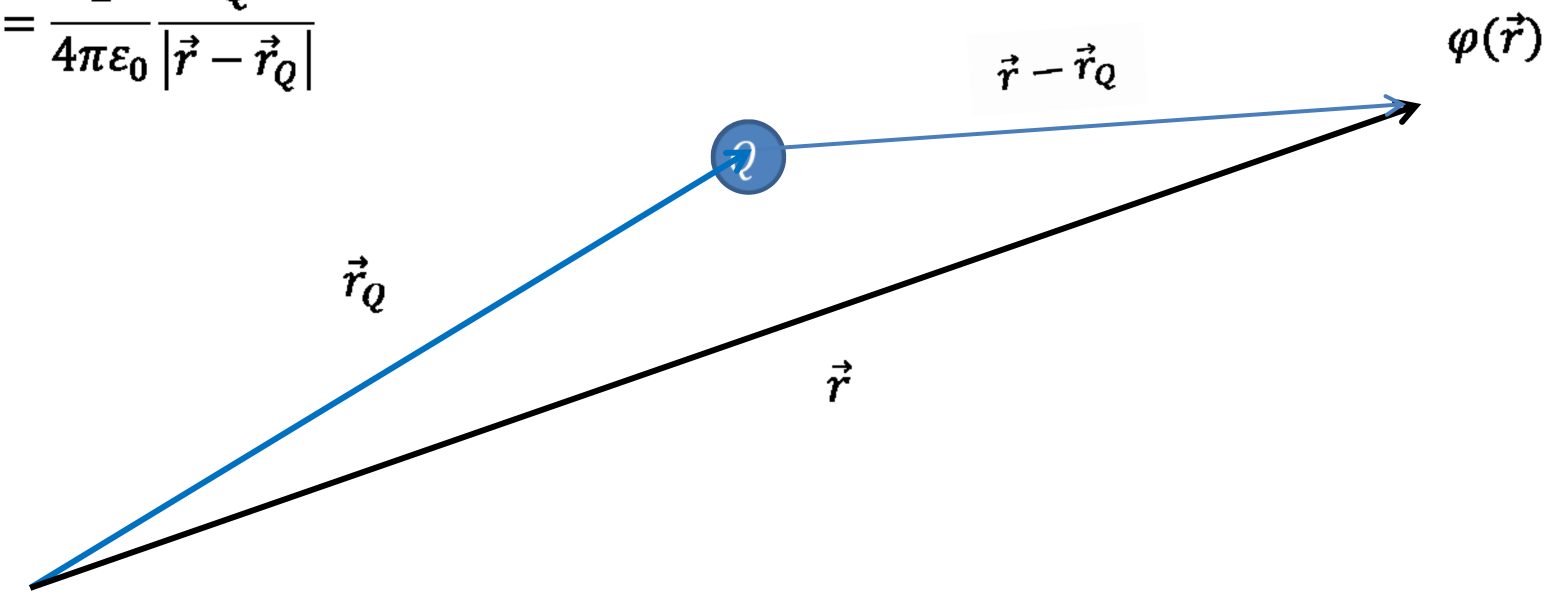
Elektrický dipól

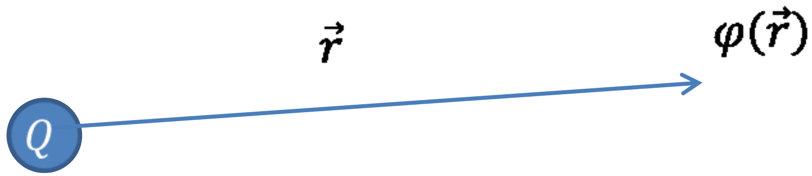
Elektrický potenciál

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_Q\right|}$$



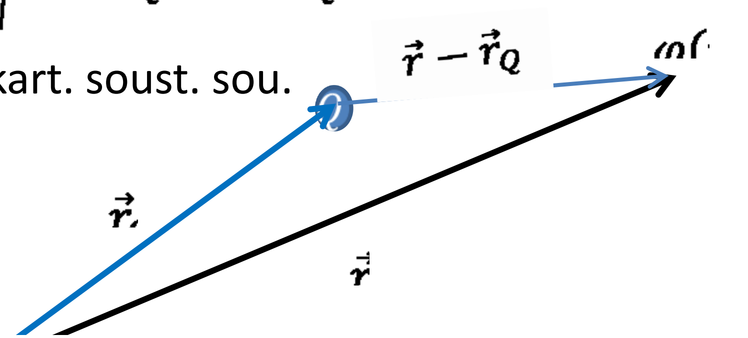
počátek souřadnicového systému v místě bodového náboje

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|}$$



Elektrický potenciál a elektrické pole

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} \qquad |\vec{r}-\vec{r}_Q| = \sqrt{r^2 + {r_Q}^2 - 2\vec{r}\vec{r}_Q}$$



Derivuje se podle souřadnic určujících pozici potenciálu. V kart. soust. sou.

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}r^2 = \vec{\nabla}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\vec{\nabla}r^2 = (\vec{r}\vec{r}) = \vec{e}_x\frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 2\left(\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z\right) = 2\vec{r}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{r}\vec{r}_Q) = \vec{\nabla}\left(xx_q + yy_q + zz_q\right)$$

$$\vec{\nabla}\vec{r}\vec{r}_Q = \vec{e}_x\frac{\partial(xx_q)}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial(yy_q)}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial(zz_q)}{\partial z} = \left(\vec{e}_x x_q + \vec{e}_y y_q + \vec{e}_z z_q\right) = \vec{r}_Q$$

tedy

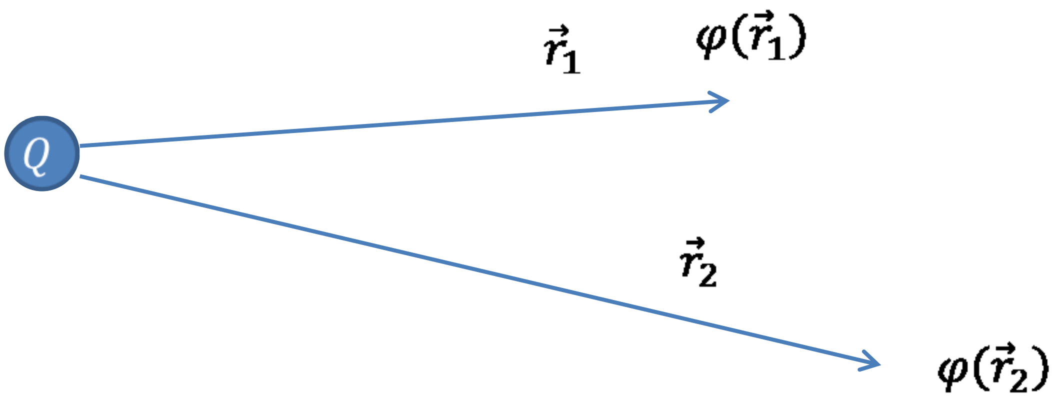
$$-\nabla\varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\frac{1}{\sqrt{r^2 + {r_Q}^2 - 2\vec{r}\vec{r}_Q}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\frac{1}{2}\frac{2\vec{r} - 2\vec{r}_q}{\left(r^2 + {r_Q}^2 - 2\vec{r}\vec{r}_Q\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{\left(r^2 + {r_Q}^2 - 2\vec{r}\vec{r}_Q\right)^{3/2}}$$

elektrický potenciál a práce sil elektrické pole bodového náboje

počátek souřadnicového systému položíme do místa náboje Q

$$\varphi(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}_1|} \qquad \varphi(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}_2|}$$



$$A_{r_1 r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{qQ}{r^3}\vec{r}dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = q(\varphi(\vec{r}_1)-\varphi(\vec{r}_2))$$

elektrický potenciál soustavy nábojů

Princip superpozice:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_{Qi}\right|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(\xi)}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|}\, dV_\xi$$

Elektrické pole dipólu

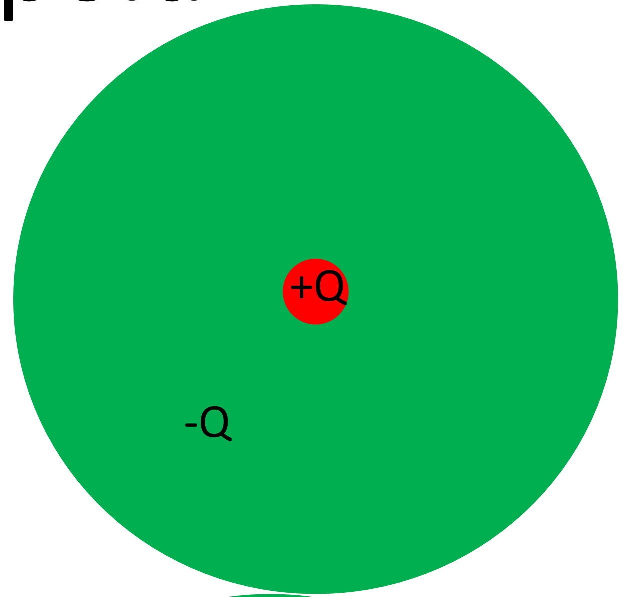
- Elektrické vodiče obsahují volně pohyblivé tv. volné nosiče nábojů-elektrony.
- Dielektrika nemají volně pohyblivé elektrony. Působením vnějších elektrických sil však může dojít k posunutí kladného náboje jádra vůči zápornému náboji elektronového obalu.

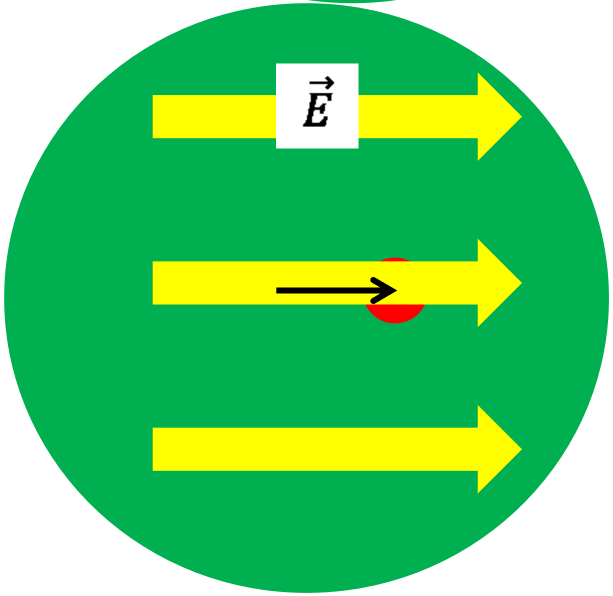
Elektrické pole dipólu

- dipólem rozumíme dva ne příliš od sebe vzdálené bodové nebo kulově symetrické náboje stejné velikosti, ale opačného znaménka, kde kladný náboj je určen vzhledem k zápornému vektorem $\vec{d}$
- Je li vzdálenost nábojů $\mathrm{d} = \left|\vec{d}\right|$ velmi malá vzhledem ke vzdálenosti, ze které dipól pozorujeme, jedná se o tzv. bodový dipól.
- bodový dipól je charakterizovaný tzv. dipólovým momentem $\vec{p} = \lim_{\vec{d}\to\vec{0}}(\vec{d} \cdot Q)$

Elektrické pole dipólu

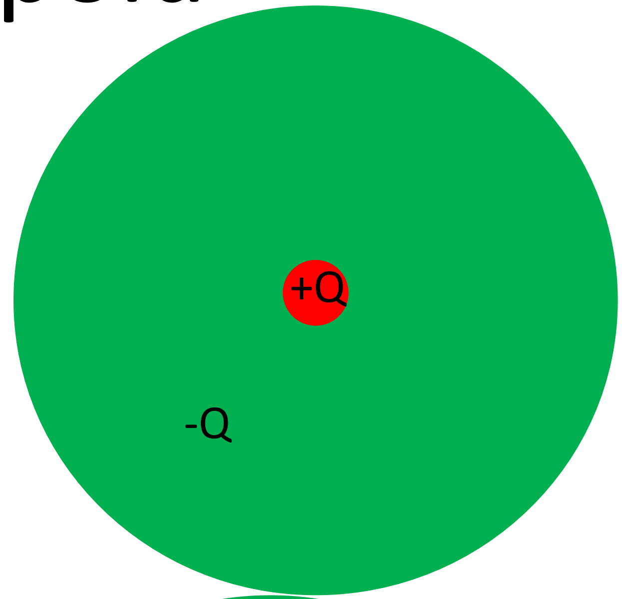
- Předpokládejme, že kladný a záporný náboj atomů v nějakém dielektriku má takové prostorové rozložení, že se zcela kompenzuje. Například u kulově symetrického atomu. Pokud bude takové dielektrikum vystaveno elektrickému poli, situace se změní. Sice zůstane nadále elektricky neutrální, ale v atomech nebo molekulách se silovým působením vnějšího pole posune elektronový obal vůči kladnému jádru. Elektrická pole jednotlivých takto vzniklých nábojů se sčítají dle principu superpozice, a látka ačkoliv jako celek je elektricky neutrální, generuje vlastní elektrostatické pole..

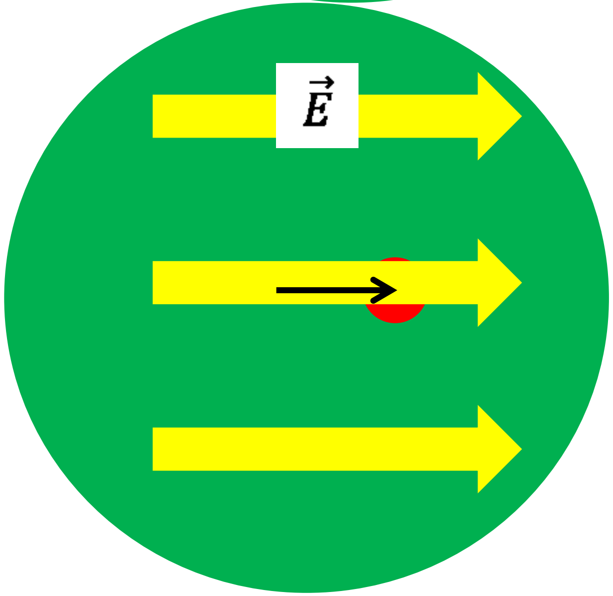




Elektrické pole dipólu

- Kromě toho, v celé řadě případů je už stavební prvek látky – molekula– i bez vnějšího pole v podobě dipólu. Tyto permanentní dvojice nábojů jsou (bez vnějšího pole) buďto:
- tepelným pohybem rozmítány tak, že jejich celkové el. pole je nulové,
- nebo jsou zformovány do tzv. domén, ve kterých jsou elektrické momenty spontánně orientovány.





elektrické pole dipólu

$$\varphi(\vec{r}_-) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{|\vec{r}_-|}$$

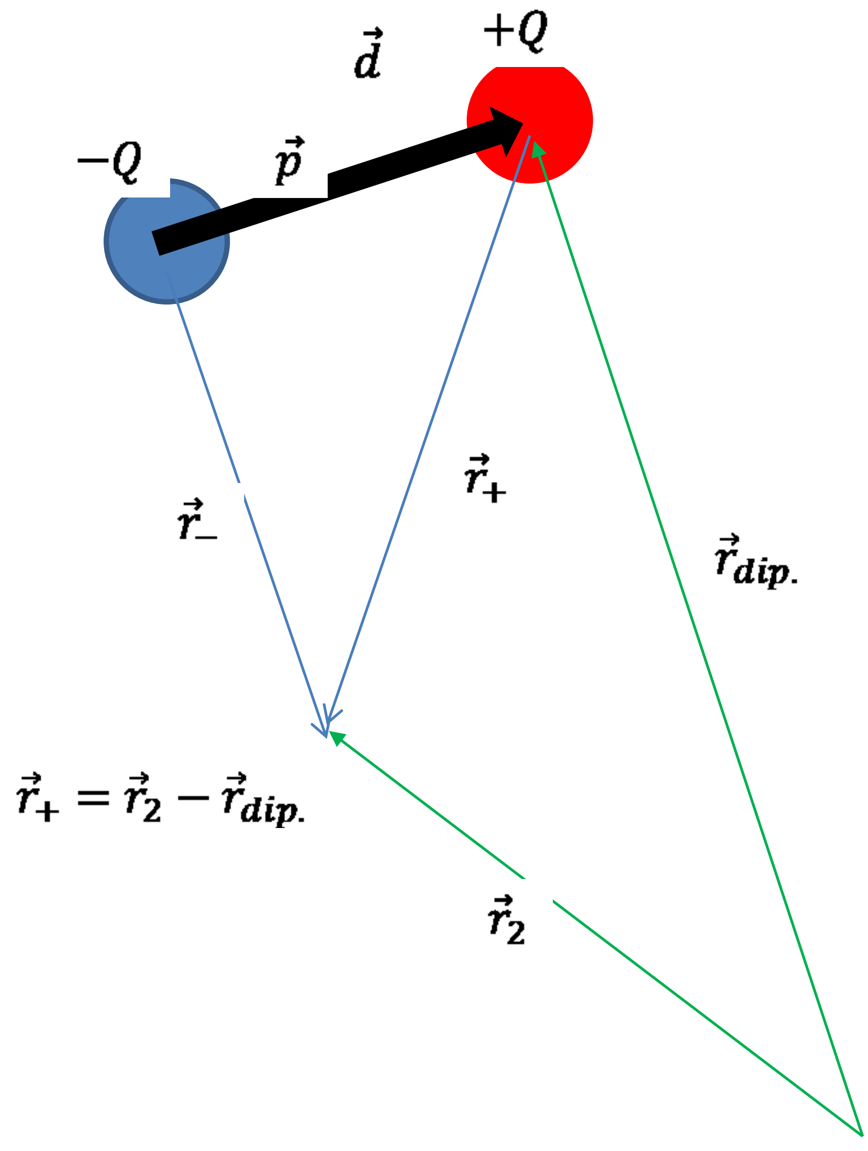
$$\varphi(\vec{r}_+) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+Q}{|\vec{r}_+|}$$

$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_+|} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_-|}$$

$$\vec{r}_- = \vec{d} + \vec{r}_+$$

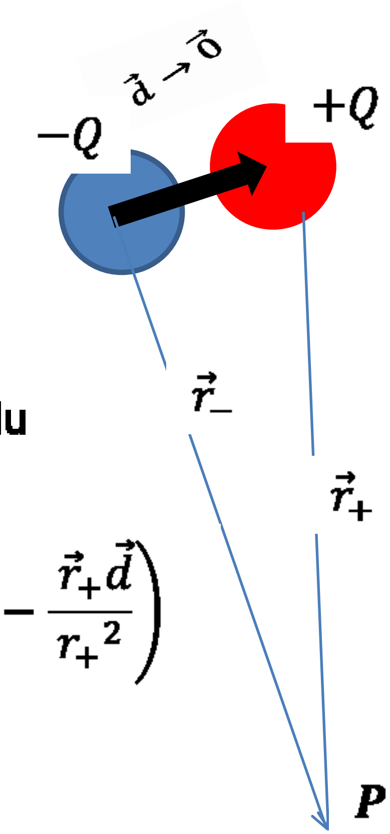
$$\varphi(\vec{r}_-) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{\left|\vec{r}_+ + \vec{d}\right|}$$

$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_+|} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}_+ + \vec{d}\right|}$$



elektrické pole bodového dipólu

$$\varphi(\vec{r}_-) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{\left|\vec{r}_+ + \vec{d}\right|}$$



předpokládáme, že $\vec{d}$ je velmi malé, pak $\varphi(\vec{r}_-)$ v rozvoji do prvního řádu

$$\varphi(\vec{r}_-) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{{r_+}^2 + d^2 + 2\,\vec{r}_+\,\vec{d}}} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_+\sqrt{1 + \frac{2\,\vec{r}_+\vec{d}}{{r_+}^2}}} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_+}\left(1 - \frac{\vec{r}_+\vec{d}}{{r_+}^2}\right)$$

$$\varphi(\boldsymbol{P}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_+|} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_-|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_+|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}_+|}\left(1 - \frac{\vec{r}_+\vec{d}}{{r_+}^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}_+|}\left(\frac{\vec{r}_+\vec{d}}{|\vec{r}_+|^2}\right)$$

$$\varphi(\boldsymbol{P}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_+\vec{d}}{|\vec{r}_+|^3}\right)$$

elektrické pole bodového dipólu

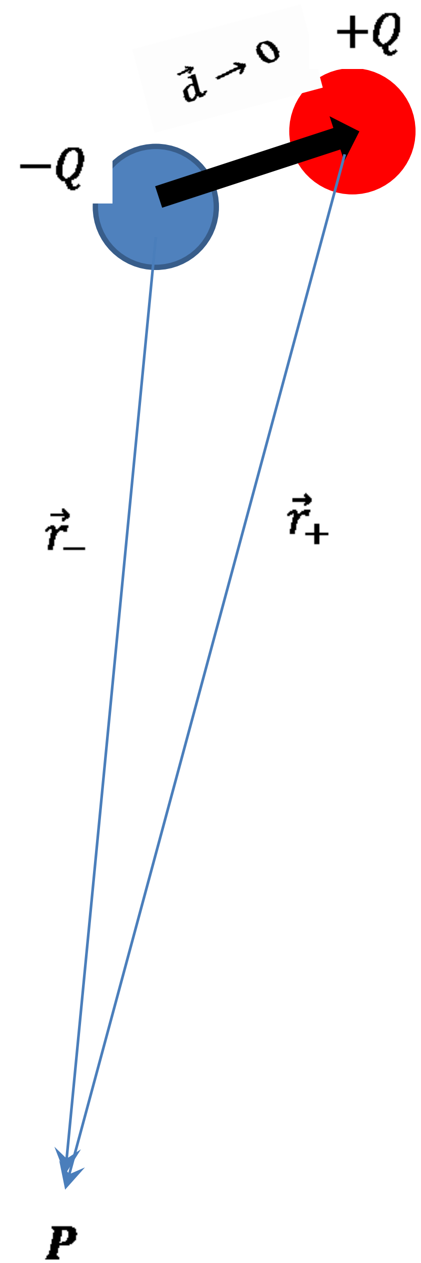
$$\varphi(\boldsymbol{P}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_{dip.})\vec{d}}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_{dip.}\right|^3}\right) \qquad \vec{r}_+ = \vec{r}_2 - \vec{r}_{dip.}$$

označíme $\vec{p} = Q\vec{d}$ a $\vec{r}_+ \equiv \vec{r}$

$$\varphi(\boldsymbol{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$

s využitím $-\vec{\nabla}_{(\vec{r}_2)}\frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\varphi(\boldsymbol{P}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)$$



interpretace výrazu

$$\varphi(\boldsymbol{P}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) \qquad \vec{p} = Q\vec{d}$$

$$\varphi(\boldsymbol{P}) = -\vec{d} * \vec{\nabla}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_+}$$

$-\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_+}$ je intenzita v bodě $\boldsymbol{P}$ od bodového náboje +Q

intenzita vynásobena malým posunutím $\vec{d} \to 0$ je rozdíl potenciálů v bodě $\boldsymbol{P}$ a v bodě $\boldsymbol{P} + \vec{d}$, tedy $\varphi_{+Q}(P) - \varphi_{+Q}\left(\boldsymbol{P} + \vec{d}\right)$.

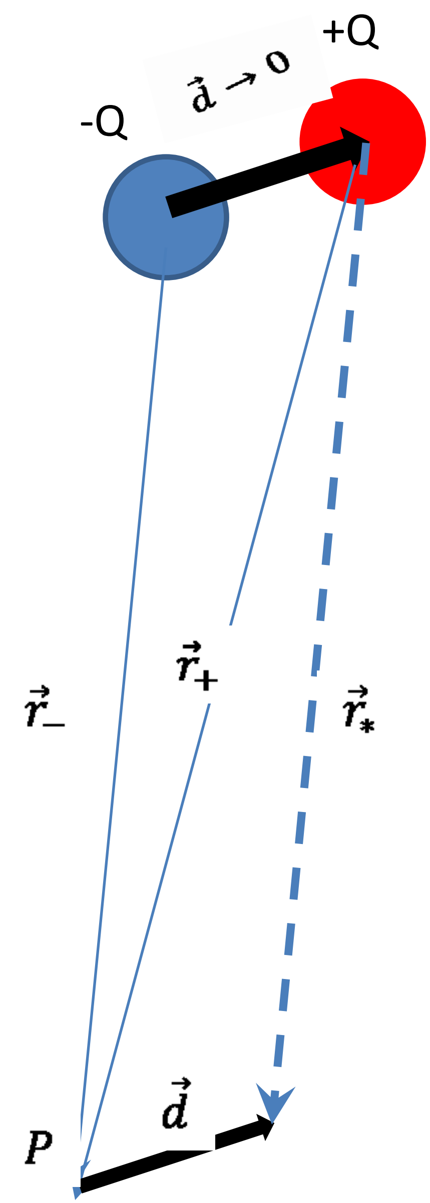
$$\varphi_{+Q}(\boldsymbol{P}) - \varphi_{+Q}\left(\boldsymbol{P} + \vec{d}\right) = \vec{d} * \vec{E}_{Q,\vec{r}_+}$$

Podle obrázku je potenciál od náboje +Q v bodě $\boldsymbol{P} + \vec{d}$
co do velikosti roven potenciálu od náboje –Q v bodě $\boldsymbol{P}$

$$\varphi_{+Q}\left(\boldsymbol{P} + \vec{d}\right) = -\varphi_{-Q}(\boldsymbol{P})$$

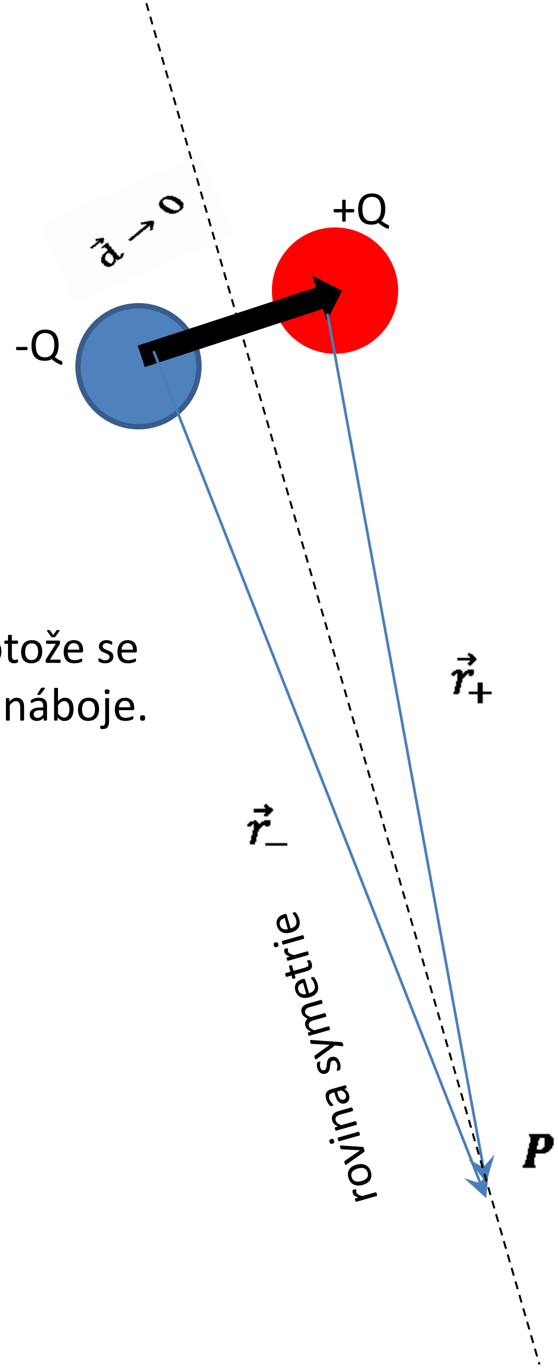
Potenciál bodového dipólu je součet potenciálů od obou nábojů

$$\varphi(P) = \varphi_{+Q}(\boldsymbol{P}) + \varphi_{-Q}(\boldsymbol{P}) = \varphi_{+Q}(\boldsymbol{P}) - \varphi_{+Q}\left(\boldsymbol{P} + \vec{d}\right) = \vec{d} * \vec{E}_{Q,\vec{r}_+} = -\vec{d} * \vec{\nabla}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_+}$$



elektrické pole bodového dipólu

$$\varphi(\boldsymbol{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$



V nekonečnu je potenciál nulový . V rovině symetrie je nulový, protože se potenciál kladného náboje kompenzuje s potenciálem záporného náboje.

intenzita elektrické pole bodového dipólu

$$\vec{E}(P) = -\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$

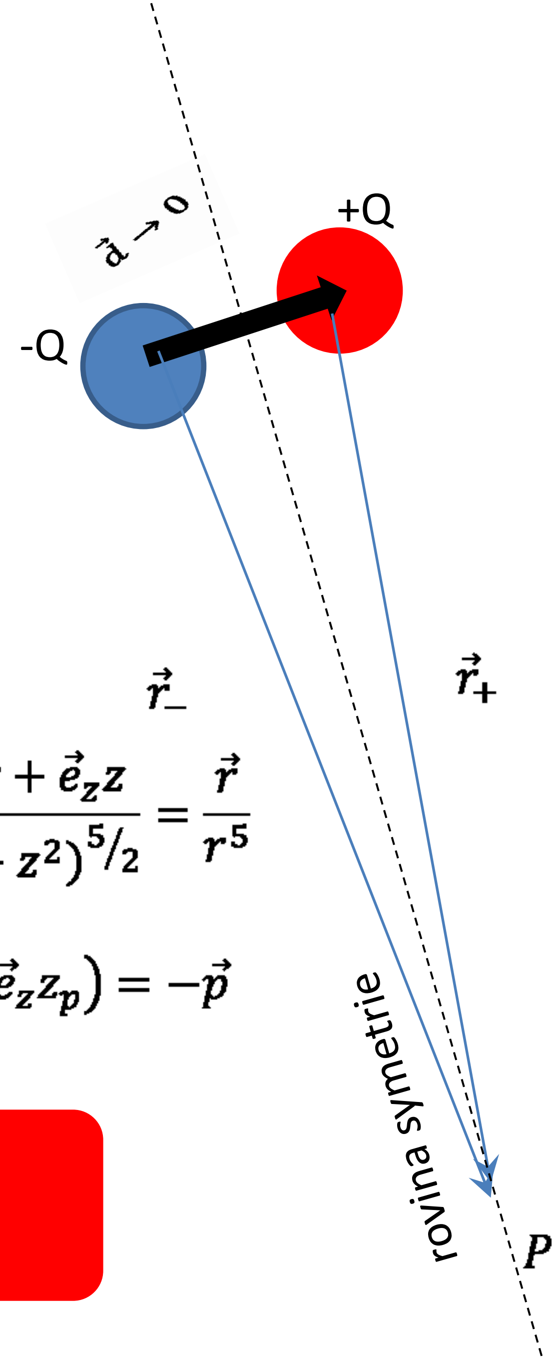
$$\vec{E}(P) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$-\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{p}\vec{r}\vec{\nabla}\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\vec{\nabla}(\vec{p}\vec{r})$$

$$-\vec{\nabla}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{3}{2}\frac{\vec{\nabla}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 3\frac{\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{\vec{r}}{r^5}$$

$$-\vec{\nabla}\vec{r}\vec{p} = \vec{e}_x\frac{\partial x x_p}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial y y_p}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial z z_p}{\partial z} = -\left(\vec{e}_x x_p + \vec{e}_y y_p + \vec{e}_z z_p\right) = -\vec{p}$$

$$-\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right) = 3\vec{p}\vec{r}\frac{\vec{r}}{r^5} - \vec{p}\frac{1}{r^3}$$



elektrický potenciál bodového dipólu

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$

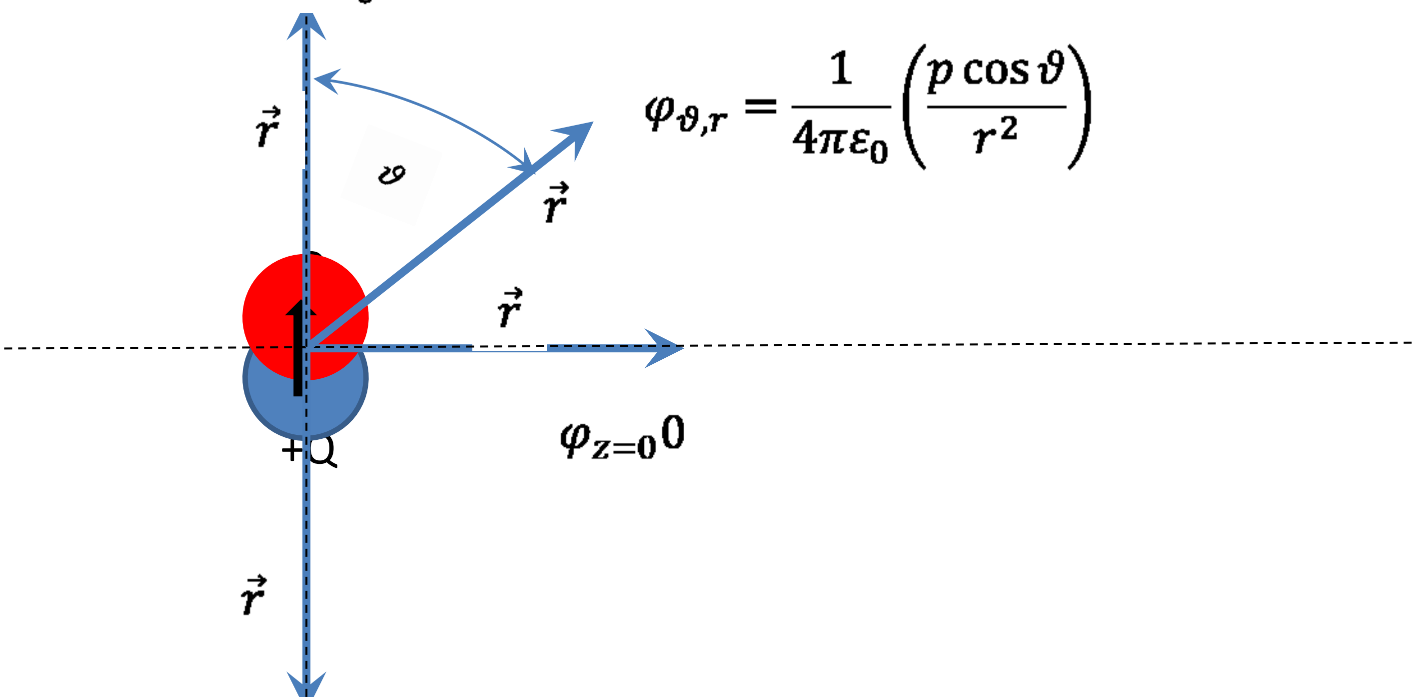
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\vec{p}\vec{r}\,\frac{\vec{r}}{r^5} - \vec{p}\,\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\vec{d} \to 0$$

$$\vec{p} = Q\vec{d}$$

$$\varphi_{+z,r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{r^2}\right)$$

$$\varphi_{\vartheta,r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p\cos\vartheta}{r^2}\right)$$

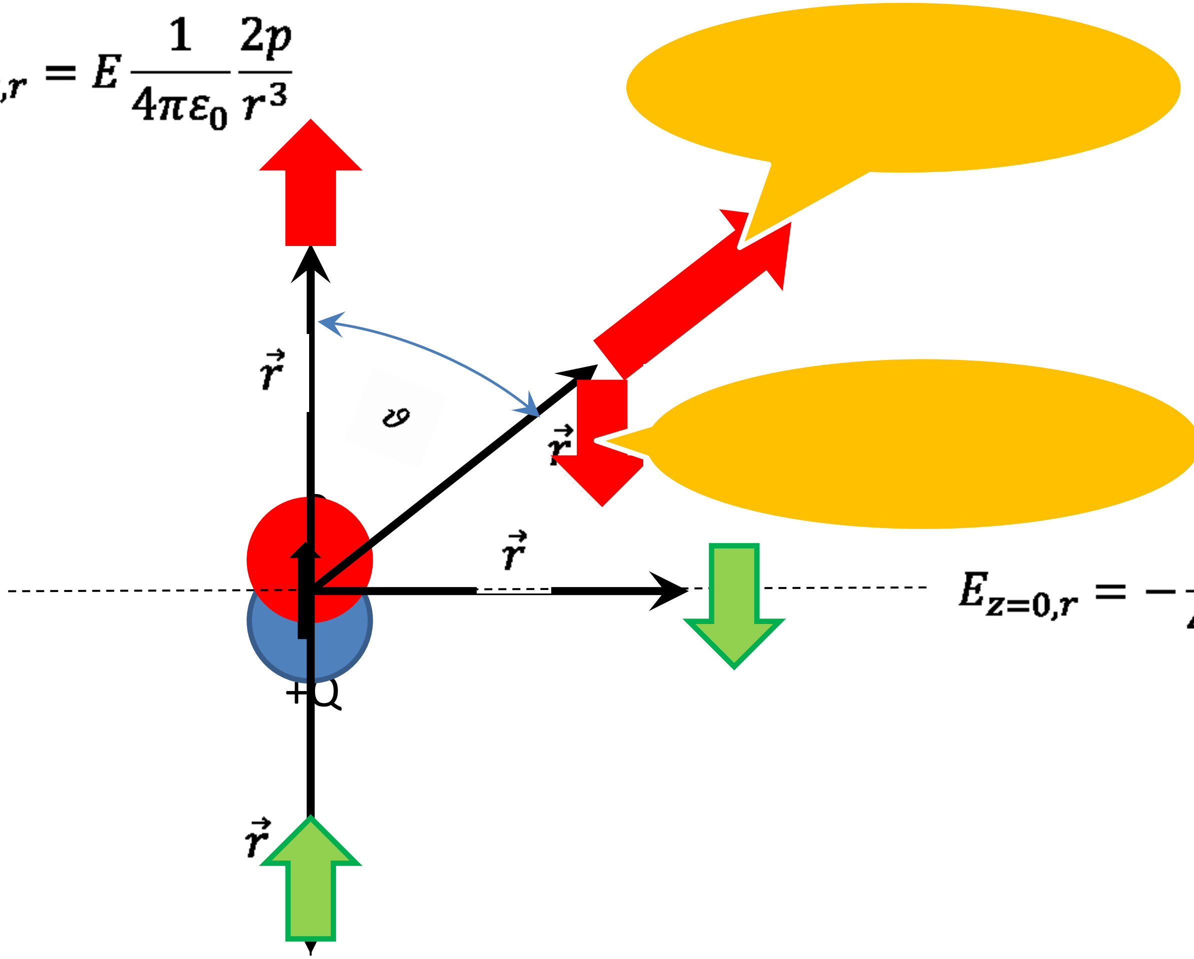


$$\varphi_{-z,r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{r^2}\right)$$

intenzita elektrické pole bodového dipólu

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$E_{z,r} = E\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$



$$E_{z=0,r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{d} \to 0$$

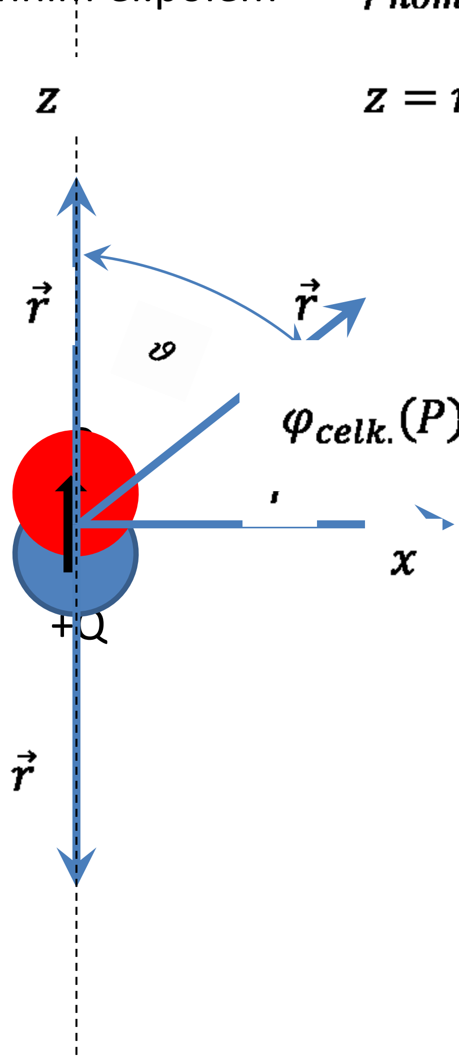
$$\vec{p} = Q\vec{d}$$

$$E_{-z,r} = -E\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

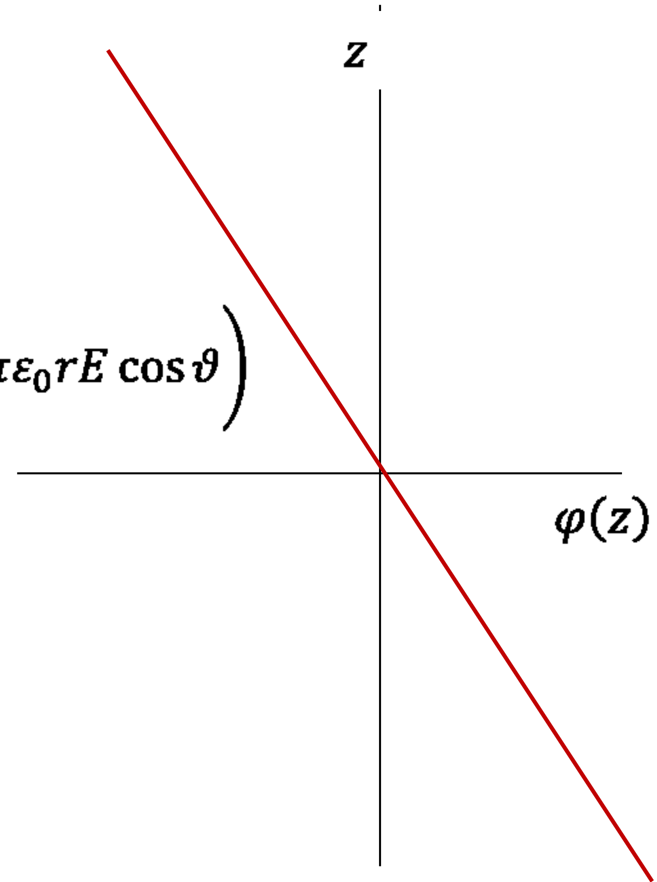
superpozice pole bodového dipólu $$\varphi_{dip.}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$

s homogenním el.polem $$\varphi_{homog.}(P) = -rE\cos\vartheta$$

$$z = r cos(\vartheta)$$

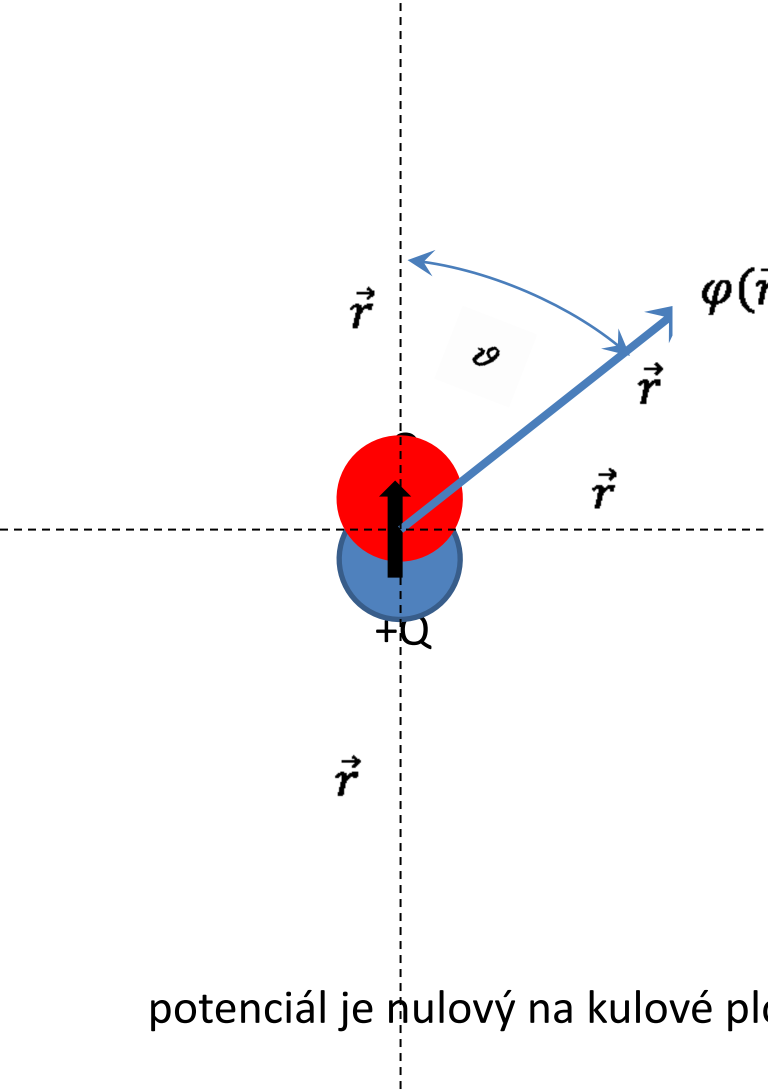


$$\varphi_{celk.}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p\cos\vartheta}{r^2} - 4\pi\varepsilon_0 rE\cos\vartheta\right)$$



superpozice pole bodového dipólu s homogenním el.polem

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p\cos\vartheta}{r^2} - 4\pi\varepsilon_0 rE\cos\vartheta\right)$$

Množina bodů pro kterou platí $\varphi(r) = 0$

$$\frac{p\cos\vartheta}{r^2} - 4\pi\varepsilon_0 rE\cos\vartheta = 0$$

$$\frac{p\cos\vartheta}{r^2} = 4\pi\varepsilon_0 rE\cos\vartheta$$

$$\frac{p}{r^2} = rE4\pi\varepsilon_0$$

potenciál je nulový na kulové ploše o poloměru

$$r^3 = \frac{4\pi\varepsilon_0 p}{E}$$