4. termín 13. 6. 2022 C1471 Jméno:

1. příklad [6 b]. Rozhodněte, zda následující věty platí. Zdůvodněte.

a) Mějme soustavu tří lineárních rovnic o dvou neznámých. Taková soustava nemůže mít právě jedno řešení.

b) Nechť Ω je koule o poloměru 2 se středem v počátku. Pak platí $\iiint_\Omega 3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 32\pi$.

c) Nechť I_5 je jednotková matice řádu 5. Pak $\det(3 \cdot I_5) = 3$.

2. příklad [4 b]. Uveďte příklad matic, pro které platí:

$$\text{a)}\, 2A = A \qquad \text{b)}\, B \text{ nemá inverzi} \qquad \text{c)}\, \det C_{3\times 3} = -2 \qquad \text{d)}\, D^{-1} = D$$

3. příklad [3 b]. Užitím inverzní matice vyřešte následující systém lineárních rovnic:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. příklad [2 b]. Mějme vektory $u = [1; 0; 0]^T$ a $v = [1; 0; 1]^T$. Doplňte vektor w tak, aby množina $\{u, v, w\}$ byla:

a) lineárně nezávislá

b) lineárně závislá

5. příklad [4 b]. Spočítejte všechny první a druhé parciální derivace funkce:

a) $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$

b) $f(x, y) = 1 + x + e^{x+y^2}$

6. příklad [3 b]. Určete lokální extrémy funkce:

$$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 1$$

U extrémů spočítejte také výšku (= souřadnici z).

7. příklad [2 b]. Užitím totálního diferenciálu odhadněte hodnotu výrazu:

$$e^{0,05} \ln(1{,}02)$$

8. příklad [3 b]. Určete hodnotu následujících výrazů:

a) $\iint_\Omega 3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ kde Ω je trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 1]$, $[2, 0]$.

b) $\iint_\Omega 5\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ kde Ω je kruh se středem v počátku a poloměrem 3.

c) $\iiint_\Omega 7\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ kde Ω je jednotková krychle.

9. příklad [3 b]. Určete objem dutého válce o vnitřním poloměru podstavy 3, vnějším poloměru 5 a výšce 2 užitím:

a) dvojného integrálu

b) trojného integrálu

c) vzorečkem ze základní/střední školy