Druhé cvičení ze Speciální relativity

1. Nakreslete do jednoho časoprostorového diagramu světočáru pozorovatele v klidové soustavě, soustavu pohybující se rychlostí v vůči klidové soustavě, soustavu pohybující se rychlostí $w > v$ vůči klidové soustavě a paprsek světla. Dále uvažte dvě současné události v klidové soustavě, budou současné i v pohybujících se soustavách?

   Řešení: Nejprve k vyjasnění pojmů. Prostoročasový digram je diagram, kde jsou na osách jak prostorové rozměry, tak čas. Světočára je trajektorie v prostoročase, tj. nezaznamenává se pouze prostorová poloha, ale i časová poloha. Pozorovatel v klidu se tedy pohybuje čistě v časovém směru. V Obrázku (1) je tento pozorovatel znázorněn vertikální modrou šipkou. Vztažná soustava spojená s pozorovatel v klidu se nazývá klidová soustava. Jelikož je soustava v klidu, pro její popis můžeme použít kartézské souřadnice (ct, x). Světlo se v této klidové soustavě (a ve všech ostatních soustavách, jelikož rychlost světla nezáleží na vztažné soustavě) pohybuje rychlostí c, tzn. její světočára (trajektorie v prostoročase) je dána přímkou

   $$x = ct.$$

   Tato přímka je osou prvního kvadrantu a na Obrázku (1) je znázorněna přerušovanou čarou. Nechť se v této klidové soustavě pohybuje pozorovatel s rychlostí

   $$v = \frac{c}{3},$$

   jeho světočára je v klidové soustavě dána přímkou

   $$x = \frac{c}{3}t.$$

   Na Obrázku (1) je to černá šipka s popiskem ct'. S tímto pozorovatelem spojíme druhou vztažnou soustavu, čárkovanou soustavu. Osu x' můžeme získat pomocí Lorentzova boostu s rychlostí $v = \frac{c}{3}$. Světlo se touto soustavou šíří opět rychlostí c, tudíž světelná světočára bude opět osa symetrie mezi osami ct' a x'. Podobně uvažme v klidové soustavě pozorovatele pohybujícího se rychlostí

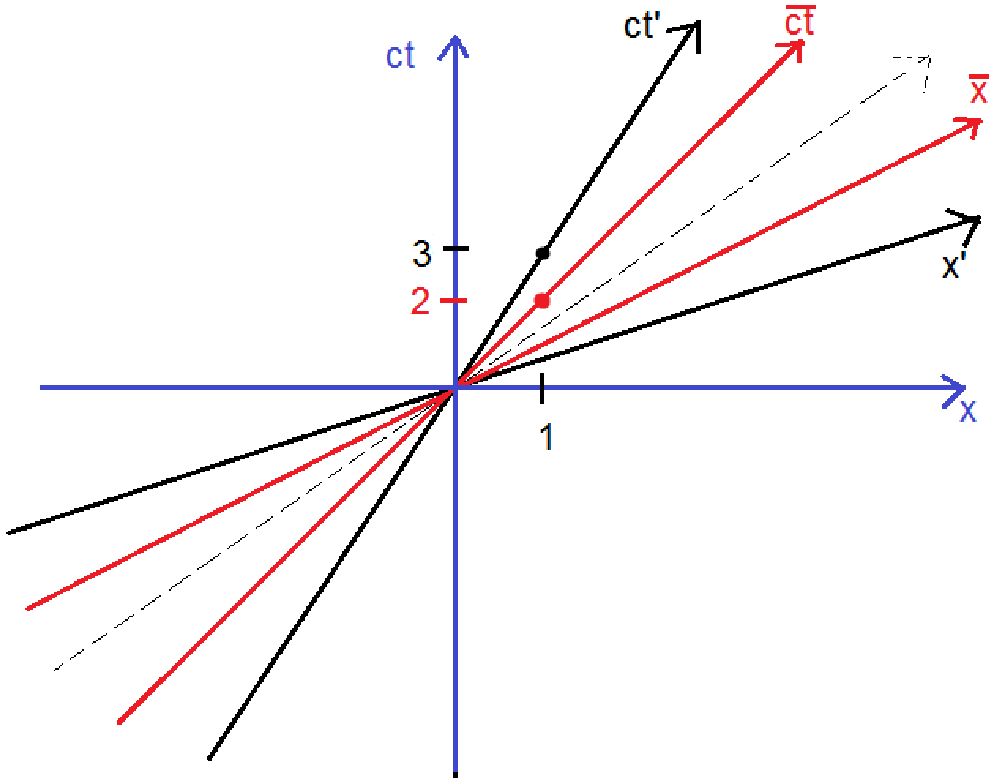
   $$w = \frac{c}{2}.$$

   Světočára tohoto pozorovatele v klidové soustavě je dána přímkou

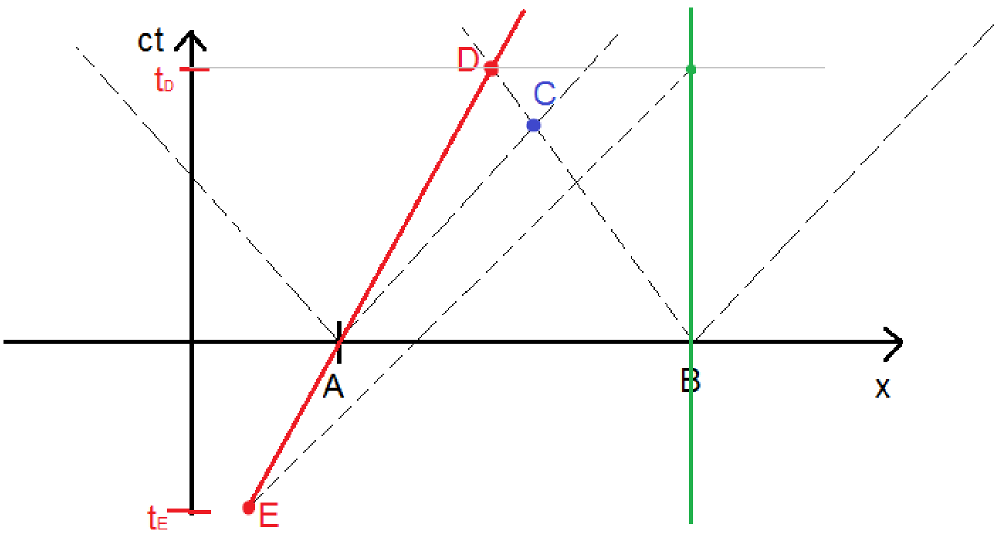
   $$x = \frac{c}{2}t,$$

   na Obrázku (1) je znázorněna červenou šipkou s popiskou $\bar{ct}$. Opět můžeme zavést i druhou osu $\bar{x}$. Vidíme, jak je Lorentzův boost znázorněn v grafu. Podobně jako rotace mění osy grafu, osy ale nerotuje, ale "smršťuje"je směrem k světočáře světla.

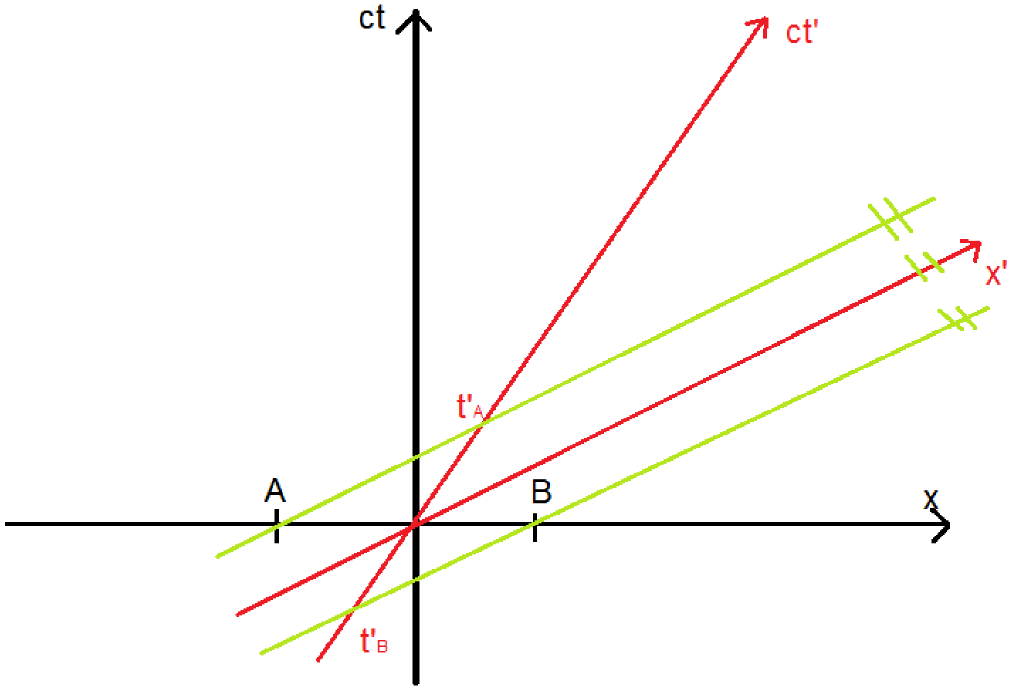
   Pojďme se zaměřit na šíření informace v prostoročasu. Vše potřebné bude na Obrázku (2). Mějme dva pozorovatele, červeného a zeleného. Červený pozorovatel se vůči klidové soustavě (ct, x) pohybuje nenulovou rychlostí, zelený pozorovatel je v klidu. Pozorovatelé vyšlou ve stejném čase $t = 0$ informaci, například ve formě světelného signálu. Od těchto dvou událostí A a B nakreslíme světelné kužely. Oblast časoprostoru, kde se světelné kužely od událostí A a B protínají, může být ovlivněn oběma událostmi. Pozorovatel,



Obrázek 1: Prostoročas



Obrázek 2: Šíření informace v prostoročasu



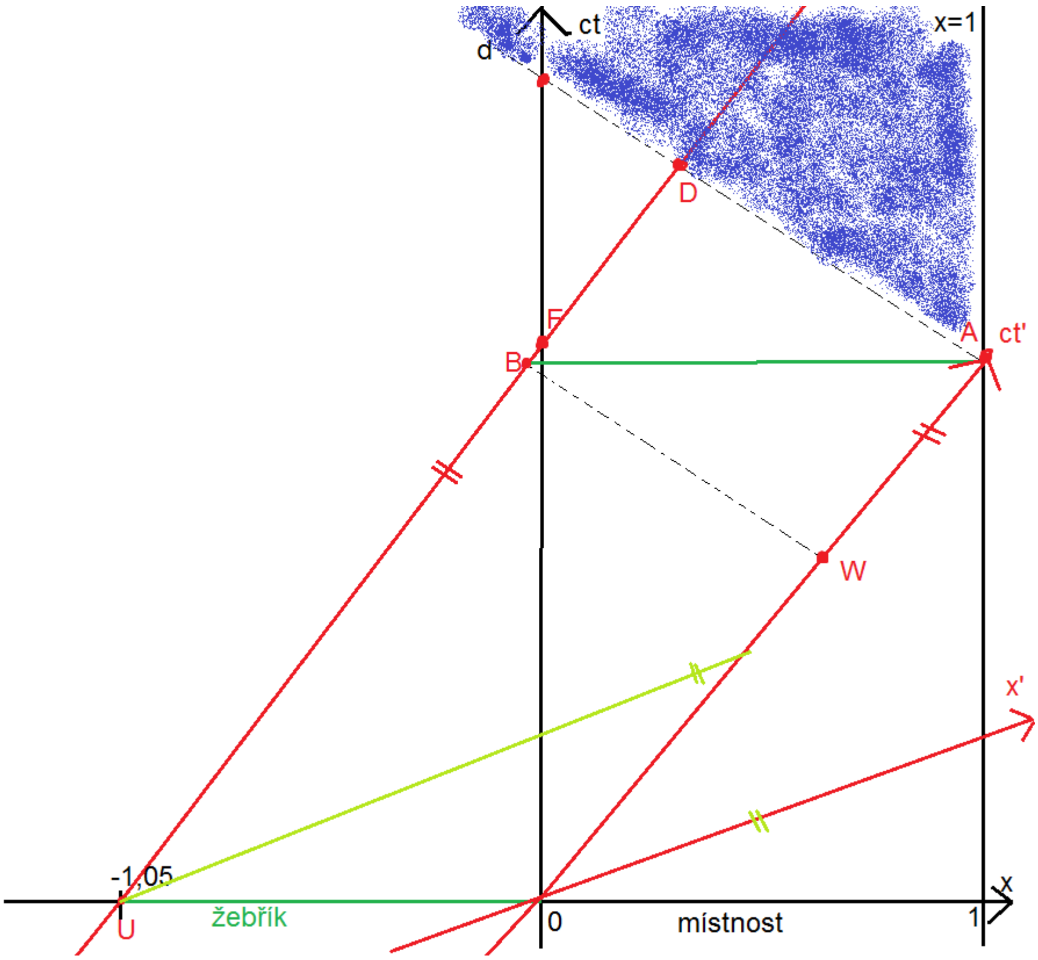
Obrázek 3: Současné události v klidové soustavě nejsou současné v pohybující se soustavě

který by se nacházel v bodě C, jako první vidí obě události A a B. Červený pozorovatel uvidí signál z události B až v bodě D, v čase t_D. Poslední tvrzení můžeme formulovat ještě jinak. Červený pozorovatel uvidí v čase t_D zeleného pozorovatele v čase $t = 0$. Naopak, zelený pozorovatel uvidí v čase t_D červeného pozorovatele v čase $t_E < 0$. Vidíme, že informace je v jakémsi smyslu "nesymetrická", pozorovatelé ve stejném čase vidí minulost druhého pozorovatele v jiných časech.

Na závěr uvažme dvě současné události v klidové soustavě. Současné události jsou události, které mají v určité soustavě stejnou časovou souřadnici. Na Obrázku (3) jsou události A a B současné v klidové soustavě (ct, x), obě se odehrají v čase $t = 0$. Uvažme soustavu (ct', x') pohybující se vůči soustavě (ct, x) nenulovou rychlostí. V čárkované soustavě nejsou události A a B současné. Důvod je takový, že současné události se vždy nachází na přímkách rovnoběžných s prostorovou osou, v tomto případě osou x'. Vidíme, že se událost A odehraje v čase $t'_A > 0$ a událost B se odehraje v čase $t'_B < 0$.

2. (†) Usain Bolt po Mistrovství světa v atletice v Londýně ukončil kariéru, tudíž závody už neběhá, ale covidová karanténa byla dlouho a chtěl by se opět dostat do formy. Proto vymyslel následující cvik: držíce před sebou žebřík o délce $2{,}1\,\mathrm{m}$ chce vběhnou rychlostí $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ do pokoje o délce $1\,\mathrm{m}$ a zavřít za sebou dveře. Pomocí prostoročasového diagramu ukažte, že je to skutečně možné. Zjistěte prostoročasové souřadnice (v obou vztažných soustavách) bodu nárazu žebříku do zadní zdi. V jakém bodu časoprostoru Usain zjistí, že se už do formy nikdy nedostane (tj. v jakém bodu časoprostoru uvidí, že žebřík narazil do zdi)? (Pokud vás tento problém zajímá, doporučuji si vygooglit Ladder paradox.)

   Řešení: Jako klidovou soustavu (ct, x) si zvolíme soustavu spojenou s místností. Pro jednoduchost zvolíme počátky 0 klidové a pohybující se soustavy (ct', x') do stejného



Obrázek 4: Diagram znázorňující Usaina běžícího s žebříkem do místnosti

bodu a to do dveří místnosti a do okamžiku, kdy první část žebříků se ocitá ve dveřích, viz Obrázek (4). Jelikož se žebřík vůči místnosti pohybuje, jeho délka se bude kontrahovat podle vzorce

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

kde $l_0 = 2,1\,\mathrm{m}$ je délka žebříku v klidové soustavě žebříku (pro nás je to pohybující se soustava). Tudíž po dosazení zjistíme, že kontrahovaná délka žebříku je

$$l = 1,05\,\mathrm{m},$$

což znamená, že by se naivně do místnosti neměl vejít. Ale ke zkoumání speciální relativity nestačí náš naivní pohled na svět, což si v následujícím ukážeme. Nejprve popišme Obrázek (4). Soustavy už máme zavedené. V bodě U se nachází Usain, když se přední část žebříku nachází ve dveřích. Jelikož bereme jako klidovou soustavu soustavu místnosti, světočáry dveří a zadní stěny místnosti jsou vertikální černé přímky. Předek žebříku a Usain se budou pohybovat po svých světočárách, těmi jsou šikmé červené přímky. Dále na obrázku můžeme vidět geometrickou představu o kontrakci délky. V klidové soustavě se žebřík jeví kontrahovaný, viz tmavě zelená vodorovná úsečka. Naopak v pohybující se soustavě je vzdálenost měřena na ose x'. Délka žebříku je v pohybující se soustavě znázorněna na rovnoběžné úsečce s osou x' pomocí světle zelené barvy. Vidíme, že světle zelená úsečka je delší než tmavě zelená úsečka. Ale je důležité si uvědomit, že měření vzdálenosti probíhají v jiných časech! V obou soustavách měření probíhá v současných bodech.

Zpět ale k našemu příkladu. Usain drží před sebou žebřík a vbíhá do místnosti. Usain i předek žebříku se pohybují po svých světočárách. V bodě A narazí předek žebříku do zadní zdi místnosti. Usain se nachází v bodě B, je ještě mimo místnost. Ale jaká informace k Usainovy doputuje? Informace se šíří rychlostí světla, takže Usain vidí předek žebříku v bodě W, někde v půli místnosti. Nemá nejmenší důvod nepokračovat dál. V bodě F Usain prochází dveřmi a zavírá dveře, informace o nárazu žebříku do zdi k němu ještě nedoletěla. Informace o nárazu žebříku se šíří z bodu A také rychlosti světla, po přímce d. Usain se o nárazu dozví až v bodě D, což je bod, kde se jeho světočára protne s informací, která letí z bodu A. Ale to se Usain nachází daleko za zavřenými dveřmi. Ale co se stane poté? Na to už speciální teorie relativity neumí odpovědět, jelikož při nárazu v bodě A začne žebřík brzdit, a speciální relativita neumí popisovat zrychlení. (Ve skutečnosti, některé jednoduché příklady zrychlení se dají v rámci speciální relativity ještě popsat, jak uvidíme na některém z dalších cvičení, ale jakékoliv zrychlení rozbijí jeden z postulátů speciální relativity, takže je to spíše náhoda, že se dostane správný výsledek.) Takže modrou oblast nad přímkou d neumíme v rámci speciální relativity popsat. I když se tento problém nazývá paradox, žádný paradox to ve speciální relativitě není. Speciální relativita ho jen neumí celý popsat.

Teď nastává čas spočítat spočítat časoprostorové souřadnice bodu D. Pro to nejprve spočítáme souřadnice bodu A, a to pro jistotu v obou soustavách. V klidové soustavě jsou souřadnice bodu A

$$A_{ct,x} = [ct, 1]$$

a v pohybující se soustavě

$$A_{ct',x'} = [ct', 0].$$

Časové souřadnice dopočítáme následovně. V klidové soustavě leží bod A na průsečíku přímek

$$x = 1 \quad \text{a} \quad ct = \frac{c}{v}x = \frac{2c}{\sqrt{3}c}x = \frac{2}{\sqrt{3}}x.$$

Tudíž $ct = \frac{2}{\sqrt{3}}$ a souřadnice bodu A v klidové soustavě jsou

$$A_{ct,x} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, 1\right].$$

Souřadnice v pohybující se soustavě získáme pomocí Lorentzovy transformace

$$ct = \left(ct' + \frac{v}{c}x'\right)\gamma,$$
$$x = (x' + vt')\,\gamma.$$

Můžeme dosadit do libovolné rovnice výše, v obou případech zjistíme, že $ct' = \frac{1}{\sqrt{3}}$, a souřadnice bodu A v pohybující se soustavě tedy jsou

$$A_{ct',x'} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right].$$

Nakonec spočítáme souřadnice bodu D. Ta se nachází na průsečíku Usainovy světočáry a přímky d. Usainova světočára má v klidové soustavě rovnici

$$ct = \frac{2}{\sqrt{3}}x + q,$$

kde číslo q dopočítáme z toho, že tato světočára prochází bodem U se souřadnicemi

$$U_{ct,x} = [0, -1,05].$$

Dosadíme bod do světočáry a získáme

$$0 = \frac{2}{\sqrt{3}}(-1,05) + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2,1}{\sqrt{3}},$$

čili Usainova světočára má rovnici

$$ct = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{2,1}{\sqrt{3}}.$$

Přímka d má rovnici

$$d\colon\ ct = -x + p.$$

Směrnice je -1, jelikož se jedná o světelný paprsek šířící se zprava doleva. Číslo p dopočítáme podobně pomocí bodu A, jehož souřadnice v klidové soustavě jsme zjistili výše. Dosadíme do přímky d a spočítáme

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = -1 + p, \quad \Rightarrow \quad p = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Rovnice přímky d je tedy

$$d\colon\ ct = -x + 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Bod D je průsečík Usainovy světočáry a přímky d, proto příslušné rovnice od sebe odečteme a získáme

$$0 = \frac{2}{\sqrt{3}}x + x + \frac{2,1}{\sqrt{3}} - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Odtud získáme x-ovou souřadnici bodu D, která je

$$x = \frac{\sqrt{3} - 0,1}{2 + \sqrt{3}} \approx 0,437.$$

Takže Usain je skoro uprostřed místnosti, když zjistí, že žebřík narazil do zadní zdi v místnosti.