

Množství, obsahy, objemy, povrchy
aneb
cesta tam a zase zpátky
Integrální počet

Petr Liška

Masarykova univerzita

18.02.2022

Primitivní funkce

Definice

Nechť funkce f a F jsou definované na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

pak říkáme, že funkce F je *primitivní funkcí k funkci f na intervalu I* .

Věta

Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pak F je spojitá na I .

Věta (O existenci primitivní funkce)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.

Malá odbočka

Definice

Funkce f se nazývá *darbouxovská* na intervalu $I \subseteq D(f)$, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in I$ takové, že $f(x_1) < f(x_2)$ a každé číslo $y_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$, existuje v intervalu (x_1, x_2) takový bod x_0 , že $f(x_0) = y_0$.

Věta

Necht' funkce f má vlastní derivaci na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak je funkce f' na I darbouxovská.

Věta

Nechť k funkci f existuje na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ funkce primitivní. Pak je funkce f darbouxovská na intervalu I .

Dvě pozorování:

- Nechť funkce F je primitivní k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ je také funkce $F + c$ primitivní k funkci f .
- Nechť funkce F a G jsou primitivní k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$, že platí $G(x) = F(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta

Nechť F je nějaká primitivní funkce k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak

$$\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

je množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I .

Definice

Množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá *neurčitý integrál* z funkce f na I a značí se

$$\int f(x) dx, \quad x \in I.$$

Věta

Nechť na intervalu I existují neurčité integrály $\int f(x) dx$ a $\int g(x) dx$ a nechť α je libovolná konstanta. Pak na I existuje neurčitý integrál funkce $f + g$ a neurčitý integrál funkce αf a platí

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad (1)$$

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx. \quad (2)$$

- (1) $\int 1 \, dx = x + c,$
- (2) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1,$
- (3) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c,$
- (4) $\int e^x \, dx = e^x + c,$
- (5) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$
- (6) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$
- (7) $\int \cos x \, dx = \sin x + c,$
- (8) $\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \operatorname{arctg} x + c,$
- (9) $\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-x_0}{a} \right) + c,$
- (10) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + c,$
- (11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + c,$
- (12) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c,$
- (13) $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c,$
- (14) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c.$

Metoda per partes

Věta

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu I . Pak platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Substituční metoda

Věta

Nechť funkce f má na intervalu J primitivní funkci F , funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu I a $\varphi(x) \in J$ pro $x \in I$. Pak má složená funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c.$$

Věta

Nechť funkce f je definovaná na intervalu J a nechť funkce φ má nenulovou derivaci na intervalu I a $\varphi(x) \in J$ pro $x \in I$. Má-li funkce $f(\varphi)\varphi$ primitivní funkci F na intervalu I , je $F(\varphi^{-1})$ primitivní funkce k funkci na intervalu J .

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$