{S}_{135^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & \sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & -\cos 270^\circ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{135^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$v_1 = (-\sin 135^\circ, \cos 135^\circ)$$

Překlopení podle přímky $y = -x$

Příklad: Otočení roviny okolo počátku I

Příklad

Otočení roviny okolo počátku o úhel α je lineární operátor $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který má v kanonické bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ matici

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{R}_\alpha - x\mathbf{I}_2) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 - 2x\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$
$$= x^2 - 2x\cos\alpha + 1$$

má diskriminant $D = 4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha$.

Příklad: Otočení roviny okolo počátku II

Mimo triviální případ, když $\sin\alpha = 0$, t. j. $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{I}_2$, kterým se dále nebudeme zabývat, je $D < 0$, tedy charakteristický polynóm nemá reálné kořeny. Preto $\mathbf{R}_\alpha$ nemá reálné vlastní hodnoty a není podobná se žádnou diagonální maticí nad $\mathbb{R}$.

V číselném tělese $\mathbb{C}$ její charakteristický polynom už má dva kořeny $x_{1,2} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha}$, kterým odpovídající vlastní vektory dostaneme řešením homogenních soustav s maticemi

$$\mathbf{R}_\alpha - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\mathrm{i}\sin\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resp.

$$\mathbf{R}_\alpha - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \mathrm{i}\sin\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad: Otočení roviny okolo počátku III

Oba podprostory řešení jsou jednorozměrné, generované vektory $(1, -\mathrm{i})^T$ resp. $(1, \mathrm{i})^T$. To znamená, že operátor $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ daný předpisem $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$ má vzhledem k bázi tvořené sloupci matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

diagonální matici $\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})$.

Totiž

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \\ -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

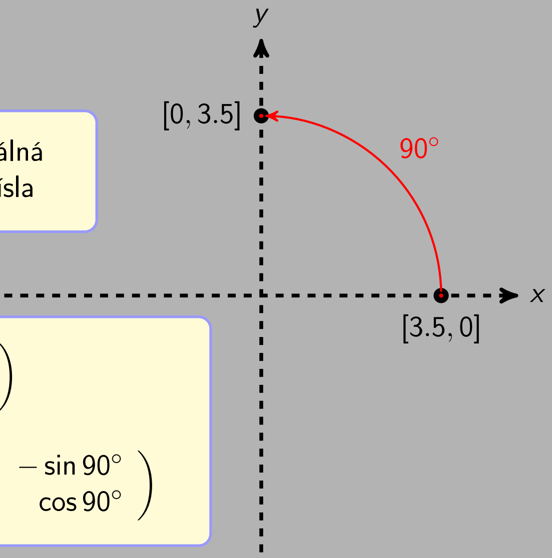
Podobně

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Příklad: Otočení roviny okolo počátku IV

Žádná reálná vlastní čísla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$$



Rotace o úhel 90°

Příklad: Stejnolehlost I

Příklad

Stejnolehlost v rovině se středem v počátku a koeficientem podobnosti $c \in \mathbb{R}$ je lineární operátor $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který má v kanonické bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ diagonální matici $c\mathbf{I}_2$. Její charakteristický polynom

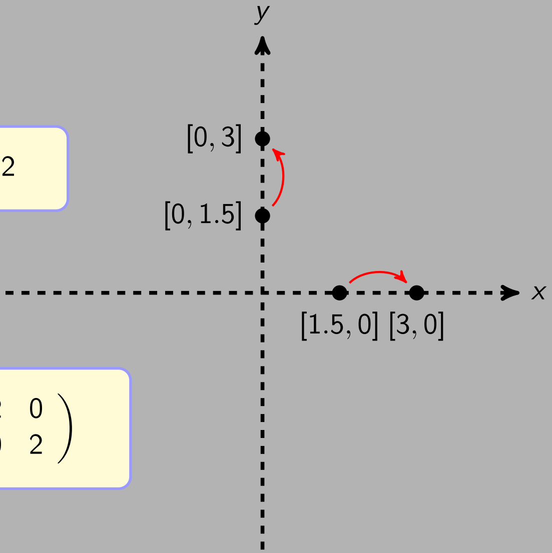
$$\det(c\mathbf{I}_2 - x\mathbf{I}_2) = (c - x)^2$$

má jeden dvojnásobný reálný kořen $x_{1,2} = c$. Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí $c\mathbf{I}_2 - c\mathbf{I}_2 = \mathbf{0}_{2,2}$ je samozřejmě celé $\mathbb{R}^2$.

To znamená, že naše stejnolehlost má v *libovolné* bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ diagonální matici $c\mathbf{I}_2$. Většinou si, pokud z nějakých důvodů nedáme přednost jiné volbě, vybíráme kanonickou bázi ε.

Příklad: Stejnolehlost II

$$x_{1,2} = 2$$



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Stejnolehlost v rovině se středem v počátku
a koeficientem podobnosti 2