8.2 Posloupnosti a řady potřetí — funkce

Problematika číselných posloupností a řad se možná jeví jako jakási „hra" s čísly, hromadnými body a nekonečny. Bez jejího pochopení bychom se však nemohli zabývat chováním posloupností a řad funkcí, které mají značný praktický význam. Některých možností použití řad funkcí jsme se dotkli již v úvodu k této kapitole. Také řešení některých diferenciálních rovnic jsou vyjádřena řadami funkcí. V tomto odstavci využijeme znalostí o číselných posloupnostech a řadách k formulaci definic konvergentních posloupností funkcí a řad a charakterizaci jejich vlastností.

8.2.1 Posloupnosti funkcí — není konvergence jako konvergence

Vzpomeňme na definici číselné posloupnosti (8.1) — šlo o zobrazení, které přiřazovalo každému přirozenému číslu $n \in \mathbf{N}$ nějaké reálné číslo. Nyní půjde o to, přiřadit přirozeným číslům funkce. Uvažujme o všech reálných funkcích proměnné x definovaných na tomtéž definičním oboru $D \subset \mathbf{R}$, většinou na otevřeném, uzavřeném nebo jiném intervalu, nebo i na obecnější množině, která může být třeba sjednocením intervalů. V definicích a větách se pro jednoduchost omezíme na situace, kdy D je interval. Množinu všech funkcí definovaných na D označme $\mathcal{F}_D$. Později budeme pracovat s podmnožinami funkcí, které mají předepsané vlastnosti. Například jsou spojité, diferencovatelné (mají derivaci), apod.

Zobrazení

$$\mathbf{N} \ni n \longrightarrow f_n(x) \in \mathcal{F}_D \tag{8.8}$$

nazýváme *posloupnost funkcí*.

V některých tvrzeních potřebujeme pojem monotónní posloupnosti funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ se nazývá na intervalu D *neklesající*, resp. *nerostoucí*, je-li každá číselná posloupnost $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbf{N}}, a \in D$, neklesající, resp. nerostoucí. Neklesající a nerostoucí posloupnosti funkcí nazýváme monotónní.

Také posloupnosti funkcí mohou mít své limity. Těmi pochopitelně jsou opět funkce. Vyčíslíme-li všechny funkce dané posloupnosti (8.8) v určitém bodě $a \in D$, můžeme se zajímat o to, zda konverguje číselná posloupnost $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Pokud ano, říkáme, že posloupnost funkcí *konverguje v bodě* a. Bodů, v nichž posloupnost konverguje, může být více, dokonce mohou vyplnit celou množinu D. Odtud se odvíjí definice *bodové konvergence* posloupnosti funkcí.

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *konverguje bodově na množině* D, jestliže konvergují číselné posloupnosti $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbf{N}}$ v každém bodě $a \in D$. Funkci

$$f : D \ni x \longrightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$$

nazveme *limitou posloupnosti funkcí* $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Zapisujeme také $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} \to f(x)$ na D.

Obdobně samozřejmě můžeme hovořit o bodové konvergenci na nějaké podmnožině oboru D. V následujícím příkladu si formulujeme definici bodové konvergence jiným, ale ekvivalentním způsobem. Tato formulace bude vycházet přímo z definice konvergence číselné posloupnosti. Bude sice zdánlivě složitější, ale s výhodou se pak od ní „odrazíme" při vymezení „lepšího" typu konvergence, tzv. *konvergence stejnoměrné*.

Příklad 8.21: Definice bodové konvergence jinak

Přeformulujme tedy definici bodové konvergence posloupnosti funkcí: Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ bodově konverguje na množině D k funkci $f(x)$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ a pro každý bod $x \in D$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Uvědomme si, že index N, od kterého výše uvedená nerovnost platí, závisí obecně na tom, jak jsme zvolili ε a konkrétní bod x, v němž jednotlivé funkce posloupnosti i funkci $f(x)$ vyčíslujeme, tj. $N = N(\varepsilon, x)$. Obvyklé je, že čím menší ε volíme, tím větší vychází index N. Také obecně platí, že v některých bodech oboru D konverguje posloupnost „lépe" a v jiných „hůře". Také v bodech „horší" konvergence vychází index N větší.

Ukažme si předchozí obecné úvahy na příkladu velmi jednoduché posloupnosti funkcí, posloupnosti geometrické, pro niž platí $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. (Zahrnutí indexu $n = 0$ „do hry" je u mocninných posloupností obvyklé a nepřináší žádnou podstatnou změnu v definici posloupnosti, pouze přidává nultý člen.) Posloupnost je definována pro všechna $x \in \mathbf{R}$. Jejím kvocientem je právě x. Počítáme-li limitu $\lim_{n\to+\infty}\{x^n\}$, vidíme (a víme to už ze střední školy), že pouze pro $|x| < 1$ je tato limita vlastní a je rovna nule. Pro $x > 1$ je limita nevlastní a rovna $+\infty$, pro $x \leq -1$ posloupnost osciluje. Pro $x = 1$ jsou všechny členy posloupnosti rovny jedné, stejně tak jako její vlastní limita. Situaci ukazuje následující tabulka, která pro úplnost ukazuje také intervaly konvergence posloupnosti tvořené absolutními hodnotami funkcí $f_n(x) = x^n$.

	$\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$	limita	$\{\lvert x^n\rvert\}_{n\in\mathbf{N}}$	limita
$x \in (-\infty, -1)$	osciluje	neexistuje	diverguje	$+\infty$
$x = -1$	osciluje	neexistuje	konverguje	1
$x \in (-1, 1)$	konverguje	0	konverguje	0
$x = 1$	konverguje	1	konverguje	1
$x \in (1, \infty)$	diverguje	$+\infty$	diverguje	$+\infty$

Nejzajímavější částí reálné osy z pohledu bodové konvergence této posloupnosti je tedy interval $(-1, 1)$, kde posloupnost konverguje k identicky nulové funkci,

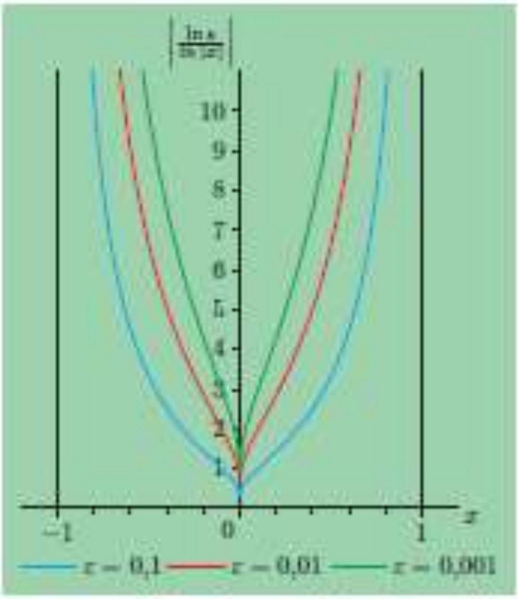
$$\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = f(x) = 0\,.$$

Dále předpokládejme, že $|x| < 1$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a sledujme, jak závisí index $N(\varepsilon, x)$, od kterého výše bude platit nerovnost $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, na volbě ε, zejména však na bodu x, ve kterém právě posloupnost vyčíslujeme.

Řešíme nerovnost $|x^n - 0| < \varepsilon$ vzhledem k n:

$$|x^n - 0| < \varepsilon \longrightarrow |x|^n < \varepsilon \longrightarrow n \ln|x| < \ln\varepsilon \longrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}.$$

Dokážete zdůvodnit, proč jsme při logaritmování výchozí nerovnosti ponechali znak nerovnosti a při další úpravě jsme jej museli otočit? Mohl by být podíl logaritmů $\ln\varepsilon$ a $\ln|x|$ také záporný? Co by to znamenalo? Abychom



Obr. 8.9 Konvergence geometrické posloupnosti funkcí v závislosti na kvocientu x.

se vyhnuli komplikacím s úvahami o znaménku výsledného výrazu, vezměme

$$N(\varepsilon, x) = 1 + \left[\left|\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}\right|\right],$$

přičemž hranaté závorky znamenají celočíselnou část výrazu v nich. Pro všechny indexy $n > N(\varepsilon, x)$ bude požadovaná nerovnost $|x^n| < 0$ bezpečně platit. Zaměřme se nyní na vztah pro index $N(\varepsilon, x)$. Jeho závislosti na ε se nemůžeme zbavit. Závislost veličiny $\left|\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}\right|$ na $|x|$ pro $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ ukazuje graf na obrázku 8.9 (pro $x \to 0$ se křivky blíží asymptoticky ke svislé ose). Blíží-li se kvocient x hodnotě 1 nebo −1, nabývá výraz pro N libovolně velkých hodnot. Jeho závislost na x bychom dokázali odstranit pouze tak, že bychom omezili obor konvergence posloupnosti z intervalu $(-1, 1)$ na nějaký menší interval, třeba $(-1 + \delta, 1 - \delta)$, $0 < \delta < 1$. Číslo δ by již mohlo být jakkoli malé. Pro index N bychom pak dostali hodnotu nezávislou na x, konkrétně

$$N(\varepsilon) = 1 + \left[\left|\frac{\ln\varepsilon}{\ln|1 - \delta|}\right|\right].$$

Pozn.: Všimněte si ještě, že posloupnost $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodově konverguje dokonce na zprava uzavřeném intervalu $(-1, 1]$. Její limitou je funkce, která je identicky nulová na otevřeném intervalu $(-1, 1)$, v bodě $x = 1$ nabývá hodnoty $f(1) = 1$. Je tedy v bodě $x = 1$ nespojitá, zatímco všechny funkce posloupnosti jsou spojité.

Úvahy v příkladu 8.21 mohou třeba i působit dojmem zbytečné „jemnosti". Jsou však důležité pro zavedení dalšího, podstatně silnějšího pojmu *stejnoměrné konvergence*.

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje *stejnoměrně na množině D* k funkci $f(x)$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ a pro každý bod $x \in D$ platí

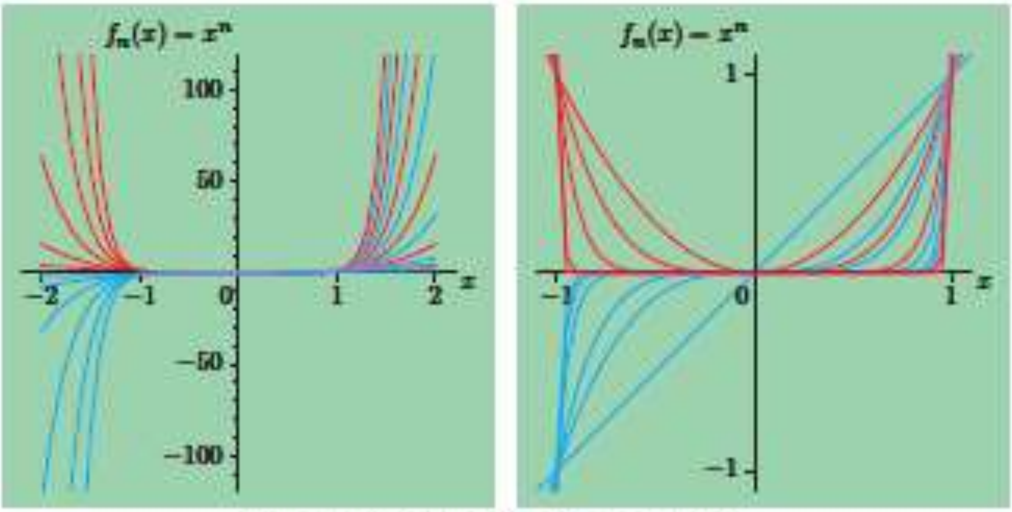
$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon\,.$$

Zapisujeme také $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} \rightrightarrows f(x)$ na D.

Čím se vlastně liší tato definice od definice bodové konvergence, kterou jsme alternativně (ekvivalentně) formulovali v příkladu 8.21? Zdá se, že se tyto dvě definice liší pouze jiným začleněním textu „pro každý bod $x \in D$", tedy fakticky pouze slovosledem. Tato odlišnost však není pouhou gramatickou hříčkou. Naopak, je velice podstatná. Zatímco slovosled v definici bodové konvergence znamená, že index N, od kterého výše platí požadovaná nerovnost, závisí jak na volbě ε, tak na volbě bodu $x \in D$, pro který konvergenci zjišťujeme, tj. $N = N(\varepsilon, x)$, závisí tento index v případě stejnoměrné konvergence pouze na volbě ε a pro celou množinu D je univerzální, tj. $N = N(\varepsilon)$.

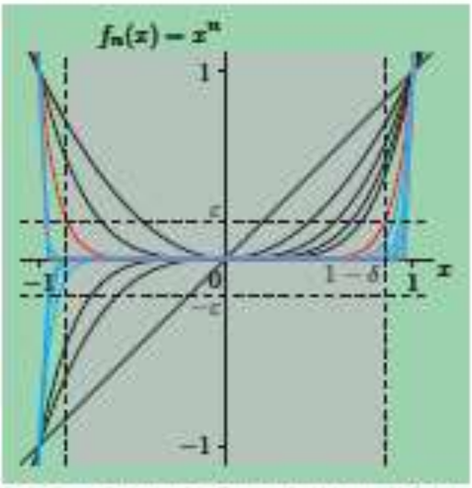
Příklad 8.22: Konverguje geometrická posloupnost funkcí stejnoměrně?

Na tuto otázku odpovídá řešení příkladu 8.21. Závislosti indexu N na bodu $x \in D$ se na celém intervalu $(-1, 1)$ nelze zbavit. Na intervalu $(-1, 1)$ tedy posloupnost konverguje bodově, ale nekonverguje stejnoměrně. Stačí však interval sebeméně zmenšit a na intervalu $(-1+\delta, 1-\delta)$, a dokonce na $[-1+\delta, 1-\delta]$ již posloupnost konverguje stejnoměrně. Na obrázcích 8.10 a 8.11 je znázorněno několik členů geometrické posloupnosti funkcí



Obr. 8.10 Geometrická posloupnost funkcí.

s vyznačením odlišnosti bodové konvergence na intervalu $(-1, 1)$ a stejnoměrné konvergence na intervalu $(-1+$ $+\delta, 1-\delta)$. Obrázek 8.10 vlevo znázorňuje grafy funkcí $y = x^n$ v intervalu $[-2, 2]$ pro n nabývající hodnot 1 až



Obr. 8.11 Geometrická posloupnost funkcí.

12. (Obrázek berte jako ilustrační. Vlivem značného rozsahu hodnot n nejsou některé grafy dobře rozlišeny.) Na obrázku 8.10 vpravo jsou funkce $y = x^n$ v intervalu bodové konvergence $(-1, 1]$ pro n postupně 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 25, 35, 50 a 100. Obrázek 8.11 znázorňuje vliv omezení intervalu konvergence na $(-1+\delta, 1-\delta)$. V tomto intervalu již posloupnost funkcí konverguje stejnoměrně. Pro konkrétně zvolené $\varepsilon = 0{,}2$ je graf odpovídající indexu $N(\varepsilon) = 10$, již nezávislému na x, vyznačen červeně, grafy pro hodnoty indexu $n = 15, 25, 35, 50, 75$ a 100, tj. $n > N(\varepsilon)$, jsou vyznačeny modře, grafy pro ostatní indexy, tj. $n = 1, 2, 3, 4, 5$, jsou černé. Při omezení na interval $(-1+\delta, 1-\delta) = (-0{,}85, 0{,}85)$ leží v intervalu $(-0{,}2, 0{,}2)$ všechny grafy funkcí $y = x^n$ pro $n > 10$.

Nakonec uvažme libovolný bod $x \in (-1, 1)$ a zvolme $\delta > 0$ tak, aby $-1+\delta < x < 1-\delta$. V intervalu $(-1+\delta, 1-\delta)$ posloupnost konverguje stejnoměrně. Pro každý bod x z intervalu $(-1, 1)$ tedy dokážeme nalézt takové jeho okolí, v němž posloupnost konverguje stejnoměrně. Říkáme, že na intervalu $(-1, 1)$ konverguje posloupnost *lokálně stejnoměrně*. Z předchozích úvah také vyplývá, že posloupnost konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném podintervalu intervalu $(-1, 1)$.

Vzpomenete si ještě na Cauchyovo–Bolzanovo kritérium konvergence číselných posloupností? Toto kritérium říkalo, že číselná posloupnost je konvergentní právě tehdy, když jsou její členy s dostatečně vysokými indexy „natěsnány" libovolně blízko sebe. V matematickém jazyce to formulovala věta 8.3 — pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje takový index N, že pro všechny dvojice indexů n a $n+m$, kde $n > N$ a m je libovolné, je $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$. Také pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí taková věta platí, index N však musí být „univerzální" pro celý interval hodnot proměnné x, které se věta týká. Může (a obecně bude) záviset na volbě ε, ne však na x.

Věta 8.8 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro posloupnosti funkcí): *Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f_n(x) \in \mathcal{F}_D$, je stejnoměrně konvergentní na D právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$, všechna $m \in \mathbf{N}$, a pro každý bod $x \in D$ platí $\left|f_{n+m}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$.*

Důležitost tohoto kritéria spočívá, podobně jako u číselných posloupností, mj. v tom, že pracuje pouze se členy posloupnosti, nikoli s konkrétní funkcí $f(x)$, která je její limitou. Důkaz je velmi jednoduchý a v podstatě sleduje důkaz věty 8.3. Ponecháme jej tedy do cvičení.

Stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí se obdobně jako u posloupností číselných nazývá *cauchyovská*.

Jednotlivé členy dané konvergentní posloupnosti funkcí mohou mít určité vlastnosti. Jsou třeba spojité, diferencovatelné (mají derivaci), integrabilní, atd. Zajímavou a zejména pro fyzikální, technické či jiné praktické aplikace důležitou otázkou je, jak se tato vlastnost „přenáší" na limitu posloupnosti. Tedy: Je limita posloupnosti spojitých funkcí také spojitá funkce? Je limita posloupnosti diferencovatelných funkcí také diferencovatelná funkce? A podobně. Jakou roli při odpovědi na tyto otázky hraje to, zda konvergence posloupnosti na daném intervalu je stejnoměrná, nebo jen bodová? A právě nyní uvidíme důležitost „silnější", tj. stejnoměrné konvergence.

Příklad 8.23: Ještě jednou geometrická posloupnost funkcí

Že mají předchozí otázky smysl, je vidět hned na příkladu geometrické posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f_n(x) = x^n$ (příklad 8.22). Pro jednoduchost omezme definiční obor na interval $D = [0,1]$, abychom se vyhnuli funkcím se záporným základem. Všechny členy posloupnosti jsou spojité funkce na D. Posloupnost, jak víme z řešení příkladu 8.22, konverguje bodově k funkci $f(x)$, která je na intervalu $[0,1)$ nulová a $f(1) = 1$. Na rozdíl od všech členů posloupnosti tedy její limita *není spojitá*. Omezíme-li definiční obor ještě o kousek, jakkoli málo, na interval $[0, 1-\delta)$, resp. $[0, 1-\delta]$, $0 < \delta < 1$, bude na něm zadaná posloupnost již konvergovat stejnoměrně, jak jsme se rovněž přesvědčili v příkladu 8.22. Její limitou je funkce $f(x) = 0$ na $[0, 1-\delta)$, resp. $[0, 1-\delta]$, tedy funkce spojitá.

Je to právě vlastnost *stejnoměrné konvergence*, která zaručuje, že se vlastnosti členů posloupnosti přenesou i na její limitu. Následující věta shrnuje nejdůležitější praktická tvrzení, která se tohoto problému týkají.

Věta 8.9 (Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností funkcí): *Nechť $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost funkcí, která konverguje na D k funkci $f(x)$. Vlastnosti členů posloupnosti se předpokládají pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Platí*

Nechť (předpoklady)		*Pak (tvrzení)*
konvergence posloupnosti je stejnoměrná a funkce $f_n(x)$ jsou spojité na D	$\Longrightarrow$	*funkce $f(x)$ je spojitá na D*
konvergence posloupnosti je stejnoměrná a funkce $f_n(x)$ jsou integrabilní na $[a,b] \subset D$	$\Longrightarrow$	*funkce $f(x)$ je integrabilní na $[a,b]$ a platí* $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

konvergence posloupnosti je stejnoměrná na $D \setminus \{a\}$ *a existují limity* $\lim\limits_{x\to a}\{f_n(x)\} = L_n$	$\Longrightarrow$	*existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{L_n\}$
funkce $f_n(x)$ *mají derivace na otevřeném intervalu* D, $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *konverguje stejnoměrně na* D	$\Longrightarrow$	$f(x)$ *má derivaci na* D *a platí* $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{f_n'(x)\}$
posloupnost je monotónní, funkce $f_n(x)$ *a* $f(x)$ *jsou spojité na* D	$\Longrightarrow$	*posloupnost konverguje stejnoměrně na* D

Proč jsou tyto vlastnosti tak „prakticky důležité“, jak jsme avizovali? Nejde jen o „přenesení“ vlastností členů posloupnosti funkcí na funkci, která je její limitou (spojitost, diferencovatelnost, integrabilita, apod.), ale také o záměnnost určitých operací. Například, potřebujeme-li znát limitu posloupnosti $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, která je dána integrály funkcí $f_n(x)$ na intervalu $[a,b]$, nemusíme počítat všechny tyto integrály, resp. hledat obecný vzorec pro I_n a pak počítat limitu výsledné posloupnosti. Místo toho můžeme nejprve určit limitu $f(x)$ a pak teprve spočítat její integrál. Podobně je tomu se záměnností výpočtu limity funkce $f(x)$ v bodě a s limitou posloupnosti limit, nebo se záměnností pořadí derivování. Za předpokladu splnění požadavků věty 8.9 můžeme vztahy záměnnosti vyjádřit takto:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{x\to a} f_n(x)\right\}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}\right] &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\mathrm{d}f_n(x)}{\mathrm{d}x}\right\},\\
\int\limits_a^b\left(\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}\right)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

Důkazy těchto tvrzení shrnutých ve větě 8.9 jsou založeny na Cauchyově-Bolzanově kritériu, ale samozřejmě také na definicích či vlastnostech operací, jichž se týkají (integrabilita funkcí, diferencovatelnost funkcí, apod.) Vesměs jsou lehké. Ukážeme si alespoň jeden z nich, třeba pravidlo o derivaci. Na něm je zajímavé to, že nepožadujeme stejnoměrnou konvergenci *původní* posloupnosti funkcí, stačí nám konvergence obyčejná (bodová). Naopak u posloupnosti *vytvořené z derivací* původních funkcí požadujeme stejnoměrnou konvergenci. Během důkazu uvidíme proč.

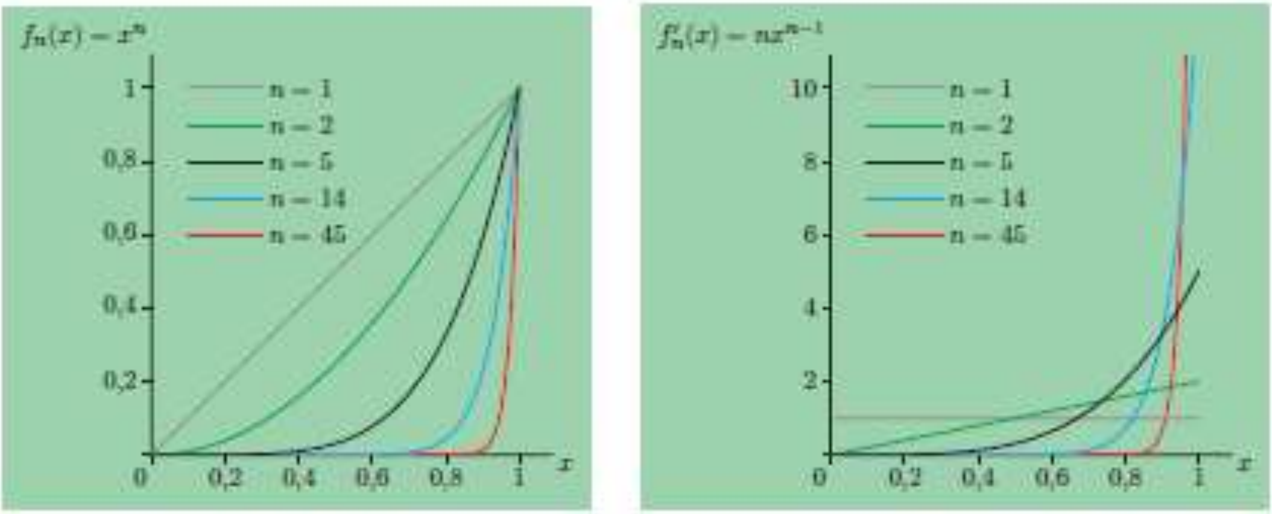
Než se však do důkazu pustíme se vší obecností, osvětlíme si význam předpokladů názorně na příkladech. Uvědomme si: Jaké je například postavení požadavku stejnoměrné konvergence ve větě 8.9? Stejnoměrná konvergence (spolu s dalšími požadavky) *zajišťuje* platnost tvrzení, má tedy charakter jedné ze souboru postačujících podmínek. Pokud by nebyla splněna, *nemusí* závěr platit, jak jsme třeba viděli v příkladu 8.23. Může se ovšem stát, že soubor požadavků tvořících postačující podmínku nebude jako celek splněn, avšak vlastnosti popsané jako důsledek tohoto souboru, nebo aspoň některé z nich, splněny budou. Pro podrobnější vysvětlení použijeme předposlední pravidlo věty 8.9, týkající se posloupnosti a derivované posloupnosti.

Příklad 8.24: Nejjednodušší příklad

Nejjednodušším příkladem je geometrická posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f(x) = x^n$, jíž jsme se podrobně věnovali již v příkladech 8.21, 8.22 a 8.23. Víme o ní, že konverguje k funkci $f(x) = 0$ na intervalu $(-1,1)$. Tato konvergence sice není stejnoměrná, ale z hlediska pravidla pro derivaci posloupnosti to nevadí. Co by vadit mohlo, je skutečnost, že také posloupnost derivací funkcí $f_n(x)$, tj. posloupnost $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$, konverguje na $(-1,1)$ pouze bodově, a to rovněž k identicky nulové funkci. Jedna ze souboru postačujících podmínek, požadavek stejnoměrné konvergence derivované posloupnosti, je tedy porušena a limita posloupnosti $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ by se tedy *nemusela rovnat* funkci $f'(x)$. Ale rovná se jí, neboť na $(-1,1)$ platí

$$\lim_{n\to+\infty}\{n\,x^{n-1}\} = 0, \quad f'(x) = 0\,.$$

Je vidět, že podmínka postačující něco s jistotou zaručuje, avšak ono to může nastat, i když není splněna. Pro názornost ukazuje obrázek 8.12 několik členů geometrické posloupnosti $\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a posloupnosti derivované na intervalu $[0,1]$.



Obr. 8.12 K příkladu 8.24.

Pozn.: Pokud použijeme stejný „trik" jako v příkladech 8.21 a 8.22, „ožežme" část definičního intervalu posloupnosti a omezíme se na interval $(-1+\delta, 1-\delta)$, resp. $[-1+\delta, 1-\delta]$, konvergence derivované posloupnosti (a té původní rovněž) bude již stejnoměrná.

Příklad 8.25: Příklad také jednoduchý

Posloupnost funkcí

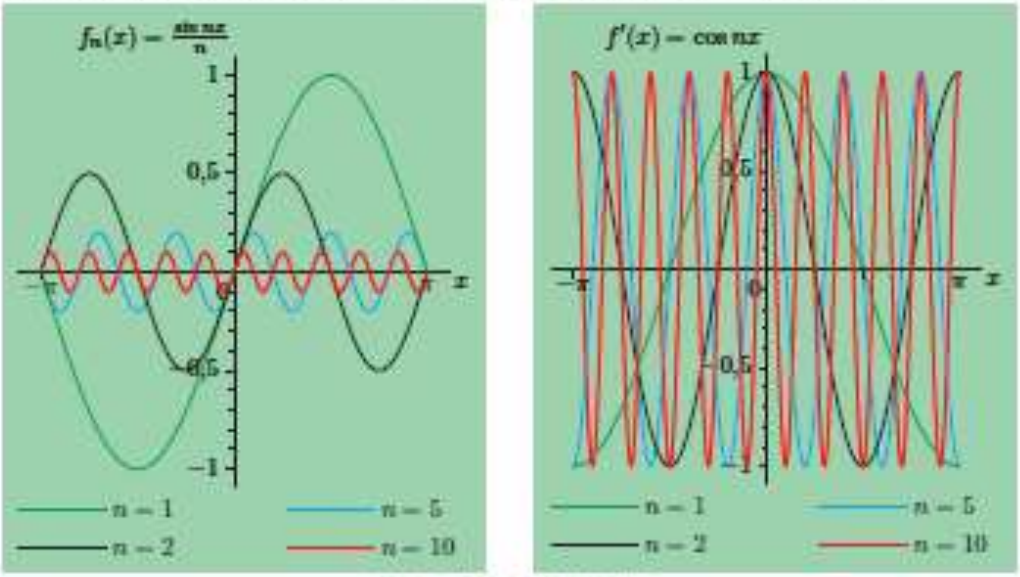
$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$$

konverguje na celé reálné ose $\mathbf{R}$ k identicky nulové funkci $f(x) = 0$. Tato konvergence je dokonce stejnoměrná. Skutečně, zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pro nalezení indexu N, od kterého výše platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, řešíme nerovnost

$$\left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| < \varepsilon .$$

Protože je $|\sin nx| \leq 1$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}$, stačí volit $N > \varepsilon^{-1}$, tj. $N = [\varepsilon^{-1}] + 1$. Podstatné je, že tato hodnota je univerzální pro celou reálnou osu (nezávisí na x) — konvergence je vskutku stejnoměrná. Z hlediska předposlední vlastnosti věty však typ konvergence zadané posloupnosti není důležitý.

Každá z funkcí dané posloupnosti má na celé reálné ose derivaci $f_n'(x) = \cos nx$. Posloupnost derivací ovšem nekonverguje ani bodově, natož stejnoměrně. Situaci ilustruje obrázek 8.13. Funkce $f(x) = 0$, která je limitou zadané posloupnosti, má všude na $\mathbf{R}$ derivaci $f'(x) = 0$. Posloupnost utvořená z derivací $f_n'(x)$ však limitu vůbec nemá. Vztah uvedený v předposledním tvrzení věty 8.9 proto pro naši řadu neplatí.



Obr. 8.13 K příkladu 8.25.

Příklad 8.26: Příklad trochu náročnější

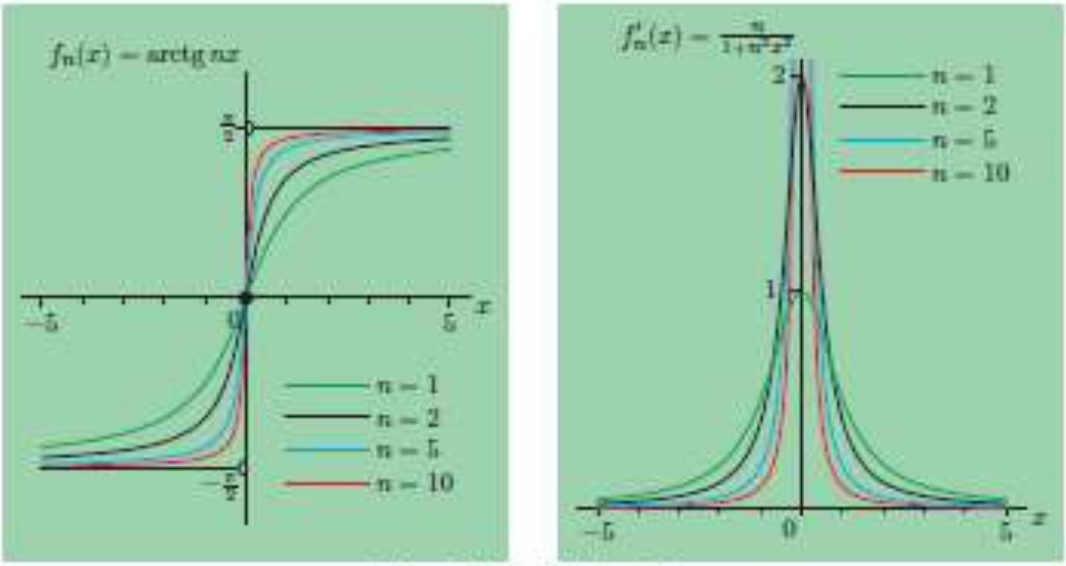
Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} = \{\operatorname{arctg} nx\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje na $\mathbf{R}$ k funkci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\{\operatorname{arctg} nx\}, \quad f(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ pro } x < 0, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \text{ pro } x > 0, \quad f(0) = 0 .$$

Tato funkce není sice ani spojitá, ale předposlednímu tvrzení ve větě 8.9 to nevadí. Má nulovou derivaci na množině $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, v bodě $x = 0$ její derivace není definována. Funkce dané posloupnosti mají na $\mathbf{R}$ derivace

$$f_n'(x) = \frac{n}{1 + n^2x^2} .$$

Posloupnost těchto funkcí konverguje na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ k identicky nulové funkci $g(x) = 0$, v bodě $x = 0$ má odpovídající číselná posloupnost tvar $\{f_n'(0)\}_{n\in\mathbf{N}} = \{n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a diverguje k $+\infty$. Několik členů zadané posloupnosti a posloupnosti derivované je znázorněno na obrázku 8.14. Konvergence posloupnosti $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$



Obr. 8.14 K příkladu 8.26.

na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ není stejnoměrná. Ukážeme to. Zvolme $\varepsilon > 0$ a řešme vzhledem k indexu n nerovnost

$$\left|\frac{n}{1+n^2x^2} - 0\right| < \varepsilon \implies (x^2\varepsilon)n^2 - n + \varepsilon > 0 \quad \text{pro} \quad x \neq 0\,. \tag{8.10}$$

(Proč myslíte, že jsme nulu zatím z výpočtu vyloučili?) Kořeny levé strany

$$\frac{1}{2x^2\varepsilon}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4x^2\varepsilon^2}\right)$$

jsou reálné pouze pro $x \in \left[-\frac{1}{2\varepsilon}, \frac{1}{2\varepsilon}\right]$, nulu jsme však vyloučili, a proto $x \in \left[-\frac{1}{2\varepsilon}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2\varepsilon}\right]$. Index N, od kterého výše platí požadovaná nerovnost (8.10), je pak určen větším z obou kořenů, tj.

$$N > \frac{1}{2x^2\varepsilon}\left(1 + \sqrt{1 - 4x^2\varepsilon^2}\right).$$

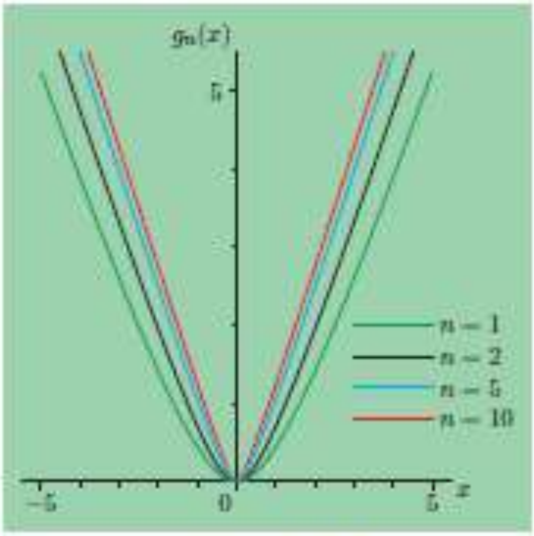
Je vidět, že dolní mez indexu N závisí na x — s klesajícím x neomezeně roste. Pro $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{2\varepsilon}, \infty\right)$ má výraz $(x^2\varepsilon)n^2 - n + \varepsilon$ na levé straně druhé nerovnosti (8.10) kladné znaménko pro všechna n, problémy tedy dělají jen body „blízko“ $x = 0$. Jich se můžeme zbavit podobně, jako jsme to udělali u geometrické posloupnosti v příkladech 8.21 a 8.22. Zvolíme-li nějaké $\delta > 0$, jakkoli malinkaté, bude již zadaná posloupnost na množině $(-\infty, -\delta) \cup (\delta, \infty)$ konvergovat k identicky nulové funkci stejnoměrně. Tento výsledek již je postačující k zajištění stejnoměrné konvergence posloupnosti derivací členů posloupnosti $\{\operatorname{arctg} nx\}_{n\in\mathbf{N}}$ k funkci, která je identicky nulová na množině $(-\infty, -\delta) \cup (\delta, \infty)$, a rovnosti derivace limity původní posloupnosti a limity derivované posloupnosti na téže množině. Rovnost limit je zřejmá — derivace konstanty ($-\frac{\pi}{2}$ na intervalu $(-\infty, -\delta)$ a $\frac{\pi}{2}$ na intervalu (δ, ∞)) je nulová, limita posloupnosti

$$\left\{(\operatorname{arctg} nx)'\right\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{\frac{n}{1+n^2x^2}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$$

je také nulová.

Příklad 8.27: Jak ještě lze používat pravidla věty 8.9

V předchozím příkladu jsme se důkladně zabývali posloupností $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, kde $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, definované na celé reálné ose. Z čeho všeho můžeme zjistit, že tato posloupnost na $\mathbf{R}$ sice konverguje, ale ne stejnoměrně? Možností je několik. Východiskem první z nich může být samozřejmě definice. Jsou však i další možnosti, které vyplývají z věty 8.9.



Obr. 8.15 K příkladu 8.27.

- Pomocí vlastnosti spojitosti: Zjistili jsme, že naše posloupnost bodově konverguje k funkci definované rovněž na $\mathbf{R}$, která nabývá konstantní hodnoty $-\pi/2$, resp. $\pi/2$ na intervalu $(-\infty, 0)$, resp. $(0, \infty)$ a nulové hodnoty pro $x = 0$. Je tedy v bodě $x = 0$ nespojitá a ani v něm nemá limitu. Kdyby původní posloupnost *spojitých funkcí* $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ konvergovala na $\mathbf{R}$ stejnoměrně, byla by její limita podle prvního pravidla věty 8.9 také spojitou funkcí na $\mathbf{R}$. Ale to ona není. Je tedy nutně porušen některý z předpokladů tohoto pravidla. Je jím požadavek stejnoměrné konvergence posloupnosti.
- Pomocí vlastnosti derivace: Následující posloupnost vypadá složitě a možná uměle vymyšleně,

$$\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad g_n(x) = x \operatorname{arctg} nx - \frac{1}{2n} \ln\left(1 + n^2x^2\right).$$

  Jestliže však její členy zderivujeme, objeví se „naše“ posloupnost $\{g_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $g_n'(x) = f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$. Limitou posloupnosti $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je funkce $g(x) = \frac{\pi}{2}|x|$ a ta nemá v bodě $x = 0$ derivaci. Kdyby posloupnost arkustangent konvergovala stejnoměrně na $\mathbf{R}$, musela by funkce $g(x)$ mít derivaci na $\mathbf{R}$. (Z cvičných důvodů si limitu $\lim_{n\to\infty}\{g_n(x)\}$ vypočtěte.)

A pokud jde o typ konvergence posloupnosti $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ k funkci $\frac{\pi}{2}|x|$? Tak ta je na $\mathbf{R}$ stejnoměrná. Posloupnost je totiž na $\mathbf{R}$ monotónní (s výjimkou bodu $x = 0$, v němž je tvořena samými nulami, je dokonce rostoucí), můžeme proto použít poslední pravidlo věty 8.9. Z prvního pravidla zase plyne, že limita $g(x)$ je spojitá. Obrázek 8.15 znázorňuje několik členů posloupnosti $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$. Je na něm pěkně vidět, jak se s rostoucím n blíží k funkci $g(x) = \frac{\pi}{2}|x|$.

Pozn.: Pečlivý čtenář se pochopitelně nespokojí s obrázkem 8.15 jako „důkazem“ monotonie posloupnosti $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ a ověří si ji výpočtem.

Příklad 8.28: K čemu jsou posloupnosti funkcí dobré — jeden příklad z fyziky

Čtenáři zaměření prakticky si již jistě dávno kladou otázku, zda hra s posloupnostmi či řadami čísel a funkcí není jen nepraktickou záležitostí, která může zajímat leda tak zarytě matematické teoretiky. Že tomu tak není, se později ještě několikrát přesvědčíme. Teď však alespoň jeden prakticky použitelný fyzikální příklad z oblasti atomové fyziky. Ze školy i z praxe čtenář ví, že se různé látky chovají různě, když jsou vloženy do magnetického pole, některé se dají zmagnetovat a zase odmagnetovat, některé nikoli. Za chování látek odpovídají takzvané magnetické momenty jejich atomů. Ty se nemohou měnit spojitě. Jsou kvantovány. „Kvanta" takového magnetického momentu jsou identifikována kvantovými čísly, která jsou celočíselná, nebo polovinná. Velikost magnetického momentu určitého objemu látky pak závisí jednak na určité spojité proměnné x související třeba s teplotou, jednak na kvantovém čísle n. A posloupnost funkcí je zde. Aniž bychom rozebírali podrobnosti, ukažme si takový konkrétní případ.

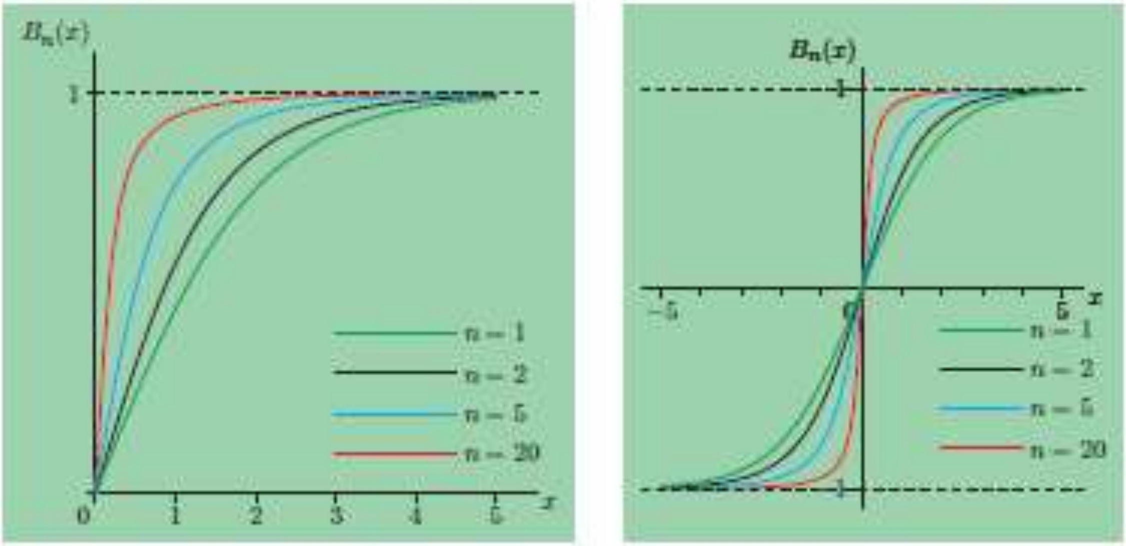
Magnetizace (celkový magnetický moment) určitého objemu látky je dána takzvanou *Brillouinovou funkcí* $B_J(x)$, kde x je spojitá proměnná (konkrétně je to veličina úměrná převrácené hodnotě teploty vzorku látky) a J je kvantové číslo udávající celkový moment hybnosti atomu. Toto číslo nabývá v principu hodnot z množiny $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\}$. Označíme-li $n = 2J$, lze Brillouinovu funkci zapsat ve tvaru

$$B_n(x) = \frac{n+1}{n}\mathrm{cotgh}\left(\frac{n+1}{2}x\right) - \frac{1}{n}\mathrm{cotgh}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Pro jednotlivé hodnoty $n \in \mathbf{N}$ jsou tyto funkce sice definovány na množině $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, avšak fyzikální význam proměnné x je takový, že $x > 0$. Uvažujeme tedy o posloupnosti funkcí $\{B_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ na množině $D = (0, \infty)$. Pro její limitu platí

$$\lim_{n\to\infty}\{B_n(x)\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n}\,\frac{\exp\left(\frac{n+1}{2}x\right) + \exp\left(-\frac{n+1}{2}x\right)}{\exp\left(\frac{n+1}{2}x\right) - \exp\left(-\frac{n+1}{2}x\right)} - \frac{1}{n}\,\frac{\exp\frac{x}{2} + \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\exp\frac{x}{2} - \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}\right\} = 1.$$

Členy posloupnosti pro $n = 1, 2, 5$ a 20 jsou pro $x \in (0, \infty)$ znázorněny v levé části obrázku 8.16, v pravé



Obr. 8.16 K příkladu 8.28.

části jsou grafy pro ilustraci znázorněny i pro záporné hodnoty x, i když nemají fyzikální význam. Celková magnetizace látky samozřejmě souvisí s dalšími fyzikálními veličinami popisujícími její stav, třeba s energií. Je proto třeba prošetřit, zda je konvergence posloupnosti k její limitě stejnoměrná, či nikoliv, abychom věděli, zda můžeme s posloupností „beztrestně" provádět některé operace (např. derivování či integrování). Zjišťovat stejnoměrnou konvergenci zrovna u takto poměrně složitých funkcí jistě nebude dobře schůdné. Pomohou nám však pravidla obsažená ve větě 8.9. Pokuste se jich využít a stanovit intervaly stejnoměrné konvergence posloupnosti Brillouinových funkcí.

Na samém konci tohoto odstavce ještě provedeme slíbený důkaz předposledního pravidla věty 8.9, které se týká derivace posloupnosti funkcí. Kdo větě 8.9 věří a podstatu postačujících podmínek jednotlivých pravidel si ujasnil alespoň zhruba pomocí příkladů, může rovnou přejít k dalšímu odstavci.

Tak tedy předpokládejme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje na D k funkci $f(x)$ a že posloupnost derivací $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje také na D, avšak dokonce stejnoměrně. Její limitu označme $g(x)$. Je třeba dokázat, že funkce $f(x)$ má na D derivaci a platí $f'(x) = g(x)$. Potřebujeme proto ukázat, že pro všechna $x \in D$ existuje limita

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

a že je rovna $g(x)$. Zvolme bod $x \in D$ na chvíli jako pevný. Funkce

$$g_n(y, x = \text{pevné}) = \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}$$

tvoří posloupnost $\{g_n(y, x = \text{pevné})\}_{n\in\mathbf{N}}$, definovanou na $D \setminus \{x\}$, a mají limity

$$\lim_{y\to x} g_n(y, x = \text{pevné}) = f_n'(x)\,.$$

Pokud by posloupnost $\{g_n(y, x = \text{pevné})\}_{n\in\mathbf{N}}$ byla stejnoměrně konvergentní, mohli bychom použít třetího pravidla věty 8.9, tj. aplikovat na ni záměnnost limity $\lim_{n\to\infty}$ a limity $\lim_{y\to x}$. K důkazu stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{g_n(y, x = \text{pevné})\}_{n\in\mathbf{N}}$ využijeme předpokládané stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ na D a Cauchyova-Bolzanova kritéria. Abychom mohli toto kritérium uplatnit na posloupnost $\{g_n(y, x = \text{pevné})\}_{n\in\mathbf{N}}$, musíme počítat výraz (stále s pevným x)

$$|g_{n+m}(y, x) - g_n(y, x)| = \left|\frac{f_{n+m}(y) - f_{n+m}(x)}{y - x} - \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\right| =$$

$$= \left|\frac{[f_{n+m}(y) - f_n(y)] - [f_{n+m}(x) - f_n(x)]}{y - x}\right|\,.$$

Na funkce $\varphi_{n,m}(z) = f_{n+m}(z) - f_n(z)$ lze na intervalu $z \in [x, y]$, nebo $z \in [y, x]$ uplatnit Lagrangeovu větu o střední hodnotě (v prvním dílu odstavec 2.1.7, věta 2.2), neboť jsou na D

spojité a mají derivaci $\varphi'_{n,m}(z) = f'_{n+m}(z) - f'_n(z)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje bod $\xi \in (x, y)$ tak, že platí

$$\varphi_{n,m}(y) - \varphi_{n,m}(x) = \varphi'_{n,m}(\xi)(y - x) \implies$$

$$\implies \left[f_{n+m}(y) - f_n(y)\right] - \left[f_{n+m}(x) - f_n(x)\right] = \left[f'_{n+m}(\xi) - f'_n(\xi)\right](y - x)$$

a odtud

$$\left|g_{n+m}(y, x) - g_n(y, x)\right| = \left|f'_{n+m}(\xi) - f'_n(\xi)\right|.$$

A už máme vztah umožňující využít stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f'_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ na D, kterou opět vyjádříme pomocí Cauchyova–Bolzanova kritéria. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ a všechna $\xi \in D$ platí $\left|f'_{n+m}(\xi) - f'_n(\xi)\right| < \varepsilon$, odtud plyne, že pro všechna $n > N$ a všechna $x, y \in D$ je $\left|g_{n+m}(y, x) - g_n(y, x)\right| < \varepsilon$. Posloupnost funkcí $\{g_n(y, x = \text{pevné})\}_{n\in\mathbf{N}}$ tedy konverguje stejnoměrně na $D \setminus \{x\}$ pro všechna $x \in D$. Podle třetího pravidla věty 8.9 existuje pro každé $x \in D$ limita $\lim_{n\to\infty}\{\lim_{y\to x} g_n(y, x)\}$ a platí

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}\{f'_n(x)\} = \lim_{n\to\infty}\{\lim_{y\to x} g_n(y, x)\} = \lim_{y\to x}\{\lim_{n\to\infty} g_n(y, x)\} \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{y\to x}\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\right\} = \lim_{y\to x}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\right\} = \lim_{y\to x}\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x).$$

8.2.2 Řady funkcí a posloupnosti jejich částečných součtů

Tento odstavec bude velice stručný. Chování řad funkcí je totiž určeno posloupnostmi jejich částečných součtů. A posloupnosti funkcí jsme probrali opravdu důkladně. Pro pořádek zdůrazněme:

Nechť $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině $D \subset \mathbf{R}$. n-tým částečným součtem řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

rozumíme funkci

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Bodovou, resp. *stejnoměrnou konvergenci* řady funkcí definujeme jako bodovou, resp. stejnoměrnou konvergenci posloupnosti jejich částečných součtů. *Absolutní konvergencí* rozumíme konvergenci řady utvořené z absolutních hodnot funkcí.

Pozn.: Znovu připomeňme, že množinami D v našich úvahách rozumíme nejčastěji intervaly, popřípadě jejich sjednocení.

Nejprve jednoduchý a čtenářem již pravděpodobně očekávaný příklad — geometrická řada.

Příklad 8.29: Geometrická řada

Vzorec pro n-tý částečný součet geometrické řady $a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ s kvocientem q jsme odvodili již v prvním dílu v příkladech 2.20 a 2.21 — vztahy (2.8) a (2.9). Budou-li kvocient řady nebo její první člen a_1 funkcemi proměnné x, tj. $q = q(x)$, $a_1 = a_1(x)$, máme geometrickou řadu funkcí. Pak

$$s_n(x) = a_1(x) \sum_{k=1}^{n} q^n(x) = a_1(x) \frac{q^n(x) - 1}{q(x) - 1}.$$

Pro $|q(x)| < 1$ řada konverguje, její limitou je funkce

$$s(x) = \lim_{n \to \infty} \{s_n(x)\} = \frac{a_1(x)}{1 - q(x)}.$$

Jak vypadá množina proměnné x, na níž řada konverguje stejnoměrně, resp. lokálně stejnoměrně (pojem lokální stejnoměrné konvergence viz příklad 8.22), záleží na tvaru funkce $q(x)$.

Typickým jednoduchým příkladem geometrické řady funkcí je

$$a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (x-a)^{n-1} = a_1 \left(1 + (x-a) + (x-a)^2 + \cdots + (x-a)^n + \cdots\right), \quad a, a_1 \in \mathbf{R}.$$

Tato řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $(a - 1 + \delta, a + 1 - \delta)$, $0 < \delta < 1$, a konverguje lokálně stejnoměrně na $(a - 1, a + 1)$.

Nyní, jak jinak, uvedeme Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro řady funkcí. Jeho důkaz provádět nebudeme, jen bychom reprodukovali důkaz pro posloupnosti funkcí aplikovaný na posloupnost částečných součtů řady.

Věta 8.10 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro řady funkcí): *Řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n(x) \in \mathcal{F}_D$, je stejnoměrně konvergentní na D právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$, všechna $m \in \mathbf{N}$, a pro každý bod $x \in D$ platí $\left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)\right| < \varepsilon$.*

Uvědomte si, že uvnitř absolutní hodnoty je rozdíl $s_{m+n}(x) - s_n(x)$. Nejde tedy o nic jiného, než o Cauchyovo–Bolzanovo kritérium pro posloupnost částečných součtů řady.

V následujícím textu již pouze shrneme další kritéria stejnoměrné konvergence a vlastnosti stejnoměrně konvergentních řad funkcí v podstatě jako důsledky odpovídajících kritérií a vlastností posloupností funkcí. Vždyť přece řady jsou určeny posloupnostmi svých částečných součtů. Některá kritéria a vlastnosti jsou obdobou kritérií a vlastností řad čísel.

Doplníme ještě jeden potřebný pojem, jímž je stejnoměrná ohraničenost posloupnosti funkcí. Posloupnost $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ se nazývá *stejnoměrně ohraničená* na D, jestliže existuje číslo M tak, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in D$ platí $\left|f_n(x)\right| \leq M$. Všimněme si, že je požadována existence čísla M *univerzálního* pro celou množinu D.

Věta 8.11 (Stejnoměrná konvergence řad — kritéria a vlastnosti):
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *je řada funkcí definovaných na* D, $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *posloupnost jejích částečných součtů.*

Nechť (předpoklady)		*Pak (tvrzení)*
(zobecněné) Weierstrassovo kritérium		
pro jistou posloupnost $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *nezáporných funkcí je* $\left\|f_n(x)\right\| \le g_n(x)$ *na* D *pro všechna* $n\in\mathbf{N}$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D	$\Longrightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně a absolutně na* D
Abelovo kritérium		
$\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je monotónní a stejnoměrně ohraničená na* D, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D	$\Longrightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D
Dirichletovo kritérium		
$\{g_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je na* D *monotónní a konverguje na* D *stejnoměrně k nulové funkci,* $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je stejnoměrně ohraničená na* D	$\Longrightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D
spojitost součtu řady		
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* D *k součtu* $s(x)$ *a všechny* $f_n(x)$ *jsou spojité na* D	$\Longrightarrow$	$s(x)$ *je spojitá funkce na* D
integrování člen po členu		
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* $[a,b]$ *k součtu* $s(x)$ *a všechny funkce* $f_n(x)$ *jsou integrabilní na* $[a,b]$	$\Longrightarrow$	$s(x)$ *je integrabilní na* $[a,b]$, $\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$

derivování člen po členu

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje na otevřeném D k součtu $s(x)$, všechny $f_n(x)$ mají derivaci na D a $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ konverguje stejnoměrně na D*	$\Longrightarrow$	*$s(x)$ má derivaci na D a platí $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$*

První vlastnost je důležitá pro prošetřování stejnoměrné konvergence řad. Zejména je účinná v případech, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselná řada s nezápornými členy. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ se nazývá *majoranta*. Pro praktické výpočty jsou nejdůležitější poslední dvě vlastnosti. Představují možnost takzvaného *integrování, resp. derivování „člen po členu"*. Význam tohoto názvu je jasný. Platí-li předpoklady, je zaručen integrál, resp. derivace funkce představující součet řady, není však nutné řadu napřed sečíst a pak výsledek integrovat, resp. derivovat. Lze to udělat v opačném pořadí, tj. napřed integrovat, resp. derivovat jednotlivé členy řady a teprve potom sečíst. Tento postup bývá často snazší a rychlejší. Pozor však na plnění předpokladů (opět jsou zde v roli souboru postačujících podmínek).

Než přistoupíme k ukázkám aplikace věty 8.11, dokažme alespoň první tvrzení, které, jak jsme již konstatovali, je velice důležité pro teoretické úvahy. Důkazy ostatních tvrzení jsou přímými důsledky již dokázaných vět o posloupnostech funkcí aplikovaných na posloupnosti částečných součtů řad. Ponecháme je pro cvičení.

K důkazu použijeme Cauchyova-Bolzanova kritéria pro řady. Počítejme:

$$\left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)\right| \le \left|f_{n+1}(x)\right| + \left|f_{n+2}(x)\right| + \cdots + \left|f_{n+m}(x)\right| \le$$

$$\le g_{n+1}(x) + g_{n+2}(x) + \cdots + g_{n+m}(x).$$

Protože řada (nezáporných funkcí) $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ splňuje Cauchyovo-Bolzanovo kritérium stejnoměrné konvergence, vyplývá z předchozí nerovnosti, že toto kritérium splňuje jak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f_n(x)\right|$.

Příklad 8.30: Použití majoranty

Kritérium s majorantou je velice užitečné, chceme-li pouze zjistit stejnoměrnou konvergenci řady a nevadí nám, že nestanovíme její součet. I když kritérium je obecné v tom smyslu, že členy majoranty mohou být také funkce, porovnáváme zadanou řadu nejčastěji s číselnou řadou s nezápornými členy, jejíž konvergenci máme ověřenou pomocí některého z kritérií věty 8.7. Například snadno zjistíme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konverguje pro každé $k \in \mathbf{R}$, $k > 1$ (úloha 13 a) ve cvičení 8.1.3). Pro řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \quad \text{pro} \quad k > 1$$

z toho vyplývá, že konverguje stejnoměrně a absolutně na intervalu $[-1,1]$, neboť

$$\text{pro} \quad |x| < 1 \quad \text{je} \quad \left|\frac{x^n}{n^k}\right| \le \frac{1}{n^k}.$$

Obdobně můžeme rozhodnout o řadách typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n(x)}{n^k}, \quad k > 1,$$

pro případ, že posloupnost funkcí $(h_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ je na jistém intervalu D stejnoměrně ohraničená, tj. existuje číslo M tak, že $|h_n(x)| \le M$ na D pro všechna n. Například řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^k}, \quad \text{nebo i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin f_n(x)}{n^k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos f_n(x)}{n^k},$$

kde $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ je libovolná posloupnost funkcí na $\mathbf{R}$, konvergují stejnoměrně a absolutně na $\mathbf{R}$.

Příklad 8.31: Jak sčítat pomocí integrování

Název tohoto příkladu je jistou nadsázkou. Příklad však ukazuje, jak nahradit sečtení řady, kterou přímo sečíst neumíme, sečtením řady, pro kterou je to snadné. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

je stejnoměrně a absolutně konvergentní na intervalu $(-1+\delta, 1-\delta)$, $0 < \delta < 1$. Majorantou na tomto intervalu je totiž například geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$. Jak ale součet naší řady určit? Přímo, tedy výpočtem posloupnosti částečných součtů a její limity, to dost dobře nejde. Hned nás ale napadne, že derivací n-tého členu řady $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$ je funkce $f_n'(x) = (-1)^n x^{n-1}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1}$ je řadou geometrickou s prvním členem -1 a kvocientem $q = -x$ a na intervalu $(-1+\delta, 1-\delta)$ je stejnoměrně konvergentní. Proto například pro libovolné $x \in (0, 1-\delta)$ můžeme podle předposledního tvrzení věty 8.11 psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \xi^{n-1}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \xi^{n-1}\,\mathrm{d}\xi = -\int_0^x \frac{1}{1+\xi}\,\mathrm{d}\xi = \ln \frac{1}{1+x}.$$

Zadanou řadu jsme tedy „sečetli“ tak, že jsme zintegrovali známý vzorec pro součet geometrické řady, jejíž členy byly derivacemi členů řady zadané.

Některý čtenář možná dostal na základě výsledku nápad: Kdybychom dosadili $x = 1$, získali bychom alternující číselnou řadu z příkladu 8.12. Dost jsme se s ní natrápili a ani jsme zatím její součet nezjistili. Nyní se zdá, že je roven $(-\ln 2)$. Je to však správně? Odpověď se sice později ukáže jako správná, ale v tuto chvíli ji ještě vyslovit nemůžeme. Tvrzení o integrování člen po členu je formulováno pro stejnoměrně konvergentní řady. Geometrická řada však není stejnoměrně konvergentní na intervalu, který by obsahoval bod $x = 1$. O tom jsme se přesvědčili v příkladech 8.21 a 8.22. Integrování člen po členu nemůžeme proto pro interval $[0,1]$ použít. Na druhé straně je stejnoměrná konvergence podmínkou postačující, a tedy v některých případech možná zbytečně silnou. Takže se nakonec může ukázat, a také ukáže, že součet řady skutečně je $(-\ln 2)$. Budeme k tomu však potřebovat jiné tvrzení, které k dispozici zatím nemáme.

Příklad 8.32: Jak sčítat pomocí derivování

V předchozím příkladu jsme výpočet součtu řady, která byla tvořena integrály členů geometrické řady, nahradili integrálem součtu této geometrické řady. V tomto příkladu nepůjde o integrování, nýbrž o derivování řady. Pro členy řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2},$$

kterou bychom nepochybně sčítali velice nesnadno, platí $f_n(x) = (x^n)''$. Řada konverguje stejnoměrně na intervalu $D = (-1+\delta, 1-\delta)$ (její majorantou je například řada $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(1-\delta)^{n-2}$). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ konverguje na intervalu $D = (-1+\delta, 1-\delta)$ rovněž stejnoměrně (najděte nějakou majorantu), totéž lze konstatovat o geometrické řadě $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (příklad 8.29). Podle věty 8.11 tedy můžeme počítat takto:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^n) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Získali jsme tedy dvojím použitím věty 8.11 součet řady, kterou jsme neuměli sčítat.

Pozn.: Ve výpočtu se místo součtu od $n = 2$ do nekonečna objevil součet začínající indexem $n = 0$. Tato změna formálního zápisu je možná proto, že druhá derivace členů řady pro $n = 0$ a $n = 1$ je nulová. Často se však vyskytují situace, kdy řadu potřebujeme „přeindexovat" například takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(x), \text{ nebo i obecněji, např. } \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+k-1}(x).$$

Je vidět, že takové přeindexování nemá vliv na součet řady, proto je v dalším již nebudeme komentovat.

8.2.3 Cvičení

1. Proveďte důkaz věty 8.8 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí).
Návod: Předpokládejte, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje na D stejnoměrně a její limitu označte $f(x)$. Použijte nerovnosti

$$\left|f_{n+m}(x) - f_n(x)\right| = \left|\left(f_{n+m}(x) - f(x)\right) - \left(f_n(x) - f(x)\right)\right| \le$$
$$\le \left|f_{n+m}(x) - f(x)\right| + \left|f_n(x) - f(x)\right|,$$

platné pro všechna $x \in D$ a všechna $n, m \in \mathbf{N}$. Dále aplikujte definici stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí.

V druhé části důkazu předpokládejte, že pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít index N tak, aby pro všechna $n >$ $> N$, všechna $m \in \mathbf{N}$ a co je podstatné, všechna $x \in D$ platilo $\left|f_{n+m}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$. Všechny *číselné* posloupnosti $\{f_n(a)\}_{n\in\mathbf{N}}$ pro *kterékoli konkrétně zvolené* $a \in D$ jsou tedy podle věty 8.3 konvergentní. Jak vytvoříte funkci $f(x)$ pomocí limit $L(a) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(a)\}$ pro $a \in D$ těchto číselných posloupností? Pro dokončení důkazu si uvědomte, že index N je podle předpokladu univerzální pro D, tj. stejný pro všechny body $x \in D$.

2. Dokažte, že posloupnost funkcí $\left\{x \operatorname{arctg} nx - \frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2x^2\right)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ je rostoucí pro $x \ne 0$.
Návod: Nahraďte n spojitou proměnnou y a vypočtěte derivaci vzniklé funkce podle proměnné y. Mělo by se ukázat, že tato derivace je kladná pro všechna $x \ne 0$ a všechna y.

•**3.** Dokažte první a třetí tvrzení věty 8.9.

Návod: Dokažte nejprve třetí tvrzení, první je jeho důsledkem pro spojité funkce, tj. pro $\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$. Při důkazu třetí vlastnosti postupujte například takto: Označte $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$ a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Je třeba dokázat, že $\lim_{n\to\infty}\{L_n\} = \lim_{x\to a} f(x)$. Nejprve ukažte, že posloupnost limit $\{L_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje, pak vyvstane otázka, co je její limitou. Prošetřete tedy výraz $|L_{n+m} - L_n|$, abyste zjistili, zda je cauchyovská, tj. zda k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ a všechna $m \in \mathbf{N}$ platí nerovnost

$$|L_{n+m} - L_n| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad \left|\lim_{x\to a}\left[f_{n+m}(x) - f_n(x)\right]\right| < \varepsilon .$$

Zvolte $0 < \delta < \varepsilon$. Posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ je na $D\setminus\{a\}$ stejnoměrně konvergentní, a proto je cauchyovská. Pro všechna n od jistého indexu N výše, pro všechna $m \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in D\setminus\{a\}$ tedy platí $\left|f_{n+m}(x) - - f_n(x)\right| < \delta$. Tato nerovnost se zachová i pro limity s tím, že přejde v nerovnost neostrou (zdůvodněte). Tedy $|L_{n+m} - L_n| \le \delta < \varepsilon$. (Právě s vědomím toho, že budeme přecházet k limitám, jsme Cauchyovo-Bolzanovo kritérium pro posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ aplikovali na volbu $\delta < \varepsilon$.) Posloupnost $\{L_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je cauchyovská, a tedy konvergentní. Označte její limitu, kterou zatím neznáte, jako L. Abyste pak dokázali, že touto limitou je zrovna číslo $\lim_{x\to a} f(x)$, počítejte (úprava je poněkud „umělá“, ale vede rychle k cíli):

$$|f(x) - L| = \left||f_n(x) - L_n| + |L_n - L| - \left[f_n(x) - f(x)\right]\right| \le$$

$$\le |f_n(x) - L_n| + |L_n - L| + \left|f_n(x) - f(x)\right| .$$

Z předpokladů je zřejmé, že každý ze sčítanců posledního výrazu lze v jistém okolí bodu a a od jistého indexu N výše „libovolně zmenšit“ tak, aby výsledek byl menší než předem zvolené $\varepsilon > 0$. Proveďte úvahu pořádně.

4. Dokažte následující tvrzení: Nechť pro posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ definovanou na D a číselnou posloupnost $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ platí pro všechna $x \in D$ a všechna n nerovnosti $c_n \ge 0$, $f_n(x) \le c_n$. Nechť řada $\sum_{n=1}^{n} c_n$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně a absolutně na D.

Návod: Použijte první vlastnost z věty 8.11.

5. Dokažte následující tvrzení: Nechť posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je stejnoměrně ohraničená na D a nechť $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je monotónní posloupnost čísel, která konverguje k nule. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na D.

Návod: Použijte třetí vlastnost z věty 8.11.

6. Dokažte poslední tři tvrzení věty 8.11.

Návod: Aplikujte na posloupnost částečných součtů řady odpovídající tvrzení věty 8.9.

7. Určete obor konvergence u následujících řad funkcí:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 x}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+1)}$.

8. Uveďte příklady posloupností funkcí, které jsou na nějakém intervalu D bodově konvergentní, ale nejsou stejnoměrně konvergentní. Uveďte příklady konvergentní posloupnosti spojitých funkcí, jejichž limitou není funkce spojitá.

9. Rozhodněte, zda řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|\cos nx|}}{n(n+1)}$ jsou stejnoměrně konvergentní na $\mathbf{R}$.

•**10.** Určete limitu následujících posloupností funkcí na zadaném intervalu a rozhodněte, zda konvergují stejnoměrně:

a) $\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ na $D = [0, \frac{1}{2})$,

b) $\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ na $D = (1, \infty)$,

c) $\left\{\frac{1}{n(x-1)}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ na $D = [2, \infty)$.

d) $\{x^{-3n} - x^{-n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ na $D = [1, \infty)$.

Návod: Využijte jako fakt tvrzení, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje stejnoměrně k funkci $f(x)$ na intervalu D právě tehdy, když pro číselnou posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, kde $a_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\}$ platí, že $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = 0$.

11. Rozhodněte, zda je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^{n+1}}$ stejnoměrně konvergentní na intervalu $[2, \infty)$, a určete

$$\int_2^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,.$$