

8 Test o pravděpodobnosti p

Příklad 8.1. Testovací statistika, simulační studie

Na základě simulační studie prověřte, že pokud má náhodná proměnná X asymptoticky binomické rozdělení $\text{Bin}(N, p)$, potom testovací statistika

$$Z_W = \frac{X/N - p}{\sqrt{p(1-p)/N}}$$

má asymptoticky normální rozdělení $N(0, 1)$. Použijte (a) $p = 0.1$; (b) $p = 0.5$; (c) $p = 0.9$, a $N = 5, 10, 15, 20, 25, 50, 100$ a 200 . Okomentujte výsledky ve spojitosti s Haldovou podmínkou $Np(1-p) > 9$. Pro každou simulaci X vypočítejte $z_{W,m}$, $m = 1, 2, \dots, M$, kde $M = 1000$. Histogram vygenerovaných testovacích statistik v relativní škále superponujte s teoretickou křivkou hustoty Z_W .

V komentářích zhodnoťte, zda je Haldova podmínka dobrým ukazatelem situací, kdy je možné rozdělení testovací statistiky Z_W aproximovat normálním rozdělením $N(0, 1)$, i situací, kdy to naopak není vhodné.

Obrázek 1: Asymptotické normální rozdělení Waldovy testovací statistiky Z_W pro test o pravděpodobnosti

Příklad 8.2. Pravděpodobnost pokrytí Waldova DIS

Nechť $X \sim \text{Bin}(N, p)$, kde $N = 30$ a $p = 0.8$. Při experimentu bylo z $N = 30$ pokusů zamenáno 24 úspěchů, tj. $x = 24$. Odhad pravděpodobnosti úspěchu $\hat{p} = \frac{24}{30} = 0.8$. Waldův 95 % empirický DIS pro p je rovný $(d, h) = (0.657, 0.943)$. Vypočítejte pravděpodobnost pokrytí tohoto intervalu.

Poznámka: Pravděpodobnost pokrytí Waldova 95 % DIS pro p vypočítáme následovně:

$$\Pr(\text{pokryti}) = \sum_j \Pr(X = Np_j : p \in \text{Waldovu 95 \% DIS pro } p_j),$$

kde $p_j \in \mathcal{M}_J = \{\frac{1}{30}, \frac{2}{30}, \dots, 1 - \frac{1}{30}\}$, t.j. jde o součet takových funkčních hodnot pravděpodobnostní funkce v bodech Np_j , kde $p \in \text{Waldovu 95 \% DIS pro } p_j$. Výsledky uspořádejte do tabulky, jejíž sloupce budou x_j , p_j , dh_j (dolní hranice Waldova 95 % DIS pro p_j), hh_j (horní hranice Waldova 95 % DIS pro p_j), $\Pr(X = Np_j)$ a $p \in IS_j$ (indikace toho, zda p náleží nebo nenáleží do Waldova 95 % DIS pro p_j).

Celý postup následně zopakujte, tentokrát pro parametr $p = 0.79$. Pozorujte, jak se změnila pravděpodobnost pokrytí.

Tabulka 1: Pravděpodobnost pokrytí Waldova 95 % empirického DIS pro parametr $p = 0.80$, když $\hat{p} = 0.80$

	x_j	p_j	dh_j	hh_j	$\Pr(X = Np_j)$	$p \in IS_j$
1	1	0.0333	-0.0309	0.0976	0.0000	0
2	2	0.0667	-0.0226	0.1559	0.0000	0
3	3	0.1000	-0.0074	0.2074	0.0000	0
4	4	0.1333	0.0117	0.2550	0.0000	0
5	5	0.1667	0.0333	0.3000	0.0000	0
6	6	0.2000	0.0569	0.3431	0.0000	0
7	7	0.2333	0.0820	0.3847	0.0000	0
8	8	0.2667	0.1084	0.4249	0.0000	0
9	9	0.3000	0.1360	0.4640	0.0000	0
10	10	0.3333	0.1646	0.5020	0.0000	0
11	11	0.3667	0.1942	0.5391	0.0000	0
12	12	0.4000	0.2247	0.5753	0.0000	0
13	13	0.4333	0.2560	0.6107	0.0000	0
14	14	0.4667	0.2881	0.6452	0.0000	0
15	15	0.5000	0.3211	0.6789	0.0002	0
16	16	0.5333	0.3548	0.7119	0.0007	0
17	17	0.5667	0.3893	0.7440	0.0022	0
18	18	0.6000	0.4247	0.7753	0.0064	0
19	19	0.6333	0.4609	0.8058	0.0161	1
20	20	0.6667	0.4980	0.8354	0.0355	1
21	21	0.7000	0.5360	0.8640	0.0676	1
22	22	0.7333	0.5751	0.8916	0.1106	1
23	23	0.7667	0.6153	0.9180	0.1538	1
24	24	0.8000	0.6569	0.9431	0.1795	1
25	25	0.8333	0.7000	0.9667	0.1723	1
26	26	0.8667	0.7450	0.9883	0.1325	1
27	27	0.9000	0.7926	1.0074	0.0785	1
28	28	0.9333	0.8441	1.0226	0.0337	0
29	29	0.9667	0.9024	1.0309	0.0093	0

Tabulka 2: Pravděpodobnost pokrytí Waldova 95 % empirického DIS pro parametr $p = 0.79$, když $\hat{p} = 0.80$

	x_j	p_j	dh_j	hh_j	$\Pr(X = Np_j)$	$p \in IS_j$
1	1	0.0333	-0.0309	0.0976	0.0000	0
2	2	0.0667	-0.0226	0.1559	0.0000	0
3	3	0.1000	-0.0074	0.2074	0.0000	0
4	4	0.1333	0.0117	0.2550	0.0000	0
5	5	0.1667	0.0333	0.3000	0.0000	0
6	6	0.2000	0.0569	0.3431	0.0000	0
7	7	0.2333	0.0820	0.3847	0.0000	0
8	8	0.2667	0.1084	0.4249	0.0000	0
9	9	0.3000	0.1360	0.4640	0.0000	0
10	10	0.3333	0.1646	0.5020	0.0000	0
11	11	0.3667	0.1942	0.5391	0.0000	0
12	12	0.4000	0.2247	0.5753	0.0000	0
13	13	0.4333	0.2560	0.6107	0.0000	0
14	14	0.4667	0.2881	0.6452	0.0001	0
15	15	0.5000	0.3211	0.6789	0.0003	0
16	16	0.5333	0.3548	0.7119	0.0011	0
17	17	0.5667	0.3893	0.7440	0.0034	0
18	18	0.6000	0.4247	0.7753	0.0091	0
19	19	0.6333	0.4609	0.8058	0.0217	1
20	20	0.6667	0.4980	0.8354	0.0449	1
21	21	0.7000	0.5360	0.8640	0.0805	1
22	22	0.7333	0.5751	0.8916	0.1239	1
23	23	0.7667	0.6153	0.9180	0.1621	1
24	24	0.8000	0.6569	0.9431	0.1778	1
25	25	0.8333	0.7000	0.9667	0.1605	1
26	26	0.8667	0.7450	0.9883	0.1161	1
27	27	0.9000	0.7926	1.0074	0.0647	0
28	28	0.9333	0.8441	1.0226	0.0261	0
29	29	0.9667	0.9024	1.0309	0.0068	0

Tabulka 3: Pravděpodobnost pokrytí Waldova 95 % empirického DIS pro parametr p

	$p = 0.8$	$p = 0.79$
pravděpodobnost pokrytí	0.9463	0.8876

Příklad 8.3. Pravděpodobnost pokrytí Waldova, skóre a věrohodnostního DIS

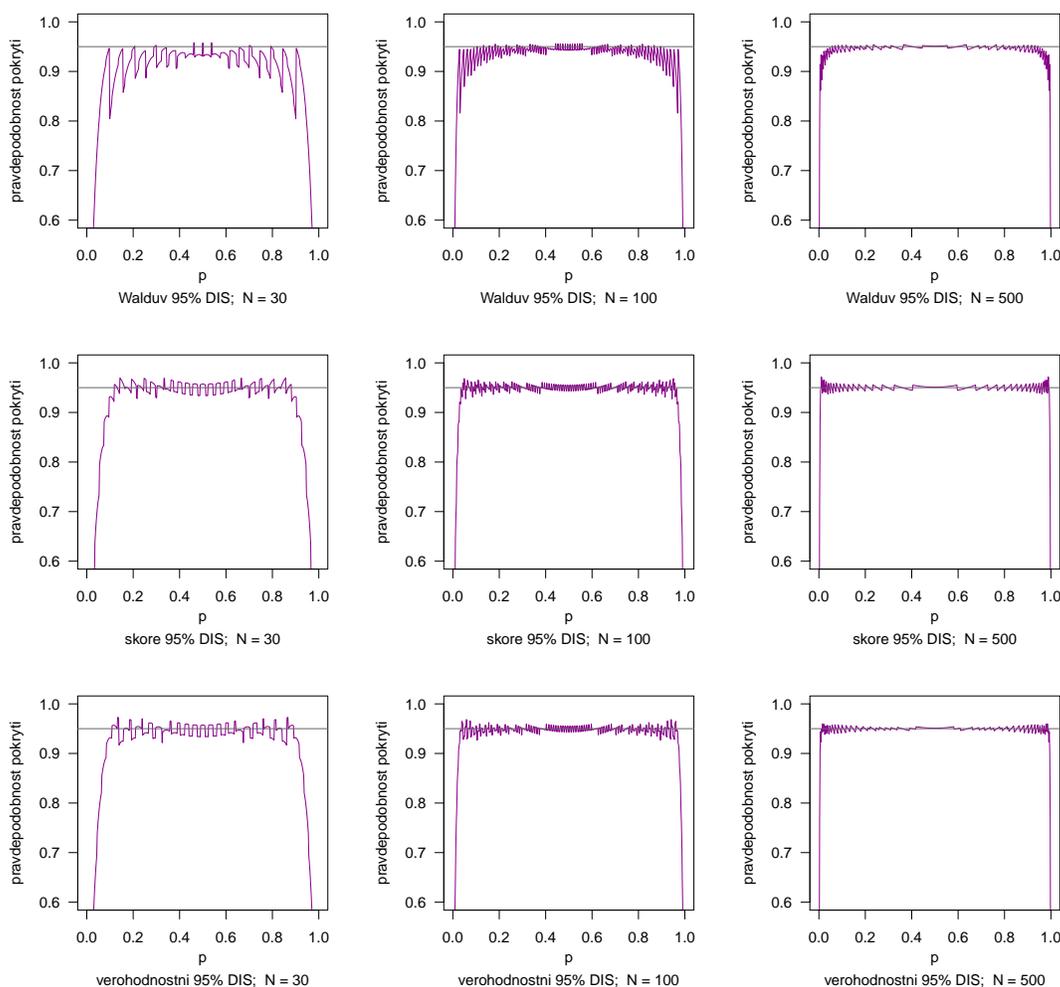
Nechť $X_i \sim \text{Bin}(N, p_i)$, $p_i \in \{0.001, 0.003, \dots, 0.997, 0.999\}$. Vypočítejte pravděpodobnosti pokrytí (a) Waldova, (b) skóre, (c) věrohodnostního 95 % empirického oboustranného intervalu spolehlivosti pro každé p_i . Nakreslete obrázek, kde na ose x budou p_i a na ose y bude pravděpodobnost pokrytí $\Pr_i(\text{pokrytí})$. Zvolte (i) $N = 30$, (ii) $N = 100$, (iii) $N = 500$.

Poznámka: Pravděpodobnosti pokrytí 95 % DIS pro p_i vypočítáme následovně

$$\Pr_i(\text{pokrytí}) = \sum_j \Pr(X = Np_j : p_i \in 95\% \text{ DIS pro } p_j),$$

kde $p_j \in \mathcal{M}_J = \{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1 - \frac{1}{N}\}$, tj. jde o součet takových funkčních hodnot pravděpodobnostní funkce v bodech Np_j , kde $p_i \in 95\% \text{ DIS pro } p_j$.

Zopakujte si definici konzervativního a liberálního IS (viz cvičení 04). V komentářích uveďte, zda je (a) Waldův; (b) skóre; (c) věrohodnostní DIS pro parametr p konzervativní, liberální, nebo ani jedno. Dále všechny tři DIS vzájemně porovnejte a uveďte, který DIS je z hlediska pravděpodobnosti pokrytí nejhodnějším intervalovým odhadem parametru p a který je naopak nejméně vhodný.



Obrázek 2: Pravděpodobnost pokrytí Waldových, skóre a věrohodnostních empirických intervalů spolehlivosti pro parametr p binomického rozdělení

Příklad 8.4. Pravděpodobnost pokrytí zpětně transformovaných DIS

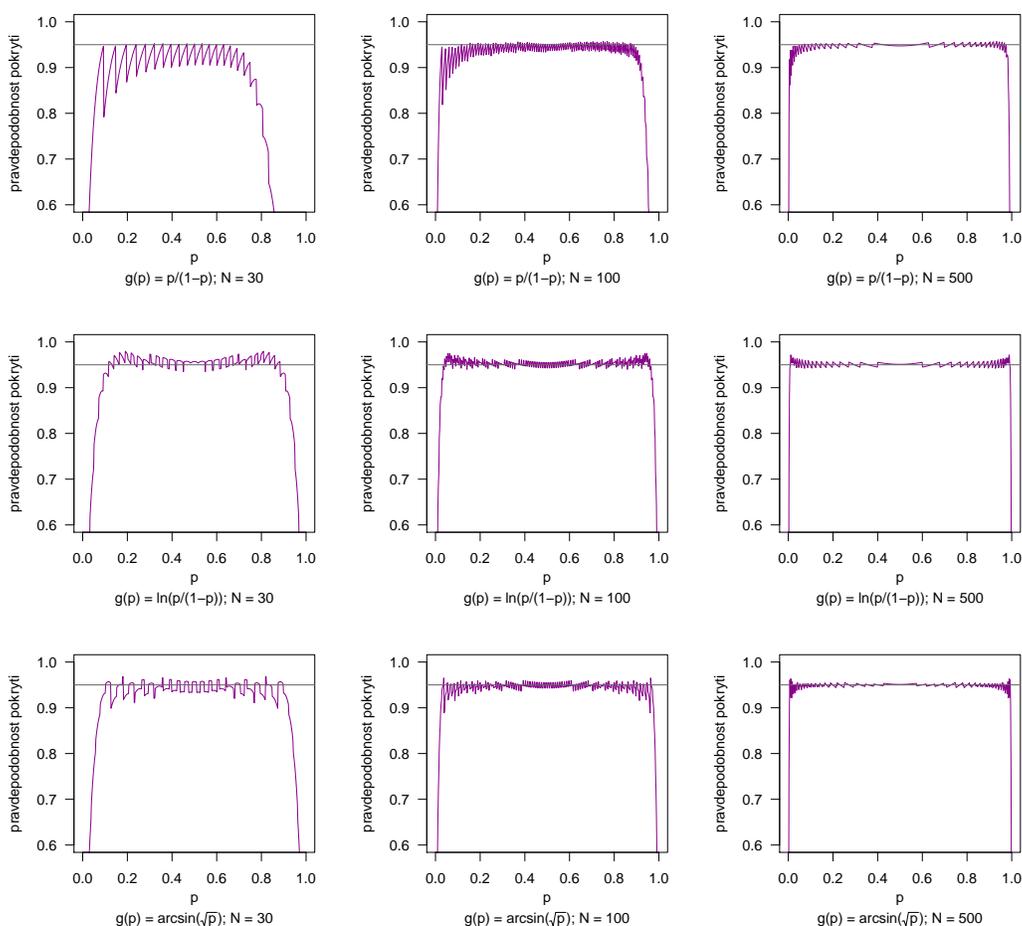
Nechť $X_i \sim \text{Bin}(N, p_i)$, $p_i \in \{0.001, 0.003, \dots, 0.997, 0.999\}$. Vypočítejte pravděpodobnosti pokrytí 95 % DIS pro transformaci $g(p_i)$ s hranicemi $(dh_g(p_i), hh_g(p_i))$ a pravděpodobnosti pokrytí zpětně transformovaného 95 % DIS pro p_i s hranicemi $((dh(p_i))^{-1}, (hh(p_i))^{-1})$, kde (a) $g(p_i) = \frac{p_i}{1-p_i}$; (b) $g(p_i) = \ln \frac{p_i}{1-p_i}$; (c) $g(p_i) = \arcsin(\sqrt{p_i})$ pro každé p_i . Nakreslete obrázek, kde na ose x budou pravděpodobnosti p_i a na ose y bude pravděpodobnost pokrytí $\text{Pr}_i(\text{pokrytí})$. Zvolte (i) $N = 30$, (ii) $N = 100$, (iii) $N = 500$.

Poznámka: Pravděpodobnosti pokrytí 95 % DIS pro p_i vypočítáme následovně

$$\text{Pr}_i(\text{pokrytí}) = \sum_j \Pr(X = Np_j : p_i \in 95\% \text{ DIS pro } p_j),$$

kde $p_j \in \mathcal{M}_J = \{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1 - \frac{1}{N}\}$, t.j. jde o součet takových funkčních hodnot pravděpodobnostní funkce v bodech Np_j , kde $p_i \in 95\% \text{ DIS pro } p_j$.

V komentářích uveďte, zda je každý typ zpětně transformovaného DIS konzervativní, liberální, nebo ani jedno. Porovnejte všech šest DIS, které jsme poznali v rámci příkladů 8.3 a 8.4, a seřadte je z hlediska pravděpodobnosti pokrytí od nejlepšího po nejhorší. Uveďte, které dva DIS jsou pro odhad p nejhodnější a které jsou naopak nejméně vhodné. Který DIS byste do svých vlastních analýz v budoucnosti pravděpodobně využili? Je tato volba odlišná od volby, kterou byste učinili před vyřešením příkladů z tohoto cvičení? Pokud ano, uveďte, co vás přimělo změnit názor, pokud ne, uveďte, proč zůstáváte u původní volby.



Obrázek 3: Pravděpodobnost pokrytí zpětně transformovaných 95% DIS pro parameter p binomického rozdělení