elektrická polarizace

28.3.2023

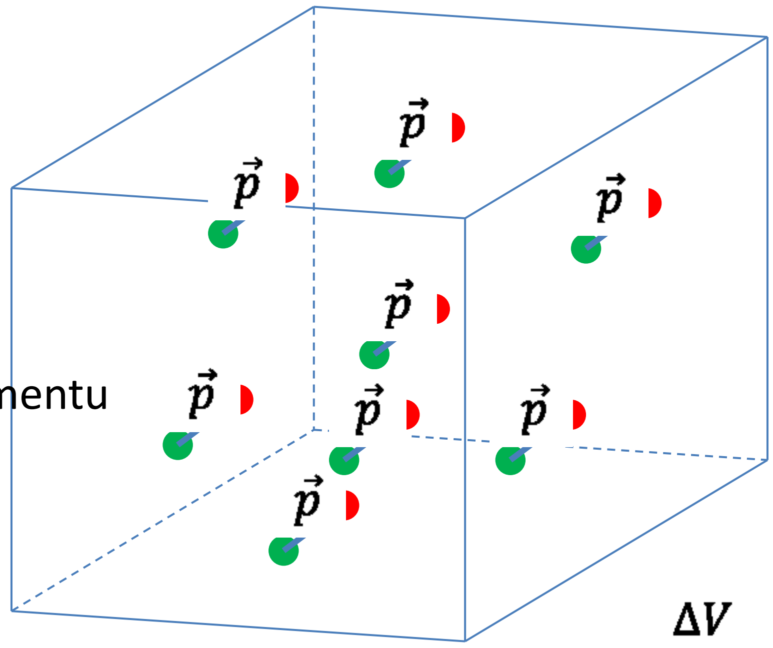
osnova

- Výpočet elektrického potenciálu vně zpolarizovaného dielektrika
- Zavedení termínu vázaného povrchového náboje a vázaného objemového náboje
- Výpočet elektrického pole homogenně zpolarizované dielektrické desky
- Výpočet elektrického pole homogenně zpolarizované dielektrické koule

V objemu ΔV je rovnoměrně rozloženo $N_{dip,\Delta V}$ dipólů
s elektrický dipólový moment $\vec{p}$

$$n_{obj}(\vec{r}) = \frac{N_{dip,\Delta V}}{\Delta V}$$

$n_{obj}(\vec{r})$ objemová hustota počtu dipólů



objemová hustota elektrického dipólového momentu

$$\vec{P}_{pol}(\vec{r}) = \frac{N_{dip,\Delta V} * \vec{p}}{\Delta V}$$

$\vec{P}_{pol}(\vec{r})$ se nazývá vektor polarizace

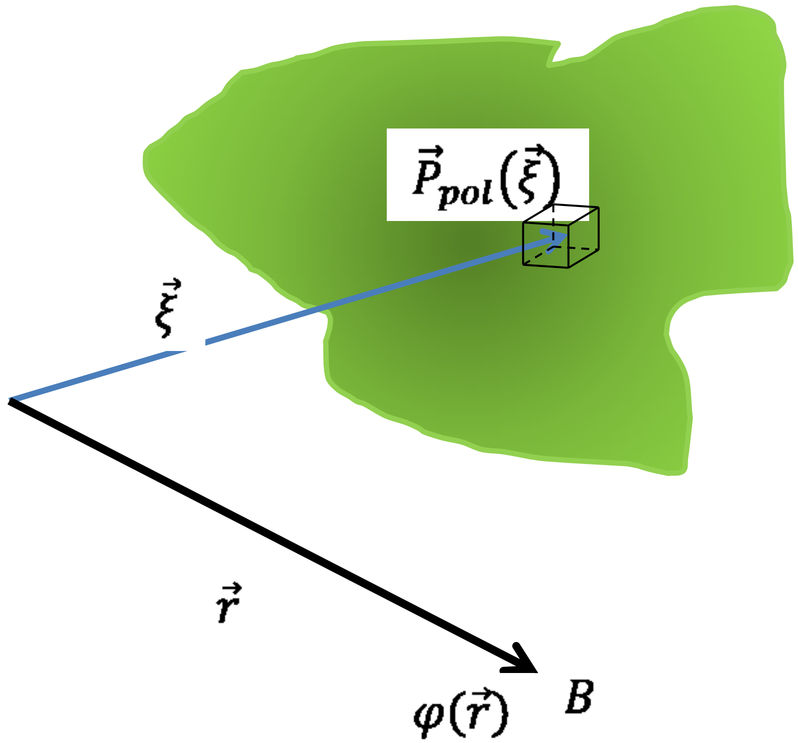
elektrický dipólový moment objemu ΔV

$$\vec{P}_{\Delta V} = \Delta V * \vec{P}_{pol}(\vec{r})$$

objem s vektorem polarizace $\vec{P}_{pol}(\vec{\xi})$

elektrický potenciál $\Delta V\varphi(\vec{r})$ v bodě B elektrického dipólového momentu objemu ΔV

$$\Delta V\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{P}_{pol}(\vec{\xi}) * (\vec{r} - \vec{\xi})\Delta V}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^3}$$

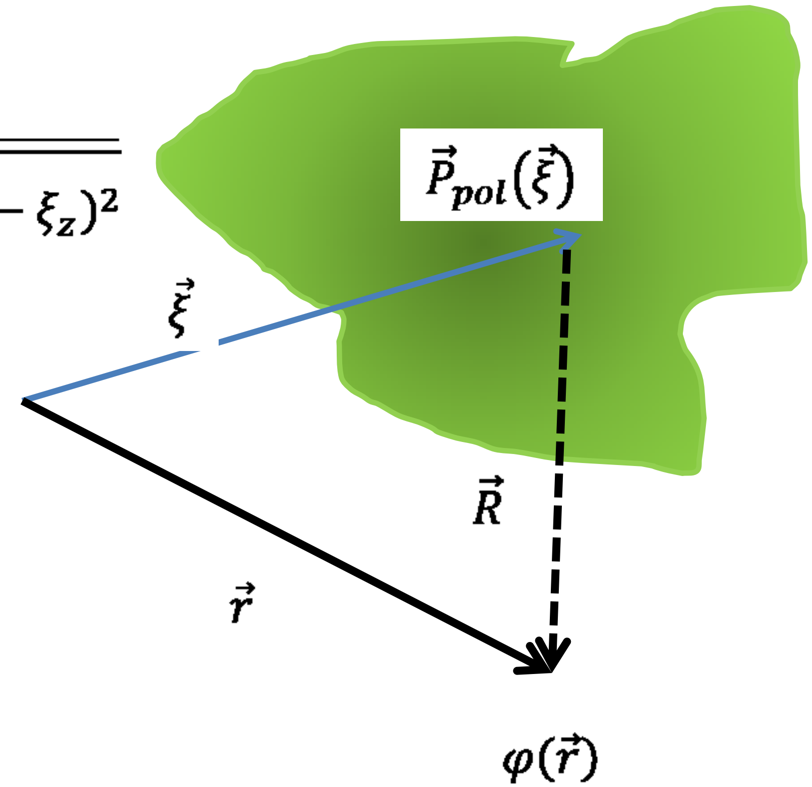


potenciál v bodě B od celého objemu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\vec{P}_{pol}(\vec{\xi})(\vec{r} - \vec{\xi})}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^3} dV$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\vec{P}_{pol}(\vec{\xi})(\vec{r}-\vec{\xi})}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^3} dV$$

$$\vec{\nabla}_\xi \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|} = \vec{\nabla}_\xi \frac{1}{\sqrt{(x-\xi_x)^2 + \left(y-\xi_y\right)^2 + (z-\xi_z)^2}}$$



$$\vec{\nabla}_\xi \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|} = -\frac{1}{2} * \frac{2 * \left(\vec{r}-\vec{\xi}\right)(-1)}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^3}$$

$$\vec{\nabla}_\xi \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|} = \frac{\left(\vec{r}-\vec{\xi}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \vec{P}_{pol}(\vec{\xi})\, \vec{\nabla}_\xi \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|} dV$$

Matematická poznámka: $div(f * \vec{v}) = f * div(\vec{v}) + \vec{v} * grad(f)$

$\vec{P}_{pol}(\vec{\xi})$ je vektor polarizace

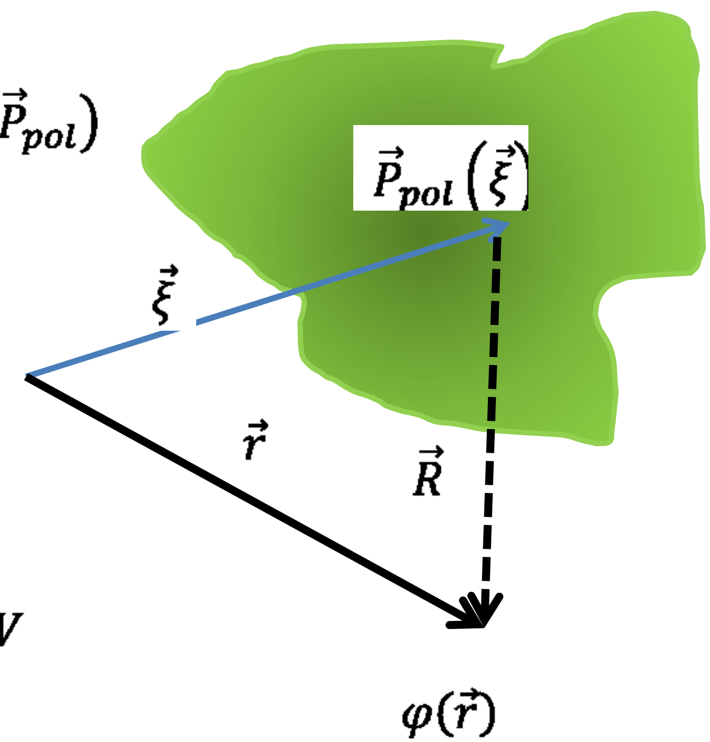
Pro $\vec{R}$ platí $\vec{R} = \vec{r} - \vec{\xi}$ Viz obr.

$\vec{\nabla}_{\xi}$ derivujeme podle souřadnic ξ

$$\vec{P}_{pol}(\vec{\xi})\,\vec{\nabla}_{\xi}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|} = div\left(\vec{P}_{pol}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\right) - \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\left(\vec{\nabla}_{\xi}\vec{P}_{pol}\right)$$

Jiný zápis téhož $\vec{\nabla}_{\xi} \equiv grad_{\xi}$

$$\vec{P}_{pol}(\vec{\xi})\,grad_{\xi}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|} = div\left(\vec{P}_{pol}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\right) - \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\left(div_{\xi}\vec{P}_{pol}\right)$$



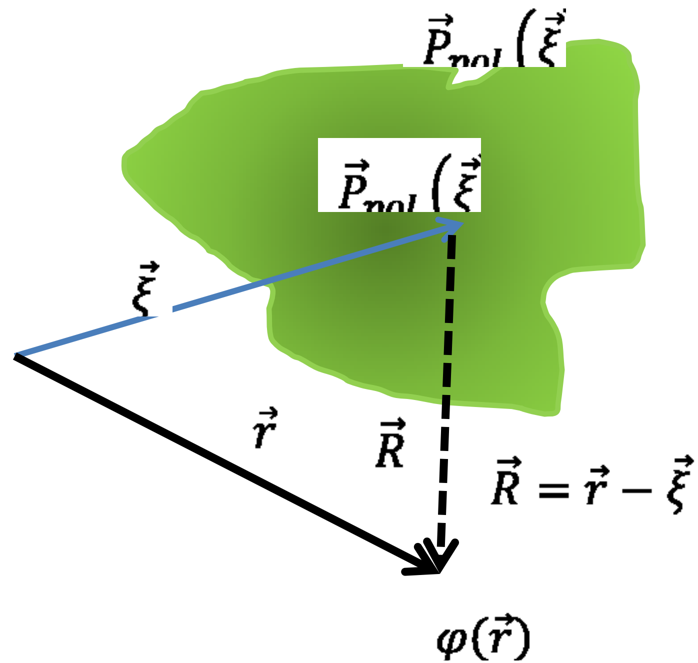
Pro potenciál $\varphi(\vec{r})$ platí:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left(\vec{\nabla}_{\xi}\left(\vec{P}_{pol}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\right) - \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\left(\vec{\nabla}_{\xi}\vec{P}_{pol}\right)\right)dV$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left(\vec{\nabla}_\xi\left(\vec{P}_{pol}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\right)-\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\left(\vec{\nabla}_\xi\vec{P}_{pol}\right)\right)dV$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\iiint\vec{\nabla}_\xi\left(\vec{P}_{pol}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\right)dV-\iiint\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\left(\vec{\nabla}_\xi\vec{P}_{pol}\right)dV\right)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint\vec{P}_{pol}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}d\vec{S}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|}\left(\vec{\nabla}_\xi\vec{P}_{pol}\right)dV$$



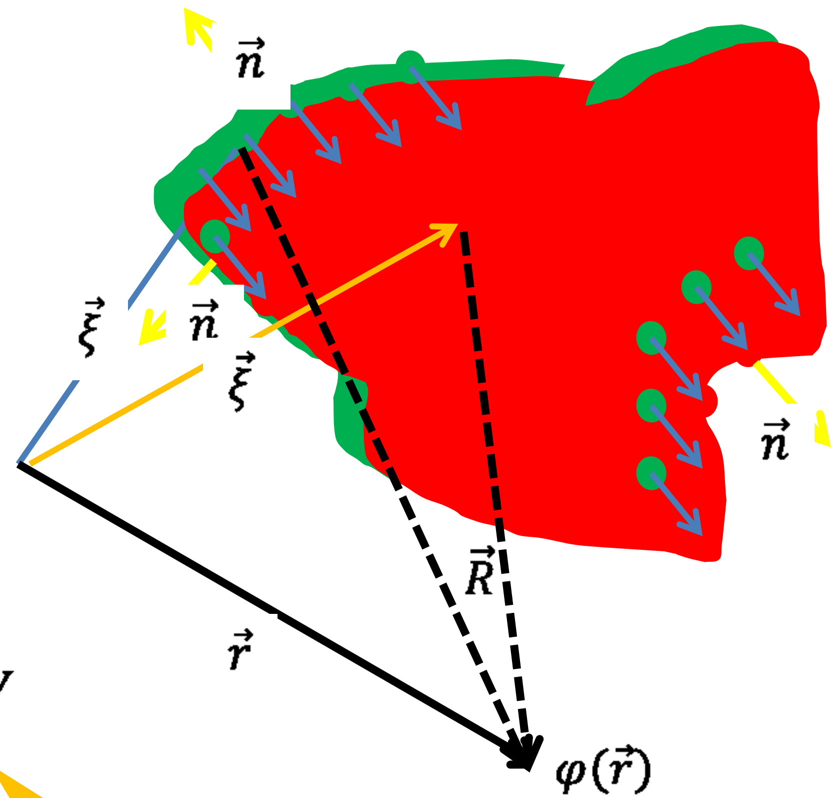
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint \vec{P}_{pol}(\vec{\xi}) \frac{1}{|\vec{r}-\vec{\xi}|} d\vec{S} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{1}{|\vec{r}-\vec{\xi}|} (\vec{\nabla}_\xi \vec{P}_{pol}(\vec{\xi})) dV$$

Označíme:

$\vec{P}_{pol}\left(\vec{\xi}\right)\vec{n} = \sigma_s\left(\vec{\xi}\right)$ plošná hustota vázaného povrch. náboje

$-\vec{\nabla}_\xi \vec{P}_{pol}\left(\vec{\xi}\right) = \varrho\left(\vec{\xi}\right)$ objemová hustota vázaného náboje

Kde $\vec{P}_{pol}\left(\vec{\xi}\right)$ je vektor polarizace

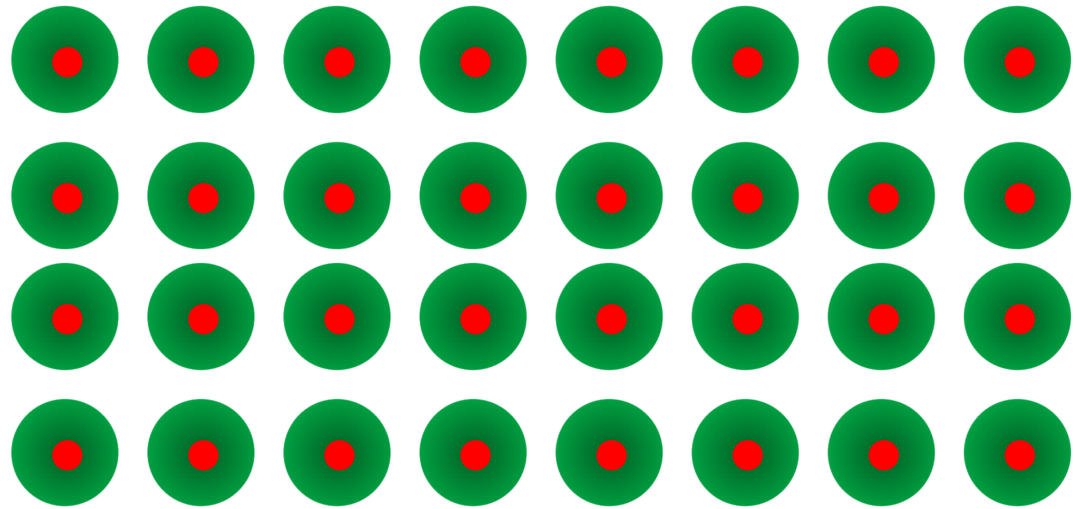


$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint \frac{\sigma_s\left(\vec{\xi}\right)}{|\vec{r}-\vec{\xi}|} d\vec{S} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\varrho\left(\vec{\xi}\right)}{|\vec{r}-\vec{\xi}|} dV$$

El. potenciál od povrchového náboje

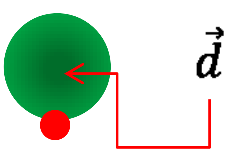
El. potenciál od objemového náboje

příklad

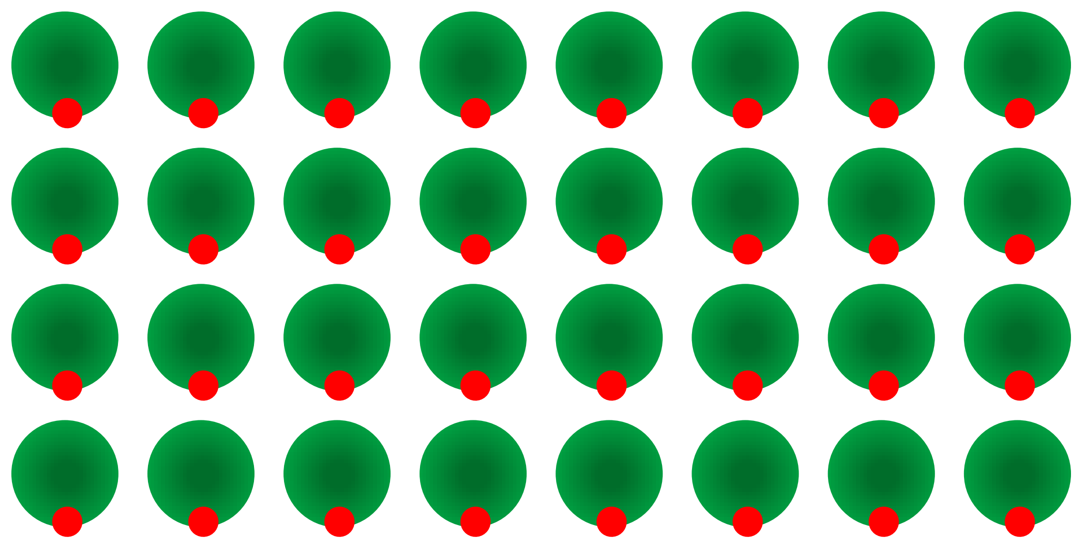


ν objemová hustota počtu el. dipólů

$\vec{p}$ elektrický dipólový moment jednoho dipólu



$$\vec{p} = Q\vec{d}$$



vektor polarizace $\vec{P} = \nu\vec{p}$

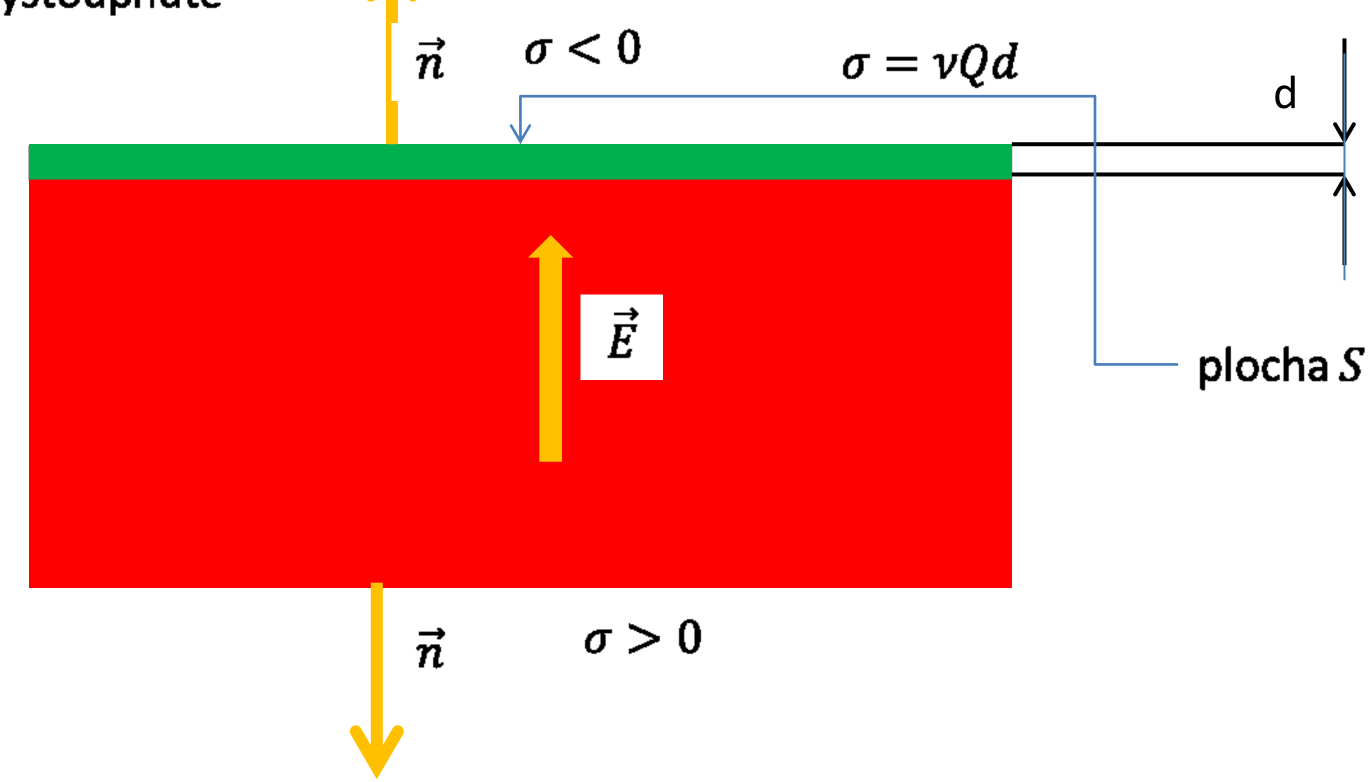
příklad: homogenně polarizovaná deska dielektrika

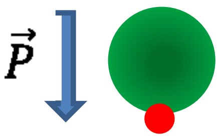
plošná hustota vázaného povrch. náboje $\sigma = \vec{P} * \vec{n}$

vektor polarizace $\vec{P} = \nu\vec{p}$

$V = S + d$ objem „vystoupnuté“ části (zelená plocha)

$\sigma = \nu p = \nu Q d$



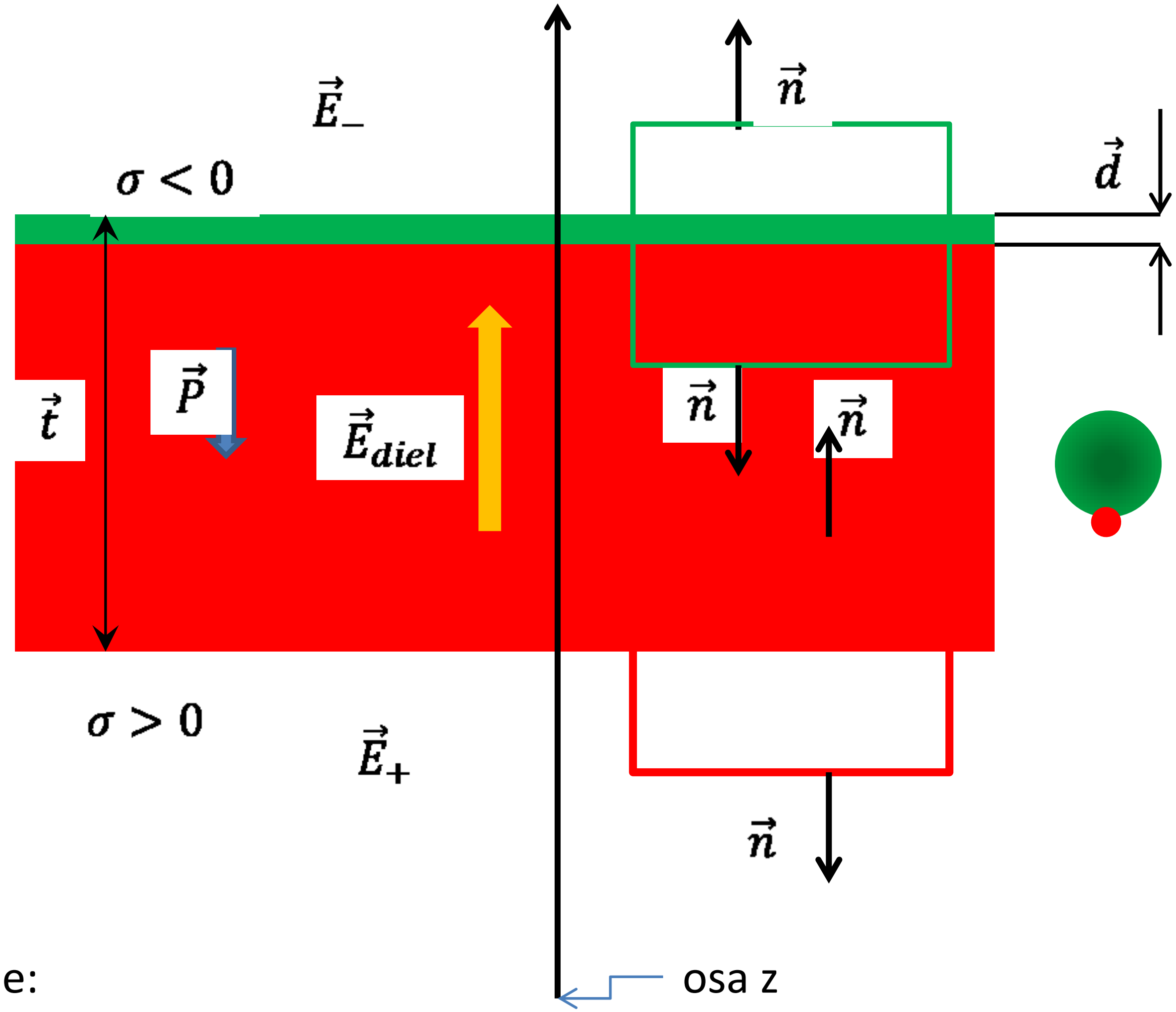


z názoru plyne, že plošná hustota povrchového náboje je rovna: Objem V × objemová hustota počtu dipólů ν ×náboj Q, děleno plochou S, $Q * d * \nu * S/S$, což je vektor polarizace $\vec{P}$ vynásobený skalárně vektorem vnější normály $\vec{n}$

intenzita elektrického pole uvnitř homogenně polarizované („nekonečné“) dielektrické desky tl. t

vektor polarizace $\vec{P} = \nu\vec{p}$

$\sigma = \vec{P} * \vec{n}$ $\sigma = \nu p = \nu Q d$



pro normálové složky intenzity elektrického pole v okolí elektricky nabité vrstvy platí

$$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_- - E_{diel} = -\frac{P}{\varepsilon_0}$$

$$E_{diel} - E_+ = \frac{P}{\varepsilon_0}$$

Z předchozích dvou rovnic plyne:

$$E_{diel} = \frac{P}{\varepsilon_0} \qquad E_- - E_+ = 0$$

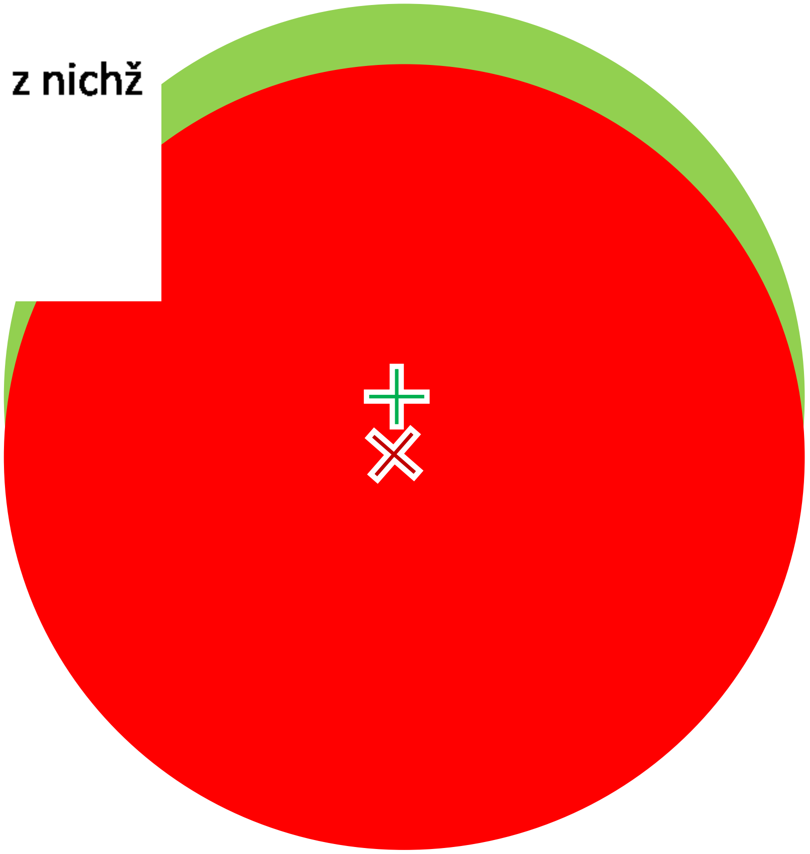
$E_- = E_+$, jinými slovy tato vrstva polarizovaného dielektrika nezmění vnější elektrické pole vně dielektrika

Intenzita elektrického pole homogenně polarizované dielektrické koule

Uvažujme homogenně polarizovanou dielektrickou kouli o poloměru R s vektorem polarizace $\vec{P}(\vec{r}) \equiv \vec{P} = \overrightarrow{konst}$

Určete elektrické pole vně a uvnitř koule

Pole homogenně polarizované dielektrické koule odpovídá elektrickému poli dvou stejných nábojů, z nichž každý je rovnoměrně rozložen v kouli o poloměru R. Středy koulí jsou vůči sobě posunuty o vzdálenost $\vec{d}$



Pole vně homogenně polarizované koule tedy odpovídá poli elektrického dipólu s dipólovým momentem

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 * \vec{P}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\vec{r}}{|\vec{r}|^2|\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\cos\vartheta}{|\vec{r}|^2}$$

$$|\vec{r}| \geq R$$

$$\vec{P}(\vec{r}) \equiv \vec{P} = \overrightarrow{konst}$$

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 * \vec{P}$$

$$\vec{P} \equiv (0,0,-P\ )$$

$$|\vec{r}| \geq R$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{|\vec{r}|^2|\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{|\vec{r}|^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 * P\cos\vartheta}{|\vec{r}|^2}$$

$$\varphi(R,\vartheta) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 * P\cos\vartheta}{|\vec{r}|^2} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{R^3 * P\cos\vartheta}{|\vec{r}|^2}$$

$$\varphi(R,\vartheta) = -\frac{1}{3\varepsilon_0}R * P\cos\vartheta$$

$$\varphi(R,0) - \varphi(R,\pi) = -\frac{1}{3\varepsilon_0}R * P(\cos 0 - \cos\pi)$$

$$\varphi(R,0) - \varphi(R,\pi) = -\frac{2}{3\varepsilon_0}R * P \qquad \varphi(R,0) < \varphi(R,\pi)$$

$$E = \frac{\Delta\varphi}{2R} = \frac{P}{3\varepsilon_0} \qquad \vec{E} \equiv (0,0,E)$$